פתרון בוחן בקורס מבוא לחוגים ומודולים
88-212 סמסטר ב' תשפ"א

הוראות כתבו באופן ברור שם מלא ומספר ת"ז.
יש לענות על כל השאלות פתרון מלא ומנומק. נא לכתוב בעט כחול או שחור.
משך הבוחן: 90 דקות. לאחר מכן יינתנו 10 דקות נוספות לטובת סריקת הקבצים והעלאתם למודל.
סך הנקודות עולה על 100, אך הציון המקסימלי בבוחן הינו 100.
חומר עזר: אסור.
בכל הבוחן, "חוג" מתייחס לחוג שאינו חוג האפס (כלומר $1 \neq 0$).

בהצלחה!

שאלה 1. (אין קשר בין הסעיפים)

א. יהי R חוג שאין בו אידאלים שמאליים לא טריוויאליים (כלומר האידאלים השמאליים היחידים הם $\{0\}$ ו-R). הוכיחו כי R הוא חוג עם חילוק. (20 נקודות)

ב. יהי R חוג, ויהי $J \lhd R[x]$ אידאל. האם בהכרח קיים אידאל $I \lhd R$ כך ש-$J = I[x]$? (20 נקודות)

פתרון.

א. הטענה נכונה. נניח שב-R אין אידאלים שמאליים לא טריוויאליים, ויהי $0 \neq a \in R$. נתבונן ב-$L = Ra$. L הוא אידאל שמאלי של R, והוא שונה מאפס כי $a \in L$, ולכן לפי ההנחה $L = R$. בפרט קיים $b \in R$ כך ש-$ba = 1$. זה מראה ש-a הפיך משמאל. כדי להראות ש-a הפיך מימין, נשים לב שלפי החלק הראשון, גם b הפיך משמאל, כלומר קיים $c \in R$ שעבורו $cb = 1$. לכן $c = c(ba) = (cb)a = a$, כלומר $ab = ba = 1$, ולכן a הפיך. זה מראה ש-R חוג עם חילוק.

ב. הטענה אינה נכונה. למשל, ניקח $J = \langle x \rangle$. אילו $J = I[x]$, האידאל I היה חייב להיות כל האיברים שהם מקדמים חופשיים של פולינומים ב-J. אבל המקדם החופשי של כל הפולינומים ב-J הוא 0, לכן היינו מקבלים $I = 0$, כלומר $J = 0$, בסתירה.

שאלה 2.

א. מצאו $n \in \mathbb{N}$ שעבורו ${}^{\mathbb{Z}[\sqrt{3}]}/_{\langle 3+\sqrt{3}\rangle} \cong {}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}$, והוכיחו את האיזומורפיזם. (20 נקודות)

ב. מצאו את כל האידאלים של $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ שמכילים את $3 + \sqrt{3}$. (20 נקודות)

פתרון.

א. כדי למצוא את ה-n הנכון, נניח שהיה איזומורפיזם כנ"ל. נקבל מפה הומומורפיזם $\varphi:\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]\to {}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}$ כך ש-$\ker\varphi=\left\langle 3+\sqrt{3}\right\rangle$. נשים לב כי $\varphi(1)=1+n\mathbb{Z}$, לכן $\varphi(3)=3+n\mathbb{Z}$, ומצד שני $\varphi\left(3+\sqrt{3}\right)=0+n\mathbb{Z}$ ולכן $\varphi\left(\sqrt{3}\right)=-\varphi(3)=-3+n\mathbb{Z}$. לכן נקבל

$$3+n\mathbb{Z}=\varphi(3)=\varphi\left(\sqrt{3}^2\right)=\varphi\left(\sqrt{3}\right)^2=(-3+n\mathbb{Z})^2=9+n\mathbb{Z}.$$

לכן נקבל $6+n\mathbb{Z}=0+n\mathbb{Z}$, כלומר $n\mid 6$. נראה שעבור $n=6$ מתקבל איזומורפיזם.
נשים לב שלפי החישוב הקודם, $\varphi\left(\sqrt{3}\right)=3+6\mathbb{Z}$. לכן נגדיר $\varphi:\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]\to {}^{\mathbb{Z}}/_{6\mathbb{Z}}$ לפי

$$\varphi\left(a+b\sqrt{3}\right)=(a+3b)+6\mathbb{Z}.$$

נוכיח כי φ הומומורפיזם: φ מכבדת חיבור כי

$$\begin{aligned}\varphi\left(\left(a+b\sqrt{3}\right)+\left(c+d\sqrt{3}\right)\right)&=\varphi\left((a+c)+(b+d)\sqrt{3}\right)=((a+c)+3(b+d))+6\mathbb{Z}=\\&=((a+3b)+6\mathbb{Z})+((c+3d)+6\mathbb{Z})=\\&=\varphi\left(a+b\sqrt{3}\right)+\varphi\left(c+d\sqrt{3}\right)\end{aligned}$$

φ מכבדת כפל כי

$$\begin{aligned}\varphi\left(\left(a+b\sqrt{3}\right)\left(c+d\sqrt{3}\right)\right)&=\varphi\left((ac+3bd)+(ad+bc)\sqrt{3}\right)=\\&=(ac+3bd+3(ad+bc))+6\mathbb{Z}\end{aligned}$$

ומצד שני

$$\begin{aligned}\varphi\left(a+b\sqrt{3}\right)\varphi\left(c+d\sqrt{3}\right)&=((a+3b)+6\mathbb{Z})((c+3d)+6\mathbb{Z})=\\&=(ac+3ad+3bc+9bd)+6\mathbb{Z}=\\&=(ac+3bd+3ad+3bc)+6\mathbb{Z}\end{aligned}$$

ומקבלים שוויון. בנוסף, $\varphi(1)=1+6\mathbb{Z}$. לכן φ הומומורפיזם.
נחשב את הגרעין. $\varphi\left(3+\sqrt{3}\right)=6+6\mathbb{Z}=0+6\mathbb{Z}$, לכן $\left\langle 3+\sqrt{3}\right\rangle\subseteq\ker\varphi$.
מצד שני, אם $a+b\sqrt{3}\in\ker\varphi$ אז $\varphi\left(a+b\sqrt{3}\right)=(a+3b)+6\mathbb{Z}=0+6\mathbb{Z}$, לכן $6\mid(a+3b)$. נכתוב $a=3b+6k$, ונקבל

$$\begin{aligned}\frac{a+b\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}&=\frac{a+b\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{(3a-3b)+(3b-a)\sqrt{3}}{6}=\\&=\frac{a-b}{2}+\frac{3b-a}{6}\cdot\sqrt{3}=\frac{2b+6k}{2}+\frac{3b-3b-6k}{6}\cdot\sqrt{3}=\\&=(b+3k)-k\sqrt{3}\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]\end{aligned}$$

לכן $a+b\sqrt{3}\in\left\langle 3+\sqrt{3}\right\rangle$ (כי הוא מתחלק ב-$3+\sqrt{3}$), מה שמוכיח את ההכלה בכיוון ההפוך. לכן $\ker\varphi=\left\langle 3+\sqrt{3}\right\rangle$.
φ על, כי לכל $a+6\mathbb{Z}\in {}^{\mathbb{Z}}/_{6\mathbb{Z}}$ מתקיים $\varphi(a)=a+6\mathbb{Z}$.
בסך הכל, לפי משפט האיזומורפיזם הראשון מתקיים

$${}^{\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]}/_{\left\langle 3+\sqrt{3}\right\rangle}\cong {}^{\mathbb{Z}}/_{6\mathbb{Z}}.$$

ב. לפי משפט ההתאמה, האידאלים של $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ שמכילים את $3+\sqrt{3}$ נמצאים בהתאמה חח"ע ועל לאידאלים של חוג המנה $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. כפי שאנחנו יודעים, לחוג המנה יש ארבעה אידאלים בסך הכל:

$$\{0+6\mathbb{Z}\} = 6\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \langle 2+6\mathbb{Z}\rangle = 2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \langle 3+6\mathbb{Z}\rangle = 3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \langle 1+6\mathbb{Z}\rangle = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}.$$

לכן נקבל את ארבעת האידאלים הדרושים:

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}\left(6\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\right) &= \left\langle 3+\sqrt{3}\right\rangle \\
\varphi^{-1}\left(2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\right) &= \left\{a+b\sqrt{3} \mid a+3b\in 2\mathbb{Z}\right\} \\
\varphi^{-1}\left(3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\right) &= \left\{a+b\sqrt{3} \mid a+3b\in 3\mathbb{Z}\right\} = \left\{a+b\sqrt{3} \mid a\in 3\mathbb{Z}\right\} \\
\varphi^{-1}\left(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\right) &= \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]
\end{aligned}$$

אפשר גם את שני האידאלים שבאמצע לכתוב כאידאלים ראשיים:

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}\left(2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\right) &= \left\{a+b\sqrt{3} \mid a+3b\in 2\mathbb{Z}\right\} = \left\langle 1+\sqrt{3}\right\rangle \\
\varphi^{-1}\left(3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\right) &= \left\{a+b\sqrt{3} \mid a\in 3\mathbb{Z}\right\} = \left\langle \sqrt{3}\right\rangle
\end{aligned}$$

(אבל צריך לנמק למה זה נכון, למשל ע"י הכלה דו-כיוונית, או להראות את זה ישירות.)

שאלה 3. יהי R חוג, יהיו $I_1, I_2 \lhd R$ אידאלים מקסימליים שונים זה מזה, ויהיו $J_1, J_2 \lhd R$ אידאלים מקסימליים שונים זה מזה. נניח ש-$I_1 I_2 = J_1 J_2$. הוכיחו כי $I_1 = J_1$ ו-$I_2 = J_2$, או $I_1 = J_2$ ו-$I_2 = J_1$.

(בשאלה זו מותר להניח ש-R חילופי ועדיין לקבל את מלוא הנקודות.) (30 נקודות)

הוכחה. יש כמה דרכים, נדגים כמה מהן (יש עוד).

- בלי הנחת חילופיות: מהנתון נקבל $I_1 I_2 = J_1 J_2 \subseteq J_2$. אבל J_2 מקסימלי, לכן J_2 ראשוני, ולכן $I_1 \subseteq J_2$ או $I_2 \subseteq J_2$. כיוון ש-I_1, I_2 מקסימליים, נקבל $I_1 = J_2$ או $I_2 = J_2$. בדומה, $I_1 = J_1$ או $I_2 = J_1$. כיוון ש-$J_1 \neq J_2$, נקבל את הדרוש.

- אם מניחים ש-R חילופי: נניח ש-$J_1 \neq I_1$. כיוון שהם מקסימליים, $I_1 \nsubseteq J_1$, לכן קיים $a \in I_1 \setminus J_1$. יהי $b \in I_2$; אז $ab \in I_1 I_2 = J_1 J_2 \subseteq J_1$. כיוון ש-$J_1$ מקסימלי, הוא ראשוני; אבל $a \notin J_1$, לכן $b \in J_1$. זה מראה ש-$I_2 \subseteq J_1$, ומהמקסימליות נקבל $I_2 = J_1$. כעת $I_2 \neq J_2$ (כי $J_1 \neq J_2$), ונוכל להפעיל את אותו הטיעון לקבל $I_1 = J_2$, כנדרש. אם $I_1 = J_1$, נימוק דומה יראה ש-$I_2 = J_2$.

- בלי הנחת חילופיות: ראשית, נטען שכל שני אידאלים מקסימליים שונים הם קו-מקסימליים. אכן, אם M_1, M_2 שני אידאלים מקסימליים שונים של חוג R, אז $M_1 + M_2$הוא אידאל שמכיל ממש את M_1 ואת M_2, ולכן $M_1 + M_2 = R$, כלומר קו-מקסימליים.
נשתמש בעוד טענה שראיתם בתרגיל בית: אם I ו-K קו-מקסימליים וגם J ו-K קו-מקסימליים, אז IJ ו-K קו-מקסימליים.
נניח בשלילה ש-$I_1, I_2 \neq J_1$. אז I_1 ו-J_1 קו-מקסימליים, וגם I_2 ו-J_1 קו-מקסימליים, ולכן $I_1 I_2$ ו-J_1 קו-מקסימליים. אבל $I_1 I_2 = J_1 J_2$, לכן $R = J_1 J_2 + J_1 \supseteq J_1$, בסתירה. לכן $I_1 = J_1$ או $I_2 = J_1$. בדומה $I_1 = J_2$ או $I_2 = J_1$, ונקבל את הדרוש כי $J_1 \neq J_2$.

- אפשר גם לעבור דרך חוגי מנה, אבל זו דרך יותר מסובכת.

$\square$