תרגיל בית 4 – טופולוגיה

**שאלה 1**

1. הוכיחו את הטענה הבאה:  סגורה .
2. מצאו את נקודות ההצטברות של תת הקבוצות הבאות של המרחב המטרי :
3. , z.
4. .

**שאלה 2**

יהי  מ"מ ותהי  תת קבוצה ו-. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

1.  (הפרש קבוצות).
2. קיים  כך ש-.
3. לכל סדרה, אם  אזי  קבועה לבסוף.

**שאלה 3**

הוכיחו או הפריכו: אם מ"מ שלם, ו- היא פונקציה רציפה, אזי תת מרחב שלם של .

**שאלה 4**

נסמן ב-את אוסף נקודות ההצטברות של ; נסמן ב- את אוסף נקודות ההצטברות של  וכן הלאה.

יהי  מ"מ, תהי  סדרה שכל איבריה שונים המתכנסת ל-כאשר.

1. מצאו את .
2. האם  קומפקטי?
3. האם  קומפקטי? נמקו את תשובתכם אך ורק באמצעות הגדרת הקומפקטיות דרך **כיסוים פתוחים**!

**שאלה 5**

תהי  קבוצה. נתבונן באוסף  (כלומר כל תתי הקבוצות של  בעלות משלים אינסופי, יחד עם הקבוצה עצמה והמרחב כולו). הוכיחו/הפריכו:  מהווה טופולוגיה על .

**שאלה 6**

1. נתבונן ב-  ובתת קבוצה שלו . נאמר ש- היא קבוצה סגורה אם  כאשר:  היא תת קבוצה סגורה של בטופולוגיה האוקלידית, ו- היא תת קבוצה כלשהי של . הוכיחו שהמשלימים של הקבוצות הסגורות הללו יוצרים טופולוגיה על .

הדרכה: קודם כל, תוכיחו שזאת טופולוגיה ע"י כך שתראו את שלוש התכונות על קבוצות סגורות (ולא הפתוחות). שנית, כאשר תבדקו שחיתוך כלשהו של קבוצות סגורות הוא סגור, היעזרו בכך שמתקיים: .

1. נתבונן בקבוצת המספרים השלמים  ולכל  נגדיר . נסמן . הוכיחו:
2.  מרחב טופולוגי.
3.  אינו מטריזבילי.

**שאלה 7**

תזכורת:

תהי  קבוצה כלשהי, ותהי  ויהי . נגדיר .

1. הוכיחו ש- הוא מרחב טופולוגי.
2. נניח ש- . הוכיחו כי .
3. בתנאי סעיף ב', האם  מטריזבילי?

**שאלה 8**

נתבונן בשני אוספים של תתי קבוצות של : , .

הוכיחו ש- הן טופולוגיות על .