התכנסות

1. הגדרה: התכנסות סדרות.

2. הוכיחו כי במטריקה ה5 אדית 5 $2 \cdot 3^n + 5 \to 5$
פתרון $d(2 \cdot 3^n + 5, 5) = \frac{1}{3^n} \to 0$

3. ב l_∞ תהא $\{x^n\}$ו x. האם $x^n \to x$ גורר התכנסות רכיב-רכיב. האם להיפך?
פתרון $|x_m^n - x_m| \le \sup_m |x_m^n - x_m| = \|x^n - x\| \to 0$. הצד השני לא נכון, למשל $x^n = e_n$ יש התכנסות רכיב רכיב ל 0 אבל $\|e_n - 0\| = 1$

4. יהא (X,d)מ״מ. כל סדרה מתכנסת היא קושי.
פתרון: $\{x_n\}$ מתכנסת ל x. נראה שהיא קושי: יהא ϵ נתון. אזי קיים n_0 כך ש

$$\forall n \ge n_0 : d(x_n, x) \le \frac{\epsilon}{2}$$

לכן

$$\forall n, m \ge n_0 : d(x_n, x_m) \le d(x_n, x) + d(x, x_m) \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

5. יהא (X,d) מ״מ ותהא $\{x_n\}$ סדרת קושי שיש לה ת״ס מתכנסת $\{x_{n_k}\}$ אזי היא מתכנסת.
פתרון: יהא ϵ נתון. נסמן x הגבול של ת״ס. לכן קיים k_0 כך ש

$$\forall k \ge k_0 : d(x_{n_k}, x) \le \frac{\epsilon}{2}$$

מהגדרת הגבול. בנוסף מהגדרת סדרת קושי קיים n_0 כך ש

$$\forall n, m \ge n_0 : d(x_n, x_m) \le \frac{\epsilon}{2}$$

לכן עבור $N_0 = \max\{k_0, n_0\}$ מתקיים כי

$$\forall n \ge N_0 : d(x_n, x) \le d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

כאשר לכל n נבחר $n \le n_k$.

6. יהא (X,d) מ״מ הוכיחו כי כל סדרת קושי $\{x_n\}$ חסומה.
פתרון: קיים n_0 כך ש $\forall n, m \ge n_0 : d(x_n, x_m) \le 1$ נגדיר $r = \max_{i,j \le n_0} d(x_i, x_j)$.
טענה $diam\{x_n\} \le r + 1$. הוכחה:

$$d(x_i, x_j) \le \begin{cases} r & i, j \le n_0 \\ d(x_i, x_{n_0}) + d(x_0, x_j) \le r + 1 & i \le n_0 < j \\ 1 & n_0 < i, j \end{cases}$$

וסיימנו.

שלמות

1. הגדרה: מ״מ נקרא שלם אם כל סדרת קושי מתכנסת.

2. תרגיל $(C[0,1], d_1)$ אינו שלם.
נגדיר $\{f_n\}_{n\geq 2}$ להיות 0 בקטע $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ אח״כ עולה ל 1 בקטע $\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right]$ ואח״כ שווה 1 בקטע $\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{n},1\right]$. מתקיים כי לכל $n<m$ כי

$$\int_0^1 |f_n-f_m|\,dx \leq \frac{1}{n}\cdot 1$$

כי הם נבדלות רק בקטע $\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right]$ וההבדל הוא 1 לכל היותר. ולכן זוהי סדרת קושי.
בנוסף אם f_n מתכנסת היא מתכנסת לפונקצית מדרגה ששוה 0 בקטע $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ ו 1 בקטע $\left(\frac{1}{2},1\right]$ שאינה שייכת למרחב.

3. תרגיל $(\mathbb{Z}, d_p)$ אינו שלם: בעזרת הטענות הבאות:

(א) טענה: $x_n\to x$ אזי $cx_n\to cx$
הוכחה: כיוון ש $\max\{k:\ k|(x_n-x)\}\leq \max\{k:\ k|c(x_n-x)\}$ נקבל כי

$$d(cx_n,cx)=\frac{1}{p^{k(cx_n,cx)}}\leq\frac{1}{p^{k(x_n,x)}}=d(x_n,x)\to 0$$

i. הערה: זה לא נכון במקרה כללי. למשל ב $(\mathbb{R},d)$ המוגדרת ע״י $d(x,y)=|f(x)-f(y)|$ כאשר f היא הזהות פרט להחלפה של $2\rightleftarrows 1$. מתקיים כי $x_n=4+\frac{1}{n}\to x=4$ אבל $\frac{1}{2}x_n=2+\frac{1}{2n}$ לא שואף ל 2 כי

$$d(\frac{1}{2}x_n,2)=\left|2+\frac{1}{2n}-1\right|=\left|1+\frac{1}{2n}\right|$$

(ב) טענה: $a_n=\sum_{i=0}^n p^i=\frac{p^{n+1}-1}{p-1}$ לא מתכנסת אבל היא סדרת קושי (ולכן המרחב לא שלם).
הוכחה: לכל $n<m$ מתקיים כי

$$d(a_n,a_m)=\frac{1}{p^{k(\sum_{i=n+1}^m p^i,0)}}=\frac{1}{p^{n+1}}$$

ולכן זוהי סדרת קושי. בנוסף אם הסדרה מתכנסת $a_n\to a$ אזי גם $p^{n+1}-1=(p-1)a_n\to(p-1)a$. נסמן ב $k=\max\{t:\ p^t|(-1-a(p-1))\}$ ואז

$$d(p^{n+1}-1,(p-1)a)\to\frac{1}{p^k}$$

קבוצות פתוחות/סגורות

1. הגדרה: קבוצות פתוחות וסוגורות ב מ"מ. ב (X,d) קבוצה O היא פתוחה אם אם $\forall x \in O \exists r > 0 : B(x,r) \subseteq O$. קבוצה C סגורה אם המשלים שלה פתוח.

2. יהא (X,d) מ"מ אזי כל כדור סגור $B = B[x,r]$ הוא קבוצה סגורה.
הוכחה: צריך להוכיח כי המשלים פתוח. יהא y במשלים כלומר $d(y,x) > r$ נגדיר $r' = d(y,x) - r$ ונראה כי $B(y,r')$ מוכל במשלים. אכן יהא $z \in B(y,r')$ ונניח בשלילה כי $d(x,z) \le r$ אזי
$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) < r + r' = d(y,x)$$
סתירה.

3. ב l_∞ נגדיר C קבוצת הסדרות הקבועות אזי C סגורה.
הוכחה: תהא x סדרה לא קבועה. יהיו $a < b$ שני איברים בה. נגדיר $r = \frac{b-a}{2}$ ונראה כי $B(x,r)$ מוכל $\bar{C}$. אכן, יהא $y \in B(x,r)$ ונניח בשלילה כי y סדרה קבוע (c). אזי $\max\{|c-b|, |c-a|\} \le \|y-x\| < r$ ואז
$$|b-a| \le |c-b| + |c-a| < 2r = b-a$$
סתירה.

4. יהא (X,d) מ"מ. כל קבוצה סגורה S היא חיתוך בן מניה של פתוחות $S = \cap_n O_n$.
פתרון: נגדיר $O_n = \cup_{x\in S} B(x, \frac{1}{n})$ ונוכיח כי $S = \cap_n O_n$. אכן $(\subseteq)$ $S \subseteq O_n$ לכל n (כי כל $x \in S$ מקיים $x \in B(x, \frac{1}{n})$) ולכן גם בחיתוך.
$(\supseteq)$ יהא $y \in \bar{S}$ ונראה שהוא לא בחיתוך. אכן y בקבוצה פתוחה ולכן $B(y, \frac{1}{n}) \subseteq \bar{S}$ עבור n כלשהוא. לכן $y \notin O_n$ (כי לכל $x \in S$ מתקיים $d(y,x) \ge \frac{1}{n}$) ולכן y לא בחיתוך $\cap_n O_n$.

פונצקיות רציפות:

1. ב l_∞ פונקצית ההטלה על רכיב i, $P_i : l_\infty \to \mathbb{R}$ ($P_i((x_n)) = x_i$) היא לפשיץ
הוכחה:
$$|P_i((x_n)) - P_i((x_n))| = |x_i - y_i| \le \sup_n |x_n - y_n| = d_\infty(x,y)$$

2. אם $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ רציפה במ"ש אז תמונה של סדרת קושי $\{x_n\}$היא קושי.
הוכחה: יהא ϵ נתון. לפי נתון קיים δ כך ש
$$d(x', x") \le \delta \Rightarrow \rho(f(x'), f(x")) \le \epsilon$$
ובנוסף קיים n_0 כך ש
$$\forall n,m \ge n_0 : d(x_n, x_m) \le \delta$$
ולכן
$$\forall n,m \ge n_0 : \rho(f(x_n), f(x_m)) \le \epsilon$$
כנדרש.

(א) הערה: עבור פונקציה רציפה הטענה לא נכונה בהכרח
למשל: $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ המוגדרת $f(x) = \frac{1}{x}$ רציפה ו $\left\{x_n = \frac{1}{n}\right\}$ סדרת קושי (אינפי) אבל $\{f(x_n) = n\}$ אינה סדרת קושי.

מטריקות שקולות

1. מטריקה שקולות d, d' על X אם סדרה $x_n \xrightarrow{d} x$ אמ"מ $x_n \xrightarrow{d'} x$

2. למשל: $\rho(x,y) = \alpha d(x,y)$ לכל $\alpha > 0$ שקולות

3. אם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה וחח"ע. אז ערך מוחלט שקול למטריקה $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)|$
הוכחה: אם $|x_n - x| \to 0$ אזי $\rho(x_n, x) = |f(x_n) - f(x)| \to 0$ מרציפות. בכיוון השני: אם $|f(x_n) - f(x)| \to 0$ כיוון ש f^{-1} רציפה נקבל כי $|x_n - x| \to 0$.

4. האם הבאות שקולות

   (א) $\mathbb{N}$ והמטריקה המושרית מהממשיים והדסקרטית.
   כן, כי כל סדרה מתכנסת בשתי המטריקות צריכה להיות קבוע לבסוף.

   (ב) l_1 עם d_1 ו d_∞.
   לא שקולות. $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, \ldots\right)$ ב d_∞ שואפת ל 0 אבל ב d_1 לא .

   (ג) תרגיל: d, ρ שקולות ואחת שלמה- האם גם השניה שלמה?
   פתרון: לא, למשל $f(x) = e^x$ אזי $\mathbb{R}, |*|$ שלם אבל $\mathbb{R}, d_f$ לא שלם. נימוק: $\left\{\ln \frac{1}{n}\right\}$ סדרת קושי אבל לא מתכנסת כי היא לא מתכנסת בערך מוחלט.
   הפרכה שניה: $X = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ עם ערך מוחלט והדיסקרטית. עם הדיסקרטית נקבל מרחב שלם (כי תמיד זה שלם עם הדסקרטית) אבל עם ערך מוחלט לא. למה הם שקולות? כי בשניהם סדרות מתכנסות הם קבועות לבסוף (בערך מוחלט- כי הנקודות מבודדות).

רציפות לפי תמונה הפוכה של פונקציה רציפה

1. הוכיחו כי $A = \{(x,y) : xy < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ פתוחה. הפונקציה $f(x,y) = xy$ רצפיה ו A היא תמונה הפוכה של הקטע הפתוח $(-\infty, 1)$

2. $f : (X,d) \to \mathbb{R}$ ע"י $f_a(x) = d(x,a)$ רציפה. מסקנה: כדור סדור $B[a,r]$הוא קבוצה סגורה כי הוא תמונה הפוכה של קטע סגור $[0,r]$ של f_a רציפה