# תוכן עניינים

# רשימות תגבורים למילואימניקים אינפי 3

1 במאי 2024

## טופולוגיה ב$\mathbb{R}^n$

מה זה בעצם מרחב מטרי, זה מרחב איזושהי מטריקה.

**הגדרה (מטריקה):**

מטריקה על קבוצה $X$ היא פונקציה $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ המקיימת:

1. חיוביות $d(x,y) \geq 0$, ומתקיים $d(x,y) = 0$ אם ורק אם $x = y$.
2. סימטריות $d(x,y) = d(y,x)$.
3. אי שיוויון המשולש: $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

**הגדרה:**

עבור מרחב מטרי $(X,d)$, ועבור נקודה $a \in X$ ועבור $r > 0$ מגדירים את הכדור הפתוח ברדיוס $r$ סביב $a$ להיות:

$$B_r(a) = B(a,r) = \{x \in X | d(x,a) < r\}$$

את הכדור הסגור מגדירים באופן דומה עם $\leq$.

**הגדרה:**

קבוצה $S \subseteq X$, תקרא קבוצה פתוחה אם לכל נקודה $a \in S$ קיים כדור פתוח $B_r(a) \subseteq S$.

**דוגמאות:**

1. $(a,b)$ פתוח ב$\mathbb{R}$.
2. כל כדור פתוח $B_r(a)$ הוא קבוצה פתוחה.
3. $\emptyset, X$ קבוצות פתוחות.

**הגדרה:**

קבוצה $S \subseteq X$ תקרא סגורה אם $S^c$ פתוחה.

**משפט:**

יהיו $\{U_i\}_{i\in I}$ קבוצות פתוחות במרחב מטרי $X$ אזי $\bigcup_{i\in I}U_i$ הוא פתוח, וכל חיתוך סופי הוא פתוח כלומר $\bigcap_{i=1}^{n}U_i$ פתוח.
באופן דומה עבור $\{A_i\}_{i\in I}$ אז $\bigcap_{i\in I}A_i$ סגור, וכל איחוד סופי יהיה סגור $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ סגור.

**דוגמה:**

נראה דוגמה נגדית עבור חיתוך בן מנייה של פתוחות:

$$U_n=\left\{\left(-\frac{1}{n},2\right)|n\in\mathbb{N}\right\}\subseteq\mathbb{R}$$

כל $U_n$ כזו היא קבוצה פתוחה, אבל החיתוך

$$U=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}U_n=[0,2)$$

וזו לא קבוצה פתוחה, כי לכל סביבה של $0$ ישנם איברים שקטנים מ0 ואינם בקבוצה.

**דוגמאות:**

- קבוצה פתוחה וסגורה: $\varnothing,X$ הן גם פתוחות וגם סגורות בכל מרחב מטרי.
- קבוצה פתוחה שאינה סגורה: $(a,b)$.
- קבוצה סגורה שאינה פתוחה: $[a,b]$.
- קבוצה שאינה פתוחה ואינה סגורה: $[a,b)$.

איך בודקים קבוצות סגורות.

**הגדרה:**

נקודה $A\ni x$ תקרא נקודת הצטברות של $A$ אם לכל $r>0$ קיים $x\neq y\in A$ כך ש$y\in B_r(x)$.
את אוסף נקודות ההצטברות של $A$ מסמנים $A'$.
משפט:
$A$ סגורה אם ורק אם $A=A'$.
דוגמה:
נראה שקטע סגור $[a,b]$ הוא באמת קבוצה סגורה:
ברור כי כל נקודה בקטע הפתוח היא נקודת הצטברות נסתכל על הקצוות, נסתכל על $a$ לדוגמה:
בכל סביבה $B_r(a)=(a-r,a+r)$. ומכיוון ש$a-r<a$ $[a,b]\cap B_r(a)\neq\varnothing$ ולכן סיימנו. ולכן $[a,b]$ סגור.

**הגדרה (סוגי נקודות):**

תהי $S\subseteq X$ תת קבוצה של $X$:

1. נקודה $x\in S$ תקרא נקודה פנימית של $S$ אם קיים $r>0$ עבורו $B_r\left(x\right)\subseteq S$.
2. נקודה $x\in S^c$ תקרא נקודה חיצונית של $S$ אם קיים $r>0$ עבורו $B_r\left(x\right)\subseteq S^c$.
3. נקודה $x\in X$ תקרא נקודת שפה של $S$ אם לכל כדור $B_r\left(x\right)$ מתקיים $B_r\left(x\right)\cap S\neq\varnothing, B_r\left(x\right)\cap S^c\neq\varnothing$.
4. נקודה $x\in S$ תקרא נקודה מבודדת של $S$ אם קיים $r>0$ כך $B_r\left(x\right)\cap S=\{x\}$.
5. נקודה $x\in X$ תקרא נקודת הצטברות של $S$ אם כל סביבה שלה מכילה נקודות מ$S$ פרט לעצמה. (במקרה זה ניתן לבנות סדרה $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x$ שכל איבריה שונים מ-$x$).

**דוגמאות:**

1. $\{1,2,3,5\}\subseteq\mathbb{R}$:
זו קבוצה סופית ולכן היא לא מכילה אף קטע ולכן אין לה אף נקודה פנימית, ובמקרה זה כל נקודה היא מבודדת, כל נקודה שאינה בקבוצה היא נקודת חיצונית, כל נקודה בקבוצה היא נקודת שפה ורק הן, ובאמת אין נקודות הצטברות.
2. $\left\{\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}\right\}$:
שוב היא בת מנייה ולכן היא לא מכילה אף קטע (משיקולי עוצמות) ולכן אין לה נקודות פנימיות. במקרה זה כל נקודה היא מבודדת. כל נקודה שאינה בקבוצה ואינה $0$ היא נקודה חיצונית, לפי אותו רעיון $0$ נקודת שפה, כל נקודה בקבוצה היא מבודדת.

**הגדרה:**

תהי $S\subseteq X$ מגדירים את הסגור של $S$ להיות הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר המכילה את $S$:

$$cl\left(S\right)=\overline{S}=\bigcap_{S\subseteq F}F$$

כאשר $F$ סגורה.

**משפט:**

תהי $S\subseteq X$ הבאים שקולים:

1. $S$ פתוחה.
2. כל נקודה ב$S$ היא פנימית.
3. $S$ אינה מכילה אף אחת מנקודות השפה שלה.
4. $S^c$ סגורה.
5. $S$ היא איחוד של קבוצות פתוחות.
6. $S$ היא חיתוך סופי של קבוצות פתוחות.

**משפט:**

תהי $S\subseteq X$ הבאים שקולים:

1. $S$ סגורה.
2. $S$ מכילה את כל נקודות השפה שלה.
3. $S$ מכילה את כל נקודות ההצטברות שלה. ($S=S'$).
4. $S$ היא חיתוך קבוצות סגורות.
5. $S$ היא איחוד סופי של קבוצות סגורות.
6. $S=\overline{S}$.

**הגדרות:**

תהי $S\subseteq X$ קבוצה.

- נגיד כי $S$ חסומה אם קיים כדור שמכיל. (באופן שקול אם קיים כדור שמרכזו ב$a\in X$ שמכיל אותה.)
- נגדי כי $S$ קומפקטית אם לכל כיסוי פתוח יש תת כיסוי.(כיסוי פתוח - אוסף של קבוצות פתוחות $\{U_i\}_{i\in I}$ שאיחודן מכיל את $S$, תת כיסוי זהו תת אוסף של הקבוצות הפתוחות האלו).
- נגיד כי $S$ קשירה אם לכל שתי קבוצות פתוחות זרות $U,V\subseteq X$ כך ש$S\subseteq U\cup V$ מתקיים ש$U=\not{\emptyset}$ או $V=\not{\emptyset}$.
- נגיד כי $S$ קשירה מסילתית אם לכל שתי נקודות $a,b\in S$ קיימת מסילה $\gamma:S\longrightarrow[0,1]$ רציפה המוכלת כולה ב$S$ כך ש$\gamma(0)=a,\gamma(1)=b$.

**משפט היינה בורל:**

ב$\mathbb{R}^n$ $S$ קומפקטית אם ורק אם $S$ סגורה וחסומה.

**משפט:**

אם $S$ קשירה מסילתית אז $S$ קשירה.

**תרגילים:**

לכל קבוצה כתבו האם סגורה, והאם פתוחה:

1. $S=\mathbb{Q}$
2. $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x=0,y\in(2,3)\right\}$
3. $B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x=y\right\}$.
4. כדור סגור ב$\mathbb{R}^n$: $B=B_r[a]$.

**פתרונות:**

1. $S$ אינה פתוחה ואינה סגורה.לפי צפיפות האי רציונלים: $p < q \in \mathbb{Q}$ אזי קיים $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ כך ש $p < r < q$ ולכן לא קיים שוב קטע המוכל ב$\mathbb{Q}$ ולכן היא אינה פתוחה. אם נסתכל על $\mathbb{Q}^c$ מצפיפות הרציונלים נקבל שאינה פתוחה ולכן $\mathbb{Q}$ אינה סגורה. $\mathbb{Q}$ אינה חסומה, נובע מכך $\mathbb{N}$ אינה חסומה. ואינה קומפקטית כי אינה סגורה וחסומה. $\mathbb{Q}$ אינה קשירה מסילתית בגלל צפיפות האי רציונלים, להוכיח שהיא לא קשירה זה קצת יותר מאתגר ולא נעשה.

2. $A$ אינה פתוחה ואינה סגורה. אינה פתוחה ־ כי לכל נקודה $p = (0, y) \in A$ בכדור $B_r(p)$ יש את הנקודה $\left(\frac{r}{2}, y\right)$ והיא לא שייכת ל$A$, אינה סגורה כי $(0,2), (0,3)$ הן נקודות הצטברות שלה והן לא שייכות אליה. $A$ אינה קומפקטית כי אינה סגורה. $A$ חסומה למשל $B_{10}(0,0)$. $A$ אכן קשירה מסילתית לכל $(0, t_1), (0, t_2) \in A$ ניקח

$$\gamma(t) = (0, (1-t) \cdot t_1 + t \cdot t_2)$$

$\gamma$ רציפה כי היא פולינום של $t$, היא מוכלת ב$A$: לכל $t \in [0,1]$ מתקיים $2 < t_1 < (1-t) \cdot t_1 + t \cdot t_2 < t_2 < 3$ ולכן היא מוכלת ב$A$. $\gamma(0) = (0, t_1), \gamma(1) = (0, t_2)$. $A$ קשירה מסילתית ולכן קשירה.

3. $B$ אינה פתוחה וסגורה. אינה פתוחה ־ כי לכל $p = (t,t) \in B$ בכדור $B_r(p)$ יש את הנקודה $\left(t - \frac{r}{2}, t\right) \notin B$. סגורה ־ נראה שהיא שווה לאוסף נקודות ההצטברות שלה: $B \subseteq B'$: תהי $p = (t,t) \in B$ בכל כדור $B_r(p)$, מצד אחד יש את הנקודה $\left(t - \frac{r}{2}, t\right) \notin B$ ומצד שני יש את הנקודה $q = \left(t - \frac{r}{2}, t - \frac{r}{2}\right) \in B$

$$d(q,p) = \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot 2} = \sqrt{2} \cdot \frac{r}{2} < r$$

$B' \subseteq B$: תהי $p = (x_0, y_0)$ נקודת הצטברות כלומר לכל $n \in \mathbb{N}$ בכדור $B_{\frac{1}{n}}(p)$ קיימת נקודה $(x,x) \in B$.

$$d((x_0, y_0), (x,x)) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y_0 - x)^2} < \frac{1}{n} : \forall n \in \mathbb{N}$$

ולכן $(x_0, y_0) = (x,x)$. וזו קבוצה סגורה.
$B$ אינה חסומה, כל כדור $B_r(0,0)$ לא יכיל את הנקודה $(r,r)$ כי המרחק שלה מ$(0,0)$ הוא $\sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2}r > r$ שהיא אכן בקבוצה.
$B$ אינה קומפקטית כי היא חסומה ב$\mathbb{R}^n$.
נראה כי $B$ קשירה מסילתית ולכן קשירה ־ עבור $(t_1, t_1), (t_2, t_2) \in B$

$$\gamma(t) = (1-t)(t_1, t_1) + t(t_2, t_2)$$

רציפה כי היא פולינום ב$t$, היא מוכלת ב$B$ כי לכל $t$:

$$\gamma(t) = ((1-t)t_1 + tt_2, (1-t)t_1 + tt_2) \in B$$

ובאמת $\gamma(0) = (t_1, t_1), \gamma(1) = (t_2, t_2)$.

4. אינו פתוח ־ כי עבור הנקודה $p=(a_1+r,a_2,\dots,a_n)\in B$ כי המרחק שלה הוא בדיוק $r$, וכל כדור שלה $B_R(p)$ יכיל נקודות מהצורה $\left(a_1+r+\frac{R}{2},a_2,\dots,a_n\right)$ שלא שייכות ל$B$. הוא כן סגור כי אמרנו שכדור סגור הוא קבוצה סגורה. הוא כן חסום כי הוא מוכל בעצמו. הוא קומפקטי לפי היינה בורל כי הוא סגור וחסום ב$\mathbb{R}^n$. נראה שהוא קשיר מסילתית ולכן קשיר, יהיו $x,y\in B_r[a]$, נגדיר את המסילה:

$$\gamma_x(t)=ta+(1-t)x,\gamma_y(t)=ty+(1-t)a$$

שוב הן רציפות כפולינום, נראה כי $\gamma_y\subseteq B$ באופן דומה $\gamma_x$, לכל $t\in[0,1]$:

$$\begin{aligned}d(a,\gamma_y(t))&=\|a-\gamma_x(t)\|\\&=\|a-ta-(1-t)x\|\\&=|1-t|\,\|a-x\|\\&\le\|a-x\|\\&=d(a,x)\\&\le r\end{aligned}$$

ולכן המסילות מוכלות כולן בכדור:

$$\gamma(t)=\begin{cases}2ta+(1-2t)x & \left[0,\frac{1}{2}\right]\\(2t-1)y+(2-2t)a & \left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

שרשור של $\gamma_x,\gamma_y$ ולכן מוכלת בכדור בכל נקודה שאינה $\frac{1}{2}$ היא רציפה כי אחת מהן רציפות, בחצי לפי שני המקרים מקבלים $a$ ולכן היא רציפה, ומתקיים

$$\gamma(0)=x,\gamma(1)=y$$

ולכן זו מסילה המחברת ביניהן. ולכן היא קשירה מסילתית ולכן קשירה.

## פונקציות במרחבים מטרים

**הגדרה:**

עבור $f:(X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$ אומרים שהגבול של $f$ בנקודה $a\in X$ הוא $L$ ונסמן $\lim_{x\longrightarrow a}f(x)=L$, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $0<d(x,a)<\delta$ אז $\rho(f(x),L)<\varepsilon$.

**הגדרה:**

$f:(X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$ תקרא רציפה אם לכל $x\in X$ מתקיים $\lim_{x\longrightarrow a}f(x)=f(a)$.

**הערה:**

כל הפונקציות האלמנטריות פולינומים פונקציות רציונליות פונקציות טריגו, פונקציות חזקה, לוגרתימים וכו', כולן רציפות בתחום הגדרתן.

## שימוש בפונקציות רציפות כדי לדבר על קבוצות פתוחות וסגורות:

### משפט:

עבור $f:(X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$ רציפה מתקיים, אם $U\subseteq Y$ פתוחה אזי $f^{-1}(U)$ פתוחה.

### דוגמה:

יהיו $a_1,\ldots,a_n,b\in\mathbb{R}$ הוכיחו שהקבוצה $H=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i>b\}$ פתוחה.
נגדיר $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ באופן הבא $f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i$ נשים לב כי $f$ רציפה כפולינום ולכן מכיוון ש$H=f^{-1}((b,\infty))$ וידוע כי $(b,\infty)$ היא קבוצה פתוחה ב$\mathbb{R}$ נקבל כי $H$ פתוחה ב$\mathbb{R}^n$.

### דוגמה:

יהי $ax+by+cz+d=0$ מישור ב$\mathbb{R}^3$ הוכיחו שהוא סגור.
נגדיר $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ לפי $f(x,y,z)=ax+by+cz+d$, נשים לב כי $f$ רציפה כפולינום.
נסמן את קבוצת הנקודות במישור $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}|ax+by+cz+d=0\}$.
ונשים לב כי $A=f^{-1}(\{0\})$. מכיוון ש$\{0\}$ קבוצה סגורה ב$\mathbb{R}$ נקבל כי $A$ קבוצה סגורה ב$\mathbb{R}^3$.

### דוגמה:

$A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|e^{2x+2y}+z^4\leq5\right\}$ , האם היא סגורה? האם היא פתוחה? האם קומפקטית?
השימוש בפונקציות לא תמיד עובד למשל כאן נרצה להגדיר $f(x,y,z)=e^{2x+2y}+z^4$ אבל אז $A=f^{-1}((0,5])$ וזה לא נותן שום מידע.
הדרך הכן נוחה לעשות היא להשתמש בסדרות, מה שמוביל לנושא הבא של סדרות.
**תרגיל:**
הוכיחו שהקבוצה $A=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4:x^y+z^w\leq203\right\}$ סגורה.
**פתרון:**
נגדיר $f(x,y,z,w)=x^y+z^w$ . נשים לב כי $A=f^{-1}((-\infty,203])$, הקבוצה $(-\infty,203]$ היא סגורה (למשל כי המשלים שלה $(203,\infty)$ שהוא פתוח, אפשר גם להראות עם סדרות, ועם הרבה דרכים שונות.)
ולכן $A$ סגורה כתמונה הפוכה תחת פונקציה רציפה של קבוצה סגורה.

## סדרות:

### הגדרה:

נגיד כי סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in(X,d)$ מתכנסת לx אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $N$ כך שעבור $n>N$ מתקיים $d(x_n,x)<\varepsilon$.

### משפט:

ב$\mathbb{R}^m$ סדרה נראית בצורה הבא $x_n=\left(x_n^1,\ldots,x_n^m\right)$, ומתקיים כי $x_n\longrightarrow L\in\mathbb{R}^m$ אם ורק אם לכל $1\leq i\leq m$ מתקיים $x_n^i\longrightarrow L^i$. בלשון העממית הסדרה מתכנסת אם ורק אם יש התכנסות רכיב רכיב.

**דוגמה:**

$a_n=\left(\frac{2}{n},e^{-\frac{1}{n^2}}\right)$, ידוע כי $1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, e^{-\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{}$ $\frac{2}{n}$ ולכן $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,1)$.

**הערות:**

- סדרה תקרא חסומה אם קיים כדור שמכיל אותה (שקול לאם הקבוצה שהיא איברי הסדרה חסומה).
- מגדירים תת סדרה באותו אופן כמו באינפי 1.
- משפט בולצנו ווירשטראס: לכל סדרה חסומה יש תת סדרה מתכנסת. (נכון עבור $\mathbb{R}^n$ לכל $n$).
- כל המשפטים מאינפי 1 על סדרות יש אנלוג בכמה משתנים, סנדוויץ, בולצנו־ווירשטראס.

**משפט:**

$A\subseteq X$ סגורה אם ורק אם לכל סדרה של נקודות $x_n\in A$ אם הגבול קיים אזי גם הגבול שלה $\lim_{n\to\infty}(x_n)\in A$.
נחזור לדוגמה:
$A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|e^{2x+2y}+z^4\le 5\right\}$ , האם היא סגורה? האם היא פתוחה?
נראה שהיא סגורה, נשתמש במשפט האחרון תהי $(x_n,y_n,z_n)\in A$ סדרה השייכת ל$A$ נראה כי גבולה $(x,y,z)$ גם כן ב$A$.
לכל $n$ מתקיים $e^{2x_n+2y_n}+z_n^4\le 5$ ולכן לפי זה שמעבר לגבול שומר על אי שיוויון חלש נקבל כי $e^{2x+2y}+z^4\le 5$ ולכן $(x,y,z)\in A$.
נראה שהיא אינה פתוחה, ניזכר כי ב$\mathbb{R}^n$ הקבוצות היחידות שהן גם פתוחות וגם הסגורות הן $\emptyset,\mathbb{R}^n$. $A$ סגורה ואם נניח בשלילה שהיא גם פתוחה אז היא בהכרח אחת מאלו ונראה שזה לא יכול: $A\ne\emptyset$ כי $(0,0,0)\in A$. ו$A\ne\mathbb{R}^3$ כי $(0,0,10)\notin A$. ולכן $A$ אינה פתוחה.

**קצת נתעסק בסדרות:**

דוגמה למשפט בולצנו ווירשטראס:
הוכיחו כי לכל סדרה $x_n\in\mathbb{R}^n$ קיימת תת סדרה $x_{n_k}$ כך ש $\lim_{k\longrightarrow\infty}\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}$ קיים.
נשים לב כי הסדרה $y_n=\frac{x_n}{\|x_n\|}$ חסומה בכדור $B_0(2)$. ולכן לפי משפט בולצנו ווירשטראס קיימת לא תת סדרה מתכנסת וסיימנו.

**הגדרה שקולה לרציפות:**

עבור $f:(X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$ אומרים ש$f$ רציפה בנקודה $a\in X$
אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $d(x,a)<\delta$ אז $\rho(f(x),f(a))<\varepsilon$. (בלשון $\varepsilon-\delta$).
או אם לכל סדרה $x_n\xrightarrow{d}a$ מתקיים $f(x_n)\xrightarrow{\rho}f(a)$. (בלשון היינה).

**הגדרה רציפות במ"ש:**

עבור $f:(X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$ אומרים ש$f$ רציפה במידה שווה בקבוצה $A\subseteq X$
אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x_1,x_2\in A$ אם $d(x_1,x_2)<\delta$ אז $\rho(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon$. (בלשון $\varepsilon-\delta$).
או אם לכל שתי סדרות $x_n,y_n$ ב$A$ המקיימות $d(x_n,y_n)\longrightarrow 0$ מתקיים $\rho(f(x_n),f(y_n))\longrightarrow 0$. (בלשון היינה).

**משפט קנטור היינה:**

תהי $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ רציפה על תחום קומפקטי אז היא רציפה בו במ"ש.

**דוגמאות:**

בדקו האם הפונקצה $f(x,y)=\sin\left(\frac{1}{1-x^2-y^2}\right)$ רציפה במ"ש בקבוצות הבאת:
א. $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2<1\right\}$.
ב. $B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|3<x^2+y^2<4\right\}$.

**פתרון:**

א. נראה שהיא אינה רציפה במ"ש ניקח את

$$\begin{cases}a_n=\left(\sqrt{1-\frac{1}{\pi n}},0\right) & f(a_n)=\sin\left(\frac{1}{1-1+\frac{1}{\pi n}}\right)=\sin(\pi n)=0\\ b_n=\left(\sqrt{1-\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}},0\right) & f(b_n)=\sin\left(\frac{1}{1-1+\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}}\right)=\sin\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)=1\end{cases}$$

כלומר קיבלנו שתי סדרות $a_n,b_n$ השואפות ל$(1,0)$ ולכן $d(a_n,b_n)\longrightarrow 0$ אבל $f(a_n)=0\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ ו$f(b_n)=1\xrightarrow[n\to\infty]{}1$ וזה והמרחק ביניהן הוא קבוע 1 ולא שואף ל0.
ב. נסתכל על $B\subseteq D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|3\leq x^2+y^2\leq 4\right\}$, הקבוצה $D$ היא סגורה וחסומה, ולכן בגלל שאנחנו ב$\mathbb{R}^2$ קומפקטית כמו כן בתחום $D$ $x^2+y^2\neq 1$ כלומר $f$ מוגדרת בכל נקודה והיא אלמנטרית ולכן היא רציפה, ולכן לפי משפט קנטור היינה נקבל כי $f$ רציפה במ"ש ב$D$.
נראה שהיא גם רציפה במ"ש ב$B$, יהיו $x_n,y_n$ סדרות ב$B$ כך ש$d(x_n,y_n)\longrightarrow 0$ אבל $B\subseteq D$ ולכן אלו גם ב$D$ ולכן מכיוון ש$f$ רציפה במ"ש ב$D$ נקבל כי $d(f(x_n),f(y_n))\longrightarrow 0$ ולכן $f$ רציפה במ"ש ב$B$.

**הערה:**

פונקציה רציפה שומרת על קומפקטיות ועל קשירות, כלומר אם $f:(X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$ רציפה אזי אם $D\subseteq X$ קומפקטית אז $f(D)\subseteq Y$ גם כן קומפקטית ואם $A\subseteq X$ קשירה אז גם $f(A)\subseteq Y$ קשירה.

**משפט (ערך הביינים):**

יהי $E\subseteq X$ קבוצה קשירה, ותהי $f:E\longrightarrow\mathbb{R}$ רציפה, ויהיו $a,b\in E$ אזי לכל $t$ בין $f(a)$ ל$f(b)$ קיים $c\in E$ כך ש$f(c)=t$.

## נעבור לחישוב גבולות של פונקציות:

כבר כתבנו מה זה גבול של פונקציה בנקודה, נעשה דוגמאות של חישוב, כל הדוגמאות יהיו $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$.

**משפט:**

אם $\lim_{x\longrightarrow a}f\left(x\right)=L$ (כאשר $x,a\in\mathbb{R}^n$) אז לכל מסלול השואף ל$x$ נקבל בדיוק את אותו הגבול $L$.

**הערה:**

אם הגבול קיים אז לכל מסלול יהיה את אותו ערך.
אם ישנם שני מסלולים שונים עבורם מתקבלים ערכים שונים אז הגבול לא קיים. (המסלולים שבודקים תמיד זה $x=y,x=0,y=0$).

**דוגמה:**

בדקו האם הגבול $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{6x-5y}{2x-4y}$ קיים במידה חשבו אותו.

**פתרון:**

אין גבול, לאורך המסלול $y=0$ נקבל 3, ולאורך $x=0$ נקבל $\frac{5}{4}$ כלומר מצאנו שני מסלולים עם גבולות שונים ולכן אין גבול.

**הערה:**

איך בכל זאת מוכיחים שהגבול כן קיים, יש לנו המון משפטים:

- אריתמטיקה
- חסומה כפול שואפת ל0.
- הצבות כלשהן כדי להפוך את הבעיה לבעיה במשתנה יחיד.
- סנדוויץ.

- משפט: אם לאחר מעבר לפולריות כלומר לאחר $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$ מקבלים ש$f\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)=$ $F\left(r\right)\cdot G\left(\theta\right)$ כאשר $F\left(r\right)\overset{r\longrightarrow0}{\longrightarrow}0$ ו$G\left(\theta\right)$ חוסמה אזי $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}f\left(x,y\right)=0$.

**תרגילים:**

חשבו את $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}f\left(x,y\right)$ עבור הפונקציות הבאות:

1. $f\left(x,y\right)=\frac{x\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$
2. $f\left(x,y\right)=e^{-\frac{|x-y|}{x^2-2xy+y^2}}$
3. $f\left(x,y\right)=\frac{x^2}{|x|+|y|}\cos\left(\frac{1}{y^2}\right)$

**פתרונות לתרגילים:**

1. נשים לב כי $x \longrightarrow 0$ כאשר $(x,y) \longrightarrow (0,0)$, כמו כן נראה כי $\frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$ שואפת ל1 ונשתמש באריתמטיקה, נציב $t = x^2 + y^2$ ולכן:

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

ולכן לפי אריתמטיקה נקבל כי $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = 0 \cdot 1 = 0$.

2. נציב $t = |x-y|$ ומקבלים

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = \lim_{t\longrightarrow 0} e^{-\frac{|t|}{t^2}}$$

נבדוק גבולות חד צדדיים

$$\begin{cases} \lim_{t\longrightarrow 0^+} e^{-\frac{t}{t^2}} = \lim_{t\longrightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{t}} = 0 \\ \lim_{t\longrightarrow 0^-} e^{\frac{t}{t^2}} = \lim_{t\longrightarrow 0^-} e^{\frac{1}{t}} = 0 \end{cases}$$

קיבנלו ששני הגבולות החד צדדים קיימים ושווים ולכן הגבול קיים ושווה ל0.

3.

$$0 \le \left|\frac{x^2}{|x|+|y|}\cos\left(\frac{1}{y^2}\right)\right| \le \left|\frac{x^2}{|x|+|y|}\right| \le \frac{\left|x^2\right|}{||x|+|y||} \le \frac{|x|^2}{|x|} = |x| \longrightarrow 0$$

ולכן הגבול קיים ושווה ל0 לפי סנדוויץ.

## רציפות:

**תרגילים:**

בדקו היכן $f(x,y)$ רציפה עבור:

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

**פתרונות תרגילים:**

1. בכל נקודה שאינה $(0,0)$ הפונקציה היא מנה של פולינומים כאשר המכנה אינו מתאפס ולכן היא רציפה שמה. נבדוק מה קורה ב$(0,0)$:
נתבונן במסלולים $y = ax$, נקבל:

$$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x,ax) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2+x^3+a^3x^3}{x^2+a^2x^2} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1+\left(1+a^3\right)x}{1+a^2} = \frac{1}{1+a^2}$$

כלומר הגבול תלוי בערך של $a$ ועבור מסלולים שונים נקבל גבולות ולכן אין גבול ב$(0,0)$ ולכן היא לא רציפה שמה.

2. בכל נקודה שאינה $(0,0)$ הפונקציה היא מנה של פולינומים כאשר המכנה אינו מתאפס ולכן היא רציפה שמה. נבדוק מה קורה ב$(0,0)$:

$$\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}=\frac{x\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}=\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}=\frac{r\cos\theta\left(r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta\right)}{r^2}=\underbrace{r}_{F(r)}\cdot\underbrace{\cos\theta\cdot\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)}_{G(\theta)}$$

ברור כי $F(r)\xrightarrow{r\longrightarrow0}0$, כמו כן $G(\theta)$ חסומה כי $-1\le\sin\theta,\cos\theta\le1$ ולכן $-1\le\cos^2\theta-\sin^2\theta\le1$ ולכן $-1\le G(\theta)\le1$. ולכן קיבלנו שכל תנאי המשפט מתקיימים ולכן $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}f(x,y)=0$.
הערה: אפשר גם עם סנדוויץ:

$$0\le\left|\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}\right|\le\frac{\left|x^3\right|}{x^2+y^2}+\frac{\left|xy^2\right|}{x^2+y^2}\le\frac{\left|x^3\right|}{x^2}+\frac{\left|xy^2\right|}{y^2}=2\left|x\right|\longrightarrow0$$

ולכן הגבול ב$(0,0)$ הוא 0 והפונקציה רציפה כנדרש.

**תרגיל:**
נסתכל על הפונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

מה תחום הרציפות של הפונקציה?
**פתרון:**
בכל נקודה ב $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ יש סביבה בה היא אלמנטרית כי היא מנה של פולינומים, ולכן רציפה שמה ובפרט רציפה בנקודה.
נבדוק מה קורה ב$(0,0)$, נראה כי היא לא רציפה כי הגבול לא קיים:
ניקח שני מסלולים $y=0,y=x$, על המסלול $y=0$ נקבל:

$$f(x,0)=0\xrightarrow[x\longrightarrow0]{}0$$

ועל המסלול $y=x$ נקבל:

$$f(x,x)=\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}\xrightarrow[x\longrightarrow0]{}\frac{1}{2}$$

ולכן קיבלנו שני מסלולים עבורם יש גבולות שונים ולכן הגבול לא קיים.
כלומר סה"כ תחום הרציפות הוא $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

**הערה:**

אפשר להסתכל $y=mx$, ואז נקבל:

$$f(x,mx)=\frac{x\cdot mx}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2}\xrightarrow[x\longrightarrow0]{}\frac{m}{1+m^2}$$

כלומר לכל מסלול נקבל גבול אחר ולכן אין גבול.
**תרגיל:**
מצאו את:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

או הוכיחו שלא קיים.
**פתרון:**
נקרא לפונקציה $f(x,y)$, נשתמש במסלולים $y=0, y=x^2$, על המסלול $y=0$ נקבל:

$$f(x,0)=0 \xrightarrow[x\longrightarrow 0]{} 0$$

על המסלול $y=x^2$ נקבל:

$$f\left(x,x^2\right)=\frac{x^4}{2x^4}=\frac{1}{2} \xrightarrow[x\longrightarrow 0]{} \frac{1}{2}$$

כלומר קיבלנו גבולות שונים על פני מסלולים שונים ולכן אין גבול.

**הערה:**

נראה מה קורה אילו היינו מנסים להשתמש במסלולים ממקודם $y=mx$ עבור $m\neq 0$:

$$f(x,mx)=\frac{x^2\cdot mx}{x^4+m^2x^2}=\frac{mx}{x^2+m^2} \xrightarrow[x\longrightarrow 0]{} 0$$

כלומר זה שעל כל הישרים הגבול זהה לא אומר שיש גבול לפונקציה בנקודה.

**תזכורת קטנה:**

כמו שהגדרנו כדורים פתוחים וסגורים $B_r(a)=\{x|d(x,a)<r\}$. ניתן להגדיר תיבה פתוחה הנקודה $(a,b)$:

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\, |x-a|<\delta_1, |y-b|<\delta_2\right\}$$

ובדיוק כמו שמגדירים רציפות עם כדורים פתוחים אפשר גם להגדיר עם תיבות פתוחות.
**תרגיל:**
האם קיים הגבול של הפונקציה הבאה $f(x,y)=x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}$

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)$$

ואם כן למה הוא שווה.
**פתרון:**

ניזכר שהגבולות חוזרים (שלא להשתמש) הם:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\left(\lim_{y\longrightarrow 0} f\left(x,y\right)\right)=\lim_{x\longrightarrow 0}\left(\lim_{y\longrightarrow 0} x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)$$

והגבול הפנימי פה לא קיים כי הגבול $\lim_{y\longrightarrow 0}\sin\frac{1}{y}$ לא קיים. באותו אופן הגבול החוזר השני לא קיים.
אבל כן קיים גבול לפונקציה:
נראה שהגבול הוא 0 לפי הגדרה עם סביבות ריבועיות:
יהי $\varepsilon>0$, נרצה למצוא תיבה פתוחה $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| |x|<\delta_1,|y|<\delta_2\right\}$ כך שלכל נקודה בתיבה מתקיים $\left|f\left(x,y\right)\right|<\varepsilon$.
נבחר $\delta_1=\delta_2=\frac{\varepsilon}{2}$ ולכן לכל נקודה $(x,y)\in\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| |x|<\frac{\varepsilon}{2},|y|<\frac{\varepsilon}{2}\right\}$ מתקיים:

$$\left|f\left(x,y\right)\right|=\left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|\left|\sin\frac{1}{y}\right|+|y|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|+|y|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

ולכן $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f\left(x,y\right)=0$.

**הערה:**

ניתן לפתור גם לא דרך ההגדרה למשל עם שימוש בסנדוויץ:

$$0\le\left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|\left|\sin\frac{1}{y}\right|+|y|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|+|y|\xrightarrow[(x,y)\longrightarrow(0,0)]{}0$$

**תרגיל** (רציפות באמצעות סדרות):
מסתכלים על המרחב $C\left[0,1\right]$, מרחב כל הפונקציות הרציפות $f:\left[0,1\right]\longrightarrow\mathbb{R}$, עם מטריקת המקסימום כלומר:

$$d\left(f_1,f_2\right)=\max_{x\in[0,1]}\left|f_2\left(x\right)-f_1\left(x\right)\right|$$

א. תהי $a\in\left[0,1\right]$ מגדירים איזושהי פונקציה $F_a:C\left[0,1\right]\longrightarrow\mathbb{R}$ באופן הבא $F_a\left(f\right)=f\left(a\right)$.
הוכיחו שזו פונקציה רציפה.
**פתרון:**
רוצים להוכיח רציפות באמצעות סדרות כלומר אנחנו צריכים להוכיח שלכל $\left\{f_n\right\}_{n=1}^{\infty}\subseteq C\left[0,1\right]$ המתכנסות ל$f$ מתקיים:

$$F_a\left(f_n\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}F_a\left(f\right)$$

ניקח איזושהי סדרת פונקציות $\left\{f_n\right\}_{n=1}^{\infty}\subseteq C\left[0,1\right]$ המתכנסת $f$.
$F_a\left(g\right)=g\left(a\right)$ ולכן בעצם מה שצריך להוכיח זה ש$f_n\left(a\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}f\left(a\right)$. עבור $n$ קבוע מתקיים:

$$0 \leq |f_n(a) - f(a)| \leq \max_{x\in[0,1]} \{|f_n(x) - f(x)|\} = d(f_n, f)$$

כעת ידוע כי $f \xrightarrow[n\to\infty]{} f_n$, ולכן $0 \xrightarrow[n\to\infty]{} d(f_n, f)$ כלומר:

$$0 \leq |f_n(a) - f(a)| \leq d(f_n, f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ולפי סנדוויץ' קיבלנו $f_n(a) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$ כנדרש.

**תרגיל:**

הוכיחו כי הפונקציה $f(x,y) = \arcsin\frac{x}{y}$ רציפה בתחום $D = \{(x,y) \mid |x| \leq |y|, y \neq 0\}$ אבל לא רציפה שמה במ"ש.

**פתרון:**

נראה כי $f$ רציפה כי היא אלמנטרית, זו הרכבה של $\arcsin$ שהיא ההופכית של $\sin$, עם מנה בה המכנה שונה מאפס בכל תחום ההגדרה.

נראה כי $f$ אינה רציפה במ"ש תוך שימוש בהגדרה עם סדרות:

ניקח את הסדרות:

$$\begin{cases} a_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \\ b_n = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) \end{cases}$$

$(0,0) \xrightarrow[n\to\infty]{} a_n, b_n$, ולכן $d(a_n, b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

הערה: $\left\{ d(a_n, b_n) = \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)^2} \\ \|a_n - b_n\| = \left\|\left(0, \frac{2}{n}\right)\right\| \end{cases} = \frac{2}{n} \right\}$

$$\|a_n - b_n\| = \|a_n\| - \|b_n\|$$

$a_n = \frac{1}{n}, b_n = -\frac{1}{n}$. $\|a_n\| = \|b_n\| = \frac{1}{n}, \|a_n - b_n\| = \frac{2}{n}, \|a_n\| - \|b_n\| = 0$.

עד כאן הערה.

כעת:

$$\begin{cases} f(a_n) = \arcsin\left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \\ f(b_n) = \arcsin\left(\frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}}\right) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ולכן:

$$d(f(a_n), f(b_n)) = \left|\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right| = \pi \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ולכן $f$ אינה רציפה במ"ש כנדרש.

## נגזרות חלקיות

נרצה להכליל את מושג הנגזרת לפונקציות רבות משתנים, תזכורת:
במשתנה יחיד $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, הגדרנו את הנגזרת באופן הבא:

$$f'\left(x\right)=\frac{df}{dx}=\lim_{h\longrightarrow0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}$$

אם גבול זה קיים. מגדירים את הנגזרת לכל נקודה כלומר זו הגדרה נקודתית אבל אפשר לדבר על פונקציית הנגזרת.
בדיוק לפי הרעיון הזה מגדירים את הנגזרות החלקיות:
**הגדרה (נגזרות חלקיות):**
עבור פונקציה $f\left(x,y\right):\mathbb{R}^{2}\longrightarrow\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,y\right)=\lim_{\Delta x\longrightarrow0}\frac{f\left(x+\Delta x,y\right)-f\left(x,y\right)}{\Delta x}$$

באופן דומה:

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)=\lim_{\Delta y\longrightarrow0}\frac{f\left(x,y+\Delta y\right)-f\left(x,y\right)}{\Delta y}$$

**הערות:**

- גם הנגזרות החלקיות הן פונקציות של שני המשתנים, וגם שמה אפשר לדבר על גבולות ורציפות.
- אם לפונקציה "אין בעיות" אז אפשר פשוט לגזור לפי כללי גזירה.
- לפעמים במקום $\frac{\partial f}{\partial x}$ מסמנים $f_{x}$.

**דוגמה:**

$$f\left(x,y\right)=\arctan\left(x\cdot y\right)$$

תחום ההגדרה של הפונקציה הזו הוא כל המישור,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(xy\right)^{2}}\cdot y=\frac{y}{1+x^{2}y^{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{1+x^{2}y^{2}}\cdot x=\frac{x}{1+x^{2}y^{2}}$$

**הערה נוספת:**

רוצים הכללה של נגזרת במובן שמתקיימים אנלוגים למשפטים מאינפי 1 למשל גזירות גורר רציפות ולכן זה לא מספיק טוב.

**הגדרה:**

עבור $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, מגדירים את הנגזרת החלקית לפי $x_i$ להיות:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \longrightarrow 0} \frac{f\left(x_1, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n\right) - f\left(x_1, \ldots, x_n\right)}{\Delta x_i}$$

**הגדרה (גרדיאנט):**
הגרדיאנט שמסומן $\nabla f$ או $grad\left(f\right)$ הוא וקטור הנגזרות החלקיות, כלומר:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

**דוגמה:**

למשל בדוגמה הגרדיאנט הוא:

$$\nabla f = \left(\frac{x}{1 + x^2 y^2}, \frac{y}{1 + x^2 y^2}\right) \in \mathbb{R}^2$$

**דוגמה:**

חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בכל נקודה בה היא מוגדרת:

$$f\left(x, y, z\right) = \ln\left(x^3 + y^3 - z^3\right)$$

**פתרון:**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2}{x^3 + y^3 - z^3}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3y^2}{x^3 + y^3 - z^3}, \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-3z^2}{x^3 + y^3 - z^3}$$

הגרדיאנט יהיה:

$$\nabla f = \frac{1}{x^3 + y^3 - z^3}\left(3x^2, 3y^2, -3z^2\right)$$

**תרגיל:**

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^2y}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

חשבו את הנגזרות החלקיות בכל נקודה, וקבעו היכן הן רציפות.

**פתרון:**

רוצים לחשב את הנגזרות החלקיות $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$, בכל נקודה שאינה $(0,0)$ נגזור לפי כללי גזירה:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right)=\frac{4xy\cdot\left(x^2+y^2\right)-2x^2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{\cancel{4x^3y}+4xy^3-\cancel{4x^3y}}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{4xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right)=\frac{2x^2\cdot\left(x^2+y^2\right)-2x^2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2x^4+2x^2y^2-4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2x^4-2x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

ב$(0,0)$ נבדוק את קיום הנגזרת לפי הגדרה:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)&=\lim_{\Delta x\longrightarrow 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\longrightarrow 0}\frac{0}{\Delta x}\\&=0\end{aligned}$$

כלומר הנגזרת החלקית לפי איקס בנקודה $(0,0)$ קיימת ושווה ל0.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)&=\lim_{\Delta y\longrightarrow 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}\\&=\lim_{\Delta y\longrightarrow 0}\frac{0}{\Delta y}\\&=0\end{aligned}$$

כלומר סה"כ $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. כלומר:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^4-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

במקרה זה הגרדיאנט יהיה:

$$\nabla f=\begin{cases}\left(\frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2},\frac{2x^4-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) & (x,y)\neq(0,0)\\ (0,0) & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

נעבור לבדוק רציפות:

בכל נקודה $(x,y)$ שאינה $(0,0)$ הנגזרות החלקיות $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ הן מנה של פולינומים בה המכנה לא מתאפס ולכן רציף.
נבדוק כל אחת מנהגזרות החלקיות בנפרד ב$(0,0)$:
$\frac{\partial f}{\partial x}$:
אינה רציפה ב$(0,0)$ למשל עבור המסלול $y=2x$:
בודקים שאיפה ולכן כל הנקודות שונות מ$(0,0)$ ולכן ניתן להציב לפי המקרה של בו $(x,y)\neq(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,2x)=\frac{4\cdot x\cdot 8x^3}{\left(x^2+4x^2\right)^2}=\frac{32x^4}{\left(5x^2\right)^2}=\frac{32x^4}{25x^4}=\frac{32}{25}\not\xrightarrow[x\longrightarrow 0]{}0$$

ולכן $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0\not\xrightarrow[(x,y)\longrightarrow(0,0)]{}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ולכן היא לא רציפה שמה.
$\frac{\partial f}{\partial y}$:
אינה רציפה ב$(0,0)$, למשל אפשר לקחת את המסלול $y=0$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=\frac{2x^4}{\left(x^2\right)^2}=2\not\xrightarrow[x\longrightarrow 0]{}0$$

**הגדרה** (דיפראנציאביליות - דיפ') (בשני משתנים):
תהי $f(x,y):\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, נאמר כי $f$ דיפ' בנקודה $(x_0,y_0)$ אם מתקיים:

$$f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)=f\left(x_0,y_0\right)+A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+\alpha\left(\Delta x,\Delta y\right)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

כאשר $A,B$ קבועים, ומתקיים ש$\alpha\left(\Delta x,\Delta,y\right)\xrightarrow[(\Delta x,\Delta y)\longrightarrow(0,0)]{}0$.

**הערה:**

- אם פונקציה היא דיפ' אז $A=\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right),B=\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)$.
- במשתנה יחיד הגדרנו

$$f'(x)=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

וזה שקול להגדיר ש$f$ גזירה בנקודה $x_0$ (במשתנה אחד) אם ורק אם מתקיים:

$$f\left(x_0+\Delta x\right)=f\left(x_0\right)+A\cdot\Delta x+\alpha\left(\Delta x\right)\cdot\Delta x$$

כאשר $\alpha\left(\Delta x\right)\xrightarrow[\Delta x\longrightarrow 0]{}0$, ואם $f$ גזירה, אז הקבוע $A$ הזה הוא בדיוק הנגזרת כלומר $A=f'\left(x_0\right)$.

**משפט:**
$f(x)$ גזירה אם ורק אם מתקיים $f\left(x_0+\Delta x\right)=f\left(x_0\right)+A\cdot\Delta x+\alpha\left(\Delta x\right)\cdot\Delta x$ כאשר $\alpha\left(\Delta x\right)\xrightarrow[\Delta x\longrightarrow 0]{}0$,ובמקרה זה, הקבוע $A$ הזה הוא בדיוק הנגזרת כלומר $A=f'\left(x_0\right)$.

**הוכחה:**

$\Rightarrow$:

נניח כי $f$ מקיימת את התנאי, ונוכיח שהיא גזירה. נסתכל על הגבול בהגדרת הנגזרת:

$$f'(x_0)=\lim_{h\longrightarrow0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

כעת ניתן להציב את הנתום מהתנאי ולקבל:

$$=\lim_{h\longrightarrow0}\frac{A\cdot h+\alpha(h)\cdot h}{h}=\lim_{h\longrightarrow0}A+\alpha(h)\overset{*}{=}A$$

*כי ידוע ש$\alpha(h)\xrightarrow[h\longrightarrow0]{}0$. וכאן גם קיבלנו שבדיוק $A=f'(x_0)$.

$\Leftarrow$:

נניח כי $f$ גזירה ונראה כי היא מקיימת את התנאי. $f$ גזירה ב$x_0$ ולכן הגבול $f'(x_0)=\lim_{h\longrightarrow0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ קיים, נעביר את הנגזרת אגף ונקבל:

$$\lim_{h\longrightarrow0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)=0$$

$$\lim_{h\longrightarrow0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)}{h}=0$$

נגדיר

$$\alpha(h):=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)}{h}$$

הראנו כי $\alpha(h)\xrightarrow[h\longrightarrow0]{}0$, ובנוסף נקבל כי

$$f(x_0+h)-f(x_0)-h\cdot f'(x_0)=h\cdot\alpha(h)$$

נעביר אגפים ונקבל בדיוק את התנאי:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+h\cdot f'(x_0)+h\cdot\alpha(h)$$

$\blacksquare$

**משפט:**

אם פונקציה $f(x,y)$ דיפ' בנקודה $(x_0,y_0)$ אזי קיימות לה הנגזרות החלקיות בנקודה זו.
(כלומר אם לא קיימות הנגזרות החלקיות אז $f$ אינה דיפ').

**משפט:**

אם פונקציה$f(x,y)$ דיפ' בנקודה $(x_0,y_0)$ אזי היא רציפה בנקודה זו. (כלומר אם היא לא רציפה בנקודה אז היא לא דיפ' בנקודה זו).

**משפט:**

אם לפונקציה $f(x,y)$ קיימות נגזרות חלקיות $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ בסביבת הנקודה $(x_0,y_0)$ והן **רציפות** בנקודה $(x_0,y_0)$ אזי $f(x,y)$ דיפ' בנקודה זו.
איך בודקים אם פונקציה היא דיפ':

1. מחשבים נגזרות חלקיות, אם לא קיימות אז לא דיפ'.
2. בודקים אם הפונקציה רציפה, אם לא רציפה אז לא דיפ'.
3. בודקים האם הנגזרות החלקיות רציפות, אם כן אז היא דיפ'.
4. צריך לבדוק לפי הגדרה, הדרך לעשות את זה היא לבדוק האם הגבול הבא יוצא 0:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)-A\cdot\Delta x-B\cdot\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

אם כן היא דיפ' אם לא היא לא דיפ'.

**תרגיל:**
נסתכל על הפונקציה:

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

מצאו את כל הנקודות בהן $f$ דיפ'.
**פתרון:**
נתחיל מלבדוק נקודות $(x,y)$ שאינן $(0,0)$:
נחשב את הנ"ח (= נגזרות חלקיות), מדובר בנקודות שאינן $(0,0)$ ולכן אפשר לגזור לפי כללי גזירה:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,y\right)=\frac{3x^2\cdot\left(x^2+y^2\right)-\left(x^3+y^4\right)\cdot2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{3x^4+3x^2y^2-2x^4-2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^4+3x^2y^2-2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)=\frac{4y^3\left(x^2+y^2\right)-\left(x^3+y^4\right)\cdot2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{4x^2y^3+4y^5-2yx^3-2y^5}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2y^5+4x^2y^3-2yx^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

בגלל שמסתכלים על נקודות שאינן $(0,0)$ הנגזרות החלקיות הן רציפות כמנה של פולינומים בהן המכנה לא מתאפס.
ולכן לפי משפט בכל נקודה $(x_0,y_0)\neq(0,0)$, מתקיים $f\left(x,y\right)$ דיפ' בנקודה $(x_0,y_0)$.
נבדוק מה קורה ב$(0,0)$:
נחשב נ"ח:
בנקודות שאינן $(0,0)$ מצאו כבר את הנ"ח, נמצא את הנ"ח בנקודה $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,0\right)=\lim_{\Delta x\longrightarrow0}\frac{f\left(\Delta x,0\right)-f\left(0,0\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\longrightarrow0}\frac{\frac{\Delta x^3}{\Delta x^2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\longrightarrow0}1=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,0\right)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f\left(0,\Delta y\right)-f\left(0,0\right)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to0}\frac{\Delta y^2}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to0}\Delta y=0$$

נבדוק האם $f$ רציפה ב$(0,0)$:
כלומר צריך לבדוק האם $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$, נבדוק מה קורה על המסלול $x=y$:

$$f(x,x) = \frac{x^3+x^4}{2x^2} = \frac{1}{2}\left(x+x^2\right) \xrightarrow[x\longrightarrow 0]{} 0$$

על המסלול $y=x^2$:

$$f\left(x,x^2\right) = \frac{x^3+x^8}{x^2+x^4} = \frac{x+x^6}{1+x^2}$$

ראינו כה מסלולים שכולם כן שואפים ל0 ולכן אינטואיטיבית זה הוכחה.
ננסה להשתמש בפולריות:
נציב $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$:

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^3\cos^3\theta + r^4\sin^4\theta}{r^2} = r\cos^3\theta + r^2\sin^4\theta$$

וזה לא מתפרק יפה ל$F(r)$ השואפת ל0 כש$r$ שואף ל0, ו$G(\theta)$ חסומה, ולכן זה לא עוזר לנו.

$$x^2+y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2$$

$$\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} = \frac{x^3}{x^2+y^2} + \frac{y^4}{x^2+y^2}$$

ונראה שכל אחת מהפונקציות בצד ימין שואפות ל0 ולכן גם סכומן:

$$0 \le \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{\left|x^3\right|}{\left|x^2+y^2\right|} \le \frac{\left|x^3\right|}{\left|x^2\right|} = |x| \xrightarrow[x\longrightarrow 0]{} 0$$

ולכן לפי סנדוויץ הפונקציה $\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|$ שואפת ל0 כאשר $(x,y)\longrightarrow(0,0)$. (יש משפט האומר ש $f\longrightarrow 0$ אם ורק אם $|f|\longrightarrow 0$.)
באופן דומה עבור הפונקציה השנייה:

$$0 \le \frac{y^4}{x^2+y^2} = \frac{y^4}{x^2+y^2} \le \frac{y^4}{y^2} = y^2 \xrightarrow[y\longrightarrow 0]{} 0$$

סה"כ הוכחנו שהפונקציה $f$ רציפה.
נבדוק האם הנגזרות החלקיות רציפות כלומר האם:

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{x^4+3x^2y^2-2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}=1,\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{2y^5+4x^2y^3-2yx^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{x^4+3x^2y^2-2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (0,0)\end{cases},\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\frac{2y^5+4x^2y^3-2yx^3}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (0,0)\end{cases}$$

נראה כי הנגזרת החלקית $\frac{\partial f}{\partial x}$ אינה רציפה, למשל לפי המסלול $x=0$ מתקיים:

$$f(0,y)=0\xrightarrow[y\longrightarrow0]{}0\neq1$$

ולכן $\frac{\partial f}{\partial x}$ אינה רציפה בנקודה $(0,0)$.
לכן חייבים ללכת להגדרה של דיפ':
נסתכל על הגבול מההגדרה (לשם נוחות נחליף סימן במקום $\Delta x$ נכתוב $h_1$, ובמקום $\Delta y$ נכתוב $h_2$):

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0,y_0)-A\cdot h_1-B\cdot h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

נציב

$$A=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1,B=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

$$x_0=y_0=0,f(x_0+h_1,y_0+h_2)=f(h_1,h_2)$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)}\frac{\frac{h_1^3+h_2^4}{h_1^2+h_2^2}-0-1\cdot h_1-0\cdot h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\lim_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)}\frac{\frac{h_1^3+h_2^4}{h_1^2+h_2^2}-h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

נסדר קצת את הביטוי:

$$=\lim_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)}\frac{\frac{h_1^3+h_2^4-h_1^3-h_1h_2^2}{h_1^2+h_2^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\lim_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)}\frac{h_2^4-h_1h_2^2}{\left(h_1^2+h_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

נראה כי הגבול הזה אינו 0, נסתכל על המסלול $h_1=h_2$:

$$\frac{h_1^4-h_1^3}{\left(2h_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{h_1^3(h_1-1)}{2^{\frac{3}{2}}\cdot h_1^3}=\frac{h_1-1}{2^{\frac{3}{2}}}\xrightarrow[h_1\longrightarrow0]{}0$$

ולכן הגבול הוא אינו 0, והפונקציה אינה דיפ'.

## נגזרות מכוונות

הרעיון שעד הגדרנו שתי נגזרות חלקיות $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$ כלומר איפשרנו תזוזה רק ב$x$ או ב$y$, כעת נראה להגדיר את השאיפה לנקודה מכל וקטור.

**הגדרה:**

תהי $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, ויהי $h=(h_1,\ldots,h_n)\in\mathbb{R}^n$ **וקטור יחידה** מגדרים את הנגזרת המכוונת של $f$ לפי $h$ בנקודה $a=(a_1,\ldots,a_n)$ להיות:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a_1,\ldots,a_n)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(a_1+th_1,\ldots,a_n+th_n)-f(a_1,\ldots,a_n)}{t}$$

אם הגבול קיים.

**הערה:**

נכתוב את ההגדרה בשני משתנים:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x_0,y_0)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(x_0+th_1,y_0+th_2)-f(x_0,y_0)}{t}$$

אם הגבול קיים.
נשים לב כי עבור $h=e_1=(1,0)$ מקבלים בדיוק את $\frac{\partial f}{\partial x}$, ועבור $h=(0,1)$ מקבלים בדיוק את $\frac{\partial f}{\partial y}$.
**משפט:**
אם $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ דיפ' בנקודה $a$, אזי לכל וקטור יחידה $u$,

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a)=\nabla f(a)\cdot u$$

**דוגמה:**

נסתכל על הפונקציה $f(x,y)=\sqrt[3]{xy^2}$, עבור וקטור יחידה $u=(u_1,u_2)$ ($u_1^2+u_2^2=1$), נחשב לפי הגדרה את הנגזרת החלקית לפי $u$ בנקודה $(0,0)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)&=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(tu_1,tu_2)-f(0,0)}{t}\\&=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\sqrt[3]{tu_1\cdot t^2u_2^2}}{t}\\&=\lim_{t\longrightarrow 0}\sqrt[3]{u_1u_2^2}\\&=\sqrt[3]{u_1u_2^2}\end{aligned}$$

לפי ההערה ממקודם ניתן למצוא את הנגזרות החלקיות:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,0\right)=\sqrt[3]{1\cdot0^{2}}=0,\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,0\right)=\sqrt[3]{0\cdot1^{2}}=0$$

כלומר $\nabla f\left(0,0\right)=\left(0,0\right)$ ולכן

$$\nabla f\left(0,0\right)\cdot u=\left(0,0\right)\neq\frac{\partial f}{\partial u}\left(0,0\right),\forall u\neq\left(1,0\right),\left(0,1\right)$$

כלומר מסקנת המשפט לא מתקיימת ולכן הפונקציה אינה דיפ', נוכיח ישירות שהפונקציה לא דיפ':
נסתכל על הגבול

$$\lim_{\left(\Delta x,\Delta y\right)\to\left(0,0\right)}\frac{f\left(x_{0}+\Delta x,y_{0}+\Delta y\right)-f\left(x_{0},y_{0}\right)-A\cdot\Delta x-B\cdot\Delta y}{\sqrt{\Delta x^{2}+\Delta y^{2}}}$$

הנגזרות החלקיות מתאפסות ולכן $A=B=0$, כמו כן $f\left(0,0\right)=0$, ולכן הגבול שצריך לחשב הוא (כאשר נחליף סימונים לשם הנוחות):

$$\lim_{\left(x,y\right)\longrightarrow\left(0,0\right)}\frac{f\left(x,y\right)}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}=\lim_{\left(x,y\right)\longrightarrow\left(0,0\right)}\frac{\sqrt[3]{xy^{2}}}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}$$

נעבור לפולריות $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$ ונקבל:

$$\frac{\sqrt[3]{xy^{2}}}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}=\frac{\sqrt[3]{r\cos\theta r^{2}\sin^{2}\theta}}{r}=\sqrt[3]{\cos\theta\sin^{2}\theta}$$

כלומר עבור $\theta$ שונות נקבל גבול שונה ולכן אין גבול ופרט הוא לא 0, ולכן הפונקציה לא דיפ'.

**תזכורת אי שיוויון קושי שוורץ:**

עבור $u,v\in\mathbb{R}^{n}$ מתקיים:

$$\left|\left\langle u,v\right\rangle \right|\leq\left\Vert u\right\Vert \cdot\left\Vert v\right\Vert$$

**תרגיל:**

הוכיחו כי עבור פונקציה דיפ' הנגזרת הכיוונית היא מקסימלית בכיוון הגרדיאנט.

**פתרון:**

לכל וקטור יחידה $u$ נקבל לפי אי שיוויון קושי שוורץ כי מתקיים:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u}(a)\right| = |\nabla f(a) \cdot u| \leq \|\nabla f(a)\| \cdot \|u\| = \|\nabla f(a)\|$$

ועבור $u = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$, הנגזרת המכוונות בכיוון $u$ היא:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = \nabla f(a) \cdot u = \nabla f(a) \cdot \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|} = \|\nabla f(a)\|$$

כלומר הנגזרת הכיוונית היא לכל היותר $\|\nabla f(a)\|$ וזו מתקבלת בכיוון הגרדיאנט ולכן בכיוון הגרדיאנט הנגזרת הכיוונית מקסימלית.

## מישור משיק

תזכורת:

עבור המישור $ax+by+cz+d=0$ נורמל למישור הוא $(a,b,c)$ (וכל מכפלה שלו בסקלר שונה מ0).

**הגדרה (מישור משיק):**

עבור משטח ב$\mathbb{R}^3$ שנתון על ידי המשוואה $f(x,y,z)=0$. ועבור נקודה $p_0=(x_0,y_0,z_0)$ על המשטח, שקיימת לה סביבה בה $f$ גזירה ברציפות (= נגזרות חלקיות רציפות). מגדירים את המישור המשיק למשטח זה בנקודה $p_0$ להיות המישור המוגדר לפי המשוואה הבאה:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)\cdot(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(p_0)\cdot(z-z_0) = 0$$

נורמל למישור הזה יהיה $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0), \frac{\partial f}{\partial z}(p_0)\right)$, כלומר $\overrightarrow{n} = \nabla f(p_0)$.

**תרגיל:**

מצאו נורמל למישור המשיק למשטח $f(x,y,z)=0$ ($f(x,y,z)=e^{x+y^2}\cdot\arctan(z)$) בנקודה $(1,4,6)$.

**פתרון:**

ידוע כי $\overrightarrow{n} = \nabla f((1,4,6))$, נמצא את הגרדיאנט:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y^2}\arctan(z), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{x+y^2}\cdot\arctan(z) \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = e^{x+y^2}\cdot\frac{1}{1+z^2}$$

נציב ונקבל:

$$\begin{aligned}\nabla f(1,4,6) &= e^{17}\left(\arctan(6), 8\cdot\arctan(6), \frac{1}{1+36}\right)\\ &= e^{17}\left(\arctan(6), 8\cdot\arctan(6), \frac{1}{37}\right)\end{aligned}$$

וזהו נורמל למישור המשיק בנקודה $(1,4,6)$.

**תרגיל:**

מצאו נקודה על חצי ספירת היחידה העליונה (ספירת היחידה זה קבוצת כל הנקודות בהן $x^2+y^2+z^2=1$, החצי העליון זה כאשר $z>0$) בה המישור המשיק יהיה מקביל למישור $x+2y+z=0$.

**פתרון:**

ידוע כי שני מישורים הם מקבילים אם ורק אם הנורמלים שלהם תלויים לינארית, הנורמל למישור $x+2y+z=0$ הוא $(1,2,1)$.
עבור נקודה על חצי ספירת היחידה העליונה $(x_0,y_0,z_0)$ מתקיים $z_0>0, x_0^2+y_0^2+z_0^2=1$, כלומר המשטח מוגדר על ידי $F(x,y,z)=0$ עבור $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$. יודעים כי הנורמל למישור המשיק הוא הגרידאנט בנקודה נחשב את הגרדיאנט:

$$\nabla F=(2x_0,2y_0,2z_0)$$

ולכן נרצה ש

$$(2x_0,2y_0,2z_0)=t\,(1,2,1)$$

ניזכר כי $z_0=\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}$, ולכן קיבלנו את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases}2\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}=t\\ 2y_0=2t\\ 2x_0=t\end{cases}$$

לכן $y_0=t, x_0=\frac{t}{2}$ נציב במשוואה הראשונה ונקבל:

$$2\sqrt{1-\frac{t^2}{4}-t^2}=t$$

$$\sqrt{1-\frac{5t^2}{4}}=\frac{t}{2}$$

$$1-\frac{5t^2}{4}=\frac{t^2}{4}\Rightarrow\frac{3}{2}t^2=1\Rightarrow t^2=\frac{2}{3}\Rightarrow t=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

ידוע כי $z_0=\frac{t}{2}$ ולכן נפסול את $-\sqrt{\frac{2}{3}}$, ונקבל כי $t=\sqrt{\frac{2}{3}}$ כלומר:

$$\begin{cases}x_0=\frac{t}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\\ y_0=t=\sqrt{\frac{2}{3}}\\ z_0=x_0=\frac{t}{2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\end{cases}$$

כלומר בנקודה $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ הנמצאת על חצי ספירת היחידה העליונה נקבל כי המישור המשיק מקביל למישור $x+2y+z$.

**תרגיל:**

מצאו נקודה על חצי חרוט עליון שמשוואתו $z=\sqrt{x^2+y^2}$, כך שהמישור המשיק בנקודה זו מקביל למישור $3x+4y+5z=0$.

**פתרון:**

הנורמל של המישור הנתון $(3,4,5)$ וניזכר ששני מישורים הם מקבילים אם ורק אם הנורמלים שלהם תלויים לינארית.
$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}-z$, ואז המשטח הוא $f(x,y,z)=0$. ולכן בכל נקודה $(x_0,y_0,z_0)$ הנורמל של המישור המשיק יהיה:

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0)=\left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}},\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}},-1\right)$$

כעת נרצה לבדוק עבור אילו נקודות

$$\left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}},\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}},-1\right)=t\cdot(3,4,5)$$

מהמשוואה השלישית נקבל מיד כי $t=-\frac{1}{5}$. ונשארנו עם מערכת המשוואות:

$$\begin{cases}\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=-\frac{3}{5}\\ \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=-\frac{4}{5}\end{cases}\quad\Rightarrow\frac{x_0}{y_0}=\frac{\frac{-3}{5}}{\frac{-4}{5}}=\frac{3}{4}\Rightarrow x_0=\frac{3}{4}y_0$$

את הקשר $x_0=\frac{3}{4}y_0$, נציב חזרה במשוואה השנייה:

$$\frac{y_0}{\sqrt{\frac{9}{16}y_0^2+y_0^2}}=-\frac{4}{5}$$

$$\sqrt{\frac{9}{16}y_0^2+y_0^2}=\sqrt{\frac{25}{16}y_0^2}=\frac{5}{4}|y_0|$$

כלומר:

$$\frac{y_0}{\frac{5}{4}|y_0|}=-\frac{4}{5}\Rightarrow y_0=-|y_0|\Rightarrow y_0=-1$$

נציב ונקבל $x_0=-\frac{3}{4}$, נציב במשוואת החרוט ונקבל:

$$z=\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{9+16}{16}}=\frac{5}{4}$$

כלומר בנקודה $\left(-\frac{3}{4},-1,\frac{5}{4}\right)$ המישור המשיק יהיה מקביל למישור $3x+4y+5z=0$.

## נגזרות מסדר גבוה

רעיונית $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ אלו גם פונקציה של שני משתנים וגם אותן ניתן לגזור.

**הגדרה:**

$$f_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}:=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad f_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}:=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad f_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

**הגדרה:**

נגיד ש$f\in C^2$ בסביבה של נקודה $a$, אם קיימת סביבה של $a$ עבורה כל הנגזרות החלקיות מסדר שני של $f$ רציפות בסביבה.

**משפט:**

אם $f\in C^2$ אזי המעורבות מתחלפות כלומר:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

הערה - אני כתבתי עבור 2 משתנים, אבל זה נכון גם עבור $n$ משתנים.

**דוגמה:**

נסתכל על הפונקציה $f\left(x,y,z\right)=\arctan\left(e^z\right)+\sin\left(xy\right)$, נחשב את כל הנגזרת מסדר שני שלה.
נתחיל מחלשב את הנגזרות החלקיות, בכל נקודה אפשר לגזור לפי כללי גזירה ונקבל:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\cdot\cos\left(xy\right),\frac{\partial f}{\partial y}=x\cdot\cos\left(xy\right),\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{e^z}{1+e^{2z}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-y^2\sin\left(xy\right),\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\cos\left(xy\right)+y\cdot\left(-\sin\left(xy\right)\cdot x\right)=\cos\left(xy\right)-xy\sin\left(xy\right),\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\cos\left(xy\right)-xy\sin\left(xy\right),\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-x^2\sin\left(xy\right),\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}=0, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{e^z\left(1+e^{2z}\right)-e^z\left(2e^{2z}\right)}{\left(1+e^{2z}\right)^2}=\frac{e^z\left(1-e^{2z}\right)}{\left(1+e^{2z}\right)^2}$$

ובאמת ניתן לראות שכל הנגזרות המעורבות שוות.

## דיפראנציאלים

הרעיון ־ רוצים לכמת את כמה שינוי אינפיניטיסימלי בערך הנקודה ישנה את ערך הפונקציה.
במשתנה יחיד

$$f\left(x+h\right)-f\left(x\right)\approx f'\left(x\right)\cdot h$$

בעצם מכאן אפשר לראות שבכמה משתנים הנגזרות החלקיות יבטאו לנו את השינוי הרצוי עבור תזוזה ברכיב מסויים.

**הגדרה (דיפראנציאל של פונקציה סקלרית):**

עבור פונקציה $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ דיפ', ועבור $x=\left(x_1,\ldots,x_n\right), h=\left(h_1,\ldots,h_n\right)\in\mathbb{R}^n$, מגדירים את הדיפראנציאל של $f$ שיסומן $df$, להיות:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x\right)\cdot h_i=\nabla f\left(x\right)\cdot h$$

**הערה:**

מה נעשה עבור $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$? תשובה: ניתן לכתוב את $f$ בצורה הבאה:

$$f=\left(f_1,\ldots,f_m\right)$$

כאשר $f_i:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$. ידוע לפי משפט כי $f$ דיפ' אם ורק אם כל ה$f_i$ דיפ'.

**הגדרה (מטריצת יעקובי):**

עבור $f=\left(f_1,\ldots,f_m\right):\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ מגדירים את מטריצת יעקובי באופן הבא:

$$J_f\left(a\right)=J_a\left(f\right)=D_a\left(f\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

בעצם במקום $i,j$ יש את הנגזרת $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

**הגדרה (דיפראנציאל של פונקציה וקטורית):**

אם $f=\left(f_1,\ldots,f_m\right):\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ דיפ' אזי הדיפראנציאל של $f$ בנקודה $a$ הוא:

$$df_a\left(h\right)=\frac{\partial f}{\partial h}\left(a\right)=\underbrace{J_f\left(a\right)}_{m\times n}\cdot\underbrace{h}_{n\times 1}$$

**הערה חשובה:**

דיפראנציאל הוא העתקה הוא מקבל וקטור $h \in \mathbb{R}^n$ ועבור פונקציה סקלרית מחזיר סקלר (כמו הפונקציה) ועבור פונקציה וקטורית מחזיר וקטור באותו אורך שהפונקציה מחזירה (כלומר אם $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ אז הדיפראנציאל גם יהיה $df_a(h) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$).

## כלל השרשרת

תזכורת למשתנה יחיד, עבור משתנה יחיד (בלי כל תנאי המשפט אלא רק הנוסחה) מתקיים:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

נכתוב קודם עבור שני משתנים:

**משפט (כלל השרשרת עבור פונקציה בשני משתנים):**

יהיו $x(u,v), y(u,v)$ פונקציות דיפ' מסתכלים על הפונקציה $f(x,y) = f(x(u,v), y(u,v))$.
נרצה למצוא את הנגזרות שלה לפי $u$ ולפי $v$:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0)) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0)) \cdot \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0)) \cdot \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0)) \cdot \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)$$

ניתן לסמן $x_0 = x(u_0,v_0), y_0 = y(u_0,v_0)$ ואז הנוסחאות נראות טיפה יותר נחמד:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \cdot \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \cdot \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \cdot \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)$$

**דוגמה:**

$x(u,v) = e^{u+v}, y(u,v) = u^2 + v^2$, $f(x,y) = \frac{x}{y}$, נרצה למצוא את הנגזרות החלקיות $\frac{\partial f}{\partial u}(3,5), \frac{\partial f}{\partial v}(3,5)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}, \frac{\partial x}{\partial u} = e^{u+v}, \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}, \frac{\partial y}{\partial u} = 2u, \frac{\partial x}{\partial v} = e^{u+v}, \frac{\partial y}{\partial v} = 2v$$

$$x(3,5) = e^8, y(3,5) = 3^2 + 5^2 = 34 \Rightarrow (x_0,y_0) = \left(e^8, 34\right)$$

כל הפונקציות גזירות ברציפות בסביבת $(3,5)$ ולכן ניתן להשתמש בכלל השרשרת:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(3,5)=\frac{1}{34}\cdot e^{8}-\frac{e^{8}}{34^{2}}\cdot 6=e^{8}\cdot\frac{7}{289}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(3,5)=\frac{1}{34}\cdot e^{8}-\frac{e^{8}}{34^{2}}\cdot 10=e^{8}\cdot\frac{6}{289}$$

נוודא על ידי הצבה

$$f(u,v)=\frac{e^{u+v}}{u^{2}+v^{2}}$$

בסביבת הנקודה $(3,5)$ הנגזרות החלקיות רציפות נחשב את הנגזרת החלקיות:

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{e^{u+v}\cdot\left(u^{2}+v^{2}\right)-e^{u+v}\cdot(2u)}{\left(u^{2}+v^{2}\right)^{2}}=\frac{e^{u+v}\left(u^{2}-2u+v^{2}\right)}{\left(u^{2}+v^{2}\right)^{2}}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial u}(3,5)=e^{8}\cdot\frac{28}{1156}=e^{8}\cdot\frac{7}{289}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{e^{u+v}\cdot\left(u^{2}+v^{2}\right)-e^{u+v}\cdot(2v)}{\left(u^{2}+v^{2}\right)^{2}}=\frac{e^{u+v}\left(u^{2}-2v+v^{2}\right)}{\left(u^{2}+v^{2}\right)^{2}}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial u}(3,5)=e^{8}\cdot\frac{24}{1156}=e^{8}\cdot\frac{6}{289}$$

כלומר באמת קיבלנו את אותן נגזרות גם על ידי הצבה וגם על ידי כלל השרשרת.
**משפט כלל השרשרת (עבור פונקציה סקלרת כללית):**
עבור פונקציה סקלרית $f:\mathbb{R}^{n}\longrightarrow\mathbb{R}$ כאשר כל משתנה $x_i$ הוא של $(u_1,\ldots,u_m)$ כלומר לכל $i$ מתקיים $x_i:\mathbb{R}^{m}\longrightarrow\mathbb{R}$ וכל ה$x_i$ דיפ' ב$u^{0}=\left(u_1^{0},\ldots,u_m^{0}\right)$ ו$f$ דיפ' בנקודה $x^{0}=\left(x_1^{0},\ldots,x_n^{0}\right)$ כאשר $x_i^{0}=x_i\left(u^{0}\right)$. כלומר $f=f\left(x_1\left(u_1,\ldots,u_m\right),\ldots,x_n\left(u_1,\ldots,u_m\right)\right)$.
אזי מתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial u_i}\left(u_1^{0},\ldots,u_m^{0}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(x_1^{0},\ldots,x_n^{0}\right)\cdot\frac{\partial x_k}{\partial u_i}\left(u_1^{0},\ldots,u_m^{0}\right)$$

הערה - אם נכתוב בלי לכתוב באילו נקודות מציבים את הנגזרות הנוסחה נראית יותר יפה ומקבלים:

$$\frac{\partial f}{\partial u_i}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial u_i}$$

**משפט כלל השרשרת (עבור פונקציה וקטורית):**
תהי $g:\mathbb{R}^{n}\longrightarrow\mathbb{R}^{k}$ פונקציה דיפ' בנקודה $a\in\mathbb{R}^{n}$ ו$f:\mathbb{R}^{k}\longrightarrow\mathbb{R}^{m}$ דיפ' בנקודה $g(a)\in\mathbb{R}^{k}$ אזי:

$$\underbrace{J_a\left(f\circ g\right)}_{m\times n}=\underbrace{J_{g(a)}\left(f\right)}_{m\times k}\cdot\underbrace{J_a\left(g\right)}_{k\times n}$$

**דוגמה:**

מצאו את $(1,1)$ $\frac{\partial(\phi\circ f)}{\partial h}$ עבור $h=\left(3,\frac{1}{2}\right)$, ועבור

$$f\left(x,y\right)=\left(x^2+xy+1,y^2+2\right),\phi\left(u,v\right)=\left(u+v,2u,v^2\right)$$

**פתרון:**

כל הפונקציות הן פולינומים ולכן גזירות ברציפות איפה שנרצה ותנאי כלל השרשרת מתקיימים.

$$J\left(f\right)=\begin{pmatrix}2x+y & x\\ 0 & 2y\end{pmatrix},J\left(\phi\right)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & 2v\end{pmatrix}$$

.$a=\left(1,1\right),f\left(a\right)=\left(3,3\right)$

$$J_{f(a)}\left(\phi\right)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix},J_a\left(f\right)=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

ולכן

$$J_a\left(\phi\circ f\right)=J_{f(a)}\left(\phi\right)\cdot J_a\left(f\right)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 6 & 2\\ 0 & 12\end{pmatrix}$$

עבור פונקציה וקטורית דיפ' מתקיים:

$$\frac{\partial\left(\phi\circ f\right)}{\partial h}\left(a\right)=J_a\left(\phi\circ f\right)\cdot h$$

נציב ונקבל:

$$\frac{\partial\left(\phi\circ f\right)}{\partial h}\left(1,1\right)=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 6 & 2\\ 0 & 12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10.5\\ 19\\ 6\end{pmatrix}$$

וזו התשובה.

**דוגמה:**

חשבו את מטריצת יעקובי בנקודה $(0,0)$ של הפונקציה $g = f \circ \phi$ כאשר:

$$\phi(x,y) = \left(\frac{1}{2}\left(e^{y} + \cos x\right), \frac{1}{2}\left(e^{x} + \cos y\right)\right)$$

ונתון ש$f$ דיפ' בנקודה $(1,1)$ ומטריצת יעקובי שלה בנקודה זו היא $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$.

**פתרון:**

נרצה להשתמש בכלל השרשרת:

ניזכר מה אומר כלל השרשרת עבור פונקציות וקטוריות:

תהי $g : \mathbb{R}^{n} \longrightarrow \mathbb{R}^{k}$ פונקציה דיפ' בנקודה $a$ ו$f : \mathbb{R}^{k} \longrightarrow \mathbb{R}^{m}$ דיפ' בנקודה $g(a)$ אזי:

$$J_{a}(f \circ g) = J_{(g(a))}(f) \cdot J_{a}(g)$$

במקרה שלנו $g = f \circ \phi$, לכן הנוסחה מכלל השרשרת תהיה:

$$J_{(0,0)}(f \circ \phi) = J_{\phi(0,0)}(f) \cdot J_{(0,0)}(\phi)$$

נחשב מה זה $\phi(0,0)$:

$$\phi(0,0) = \frac{1}{2}\left(e^{0} + \cos 0, e^{0} + \cos 0\right) = (1,1)$$

ידוע כי $J_{(1,1)}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$.

נחשב את מטריצת יעקובי של $\phi$:

$$J_{(x,y)}(\phi) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin x & \frac{1}{2}e^{y} \\ \frac{1}{2}e^{x} & -\frac{1}{2}\sin y \end{pmatrix}$$

כל הנגזרות החלקיות רציפות ולכן $\phi$ גזירה ברציפות ולכן $\phi$ דיפ'.

$$J_{(0,0)}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$\phi$ דיפ' בכל $\mathbb{R}^{2}$ כי הנגזרות החלקיות שלה רציפות בכל $\mathbb{R}^{2}$, $f$ דיפ' ב$(1,1)$ = $\phi(0,0)$ ולכן לפי כלל השרשרת נקבל כי:

$$J_{(0,0)}(f \circ \phi) = J_{(1,1)}(f) \cdot J_{(0,0)}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ \frac{7}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

## טורי טיילור

**תזכורת לטיילור:**

עבור $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f$, טור טיילור שלה הוא בנקודה $a$ הוא $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, וטור מקלורן מתקבל על ידי הצבה $a=0$ כלומר זהו טור טיילור סביב $x=0$ והוא $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

**דוגמה קטנה במשתנה יחיד:**

עבור $f(x)=\sin x$ טור הטיילור הוא:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

כלומר סדרת המקדמים היא:

$$0, 1, 0, -\frac{1}{6}, 0, \dots$$

בעצם המקדם שבשורה העליונה מתאים לחזקה בשורה התחתונה:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \dots \\ x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & \dots \end{array}.$$

כאן לקחנו טור טיילור ומצאנו את סדרת המקדמים, לפי משפט אנחנו יודעי כי $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, ולכן:

$$f^{(n)}(0) = a_n \cdot n!$$

למשל:

$$f^{(3)}(0) = -\frac{1}{6} \cdot 3! = -1$$

נרצה להכליל לכמה משתנים, הנוסחה קצת מפחידה אבל הרעיון אותו רעיון. עד כאן תזכורת.

**הגדרה (טור טיילור עבור פונקציה בשני משתנים):**

עבור פונקציה $f(x,y)$ נניח שהיא גזירה ברציפות $\infty$ פעמים, טור הטיילור של $f$ בנקודה $(a,b)$ הוא:

$$f(x,y) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{1}{k_1! \cdot k_2!} \cdot \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} f(a,b) \cdot (x-a)^{k_1} \cdot (y-b)^{k_2}$$

וטור מקלורן מתקבל על ידי ההצבה $(a,b)=(0,0)$.

$$f\left(x,y\right)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{1}{k_1!\cdot k_2!}\cdot\frac{\partial^{k_1}\partial^{k_2}}{\partial^{k_1}x\partial^{k_2}y}f\left(0,0\right)x^{k_1}y^{k_2}$$

כשאומרים טור טיילור עד סדר $m$ זה אומר עד ש$k_1+k_2=m$.

**דוגמה:**

נחשב פולינום טיילור מסדר שני של $f\left(x,y\right)=\frac{x+y}{x^2}$ מסביב לנקודה $(1,0)$.
נחשב את כל הנגזרות החלקיות בנקודה עד סדר שני:

$$f\left(1,0\right)=1,\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1\cdot x^2-(x+y)\cdot 2x}{x^4}=\frac{x^2-2x^2-2xy}{x^4}=\frac{-x-2y}{x^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2}\left(x+y\right)\right)=\frac{1}{x^2}\cdot 1=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$$

$$f_{xx}=\frac{-1\cdot x^3-(-x-2y)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{-x+x+2y}{x^4}=\frac{2y}{x^4}$$

$$f_{xy}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{-2}{x^3},f_{yy}=0$$

$$f_x\left(1,0\right)=-1,f_y\left(1,0\right)=1,f_{xx}\left(1,0\right)=0,f_{xy}\left(1,0\right)=-2,f_{yy}=0$$

$$f\left(x,y\right)=f\left(1,0\right)+f_x\left(1,0\right)\cdot(x-1)+f_y\left(1,0\right)\cdot y$$

$$+\frac{1}{2}\cdot f_{xx}\left(1,0\right)\cdot(x-1)^2+f_{xy}\left(1,0\right)\cdot(x-1)\cdot y+\frac{1}{2}\cdot f_{yy}\left(1,0\right)\cdot y^2$$

נציב ונקבל:

$$f\left(x,y\right)=1-(x-1)+y-2\left(x-1\right)\cdot y$$

זה הפולינום טיילור מסדר שני של $f$ סביב $(1,0)$.

**הגדרה (טור טיילור עבור פונקציה ב$n$ משתנים):**

עבור פונקציה $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ טור הטיילור של $f$ בנקודה $(a_1,\ldots,a_n)$:

$$f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdot\ldots\cdot\sum_{k_n=0}^{\infty}\frac{1}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_n!}\cdot\frac{\partial^{k_1}\cdot\ldots\cdot\partial^{k_n}}{\partial^{k_1}x_1\ldots\partial^{k_n}x_n}f\left(a_1,\ldots,a_n\right)\cdot\prod_{i=1}^{n}\left(x_i-a_i\right)^{k_i}$$

וטור מקלורן מתקבל על ידי $(a_1,\ldots,a_n)=(0,\ldots,0)$:

$$f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdot\ldots\cdot\sum_{k_n=0}^{\infty}\frac{1}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_n!}\cdot\frac{\partial^{k_1}\cdot\ldots\cdot\partial^{k_n}}{\partial^{k_1}x_1\ldots\partial^{k_n}x_n}f\left(0,\ldots,0\right)\cdot\prod_{i=1}^{n}x_i^{k_i}$$

**תרגיל:**

כתבו את פיתוח טיילור לפונקציה $f\left(x,y\right)=\frac{1}{1-x^2y}$ סביב $(0,0)$ ומצאו בעזרתו את $\frac{\partial^6 f}{\partial x^4\partial y^2}\left(0,0\right)$.

**פתרון:**

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,|x|<1$$

עבור $x,y$ "קרובים מספיק" ל$(0,0)$ נקבל כי $\left|x^2y\right|<1$ ולכן:

$$\frac{1}{1-x^2y}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^2y\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}\cdot y^n$$

המקדם שמעניין אותנו הוא המקדם של $x^4y^2$ אני יודע כי:

$$\frac{1}{4!\cdot 2!}\cdot\frac{\partial^6 f}{\partial x^4\partial y^2}\left(0,0\right)\cdot x^4y^2=x^4y^2\Rightarrow\frac{\partial^6 f}{\partial x^4\partial y^2}\left(0,0\right)=4!\cdot 2!=24\cdot 2=48$$

**דוגמה:**

תהי $f\left(x,y\right)=e^{x^2y^3}$, חשבו את פולינום המקלורן שלה ובעזרתו מצאו את $\frac{\partial^{15}f}{\partial^6 x\partial^9 y}\left(0,0\right)$.

**פתרון:**

ידוע כי $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, נציב במקום $x$, $x^2y^3$ ונקבל:

$$e^{x^2y^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x^2y^3\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}y^{3n}}{n!}=1+x^2y^3+\frac{x^4y^6}{2}+\frac{x^6y^9}{6}+\ldots$$

$$\frac{1}{6}x^6y^9 = \frac{1}{6!\cdot 9!}\cdot\frac{\partial^{15}f}{\partial^6 x\partial^9 y}\left(0,0\right)x^6y^9 \Rightarrow \frac{\partial^{15}f}{\partial^6 x\partial^9 y}\left(0,0\right) = \frac{6!\cdot 9!}{6} = 5!\cdot 9!$$

**הערה:**

מצאו את $\frac{\partial^{13}f}{\partial^6 x\partial^7 y}\left(0,0\right)$ - מכיוון שאין מקדם בטור ל $x^6y^7$ הנגזרת החלקית הזו חייבת להיות 0.

**תרגיל:**

תהי $f\left(x,y\right) = e^{2x}\cdot\cos y$ בעזרת פולינום המקלורן שלה מצאו את $\frac{\partial^4 f}{\partial^2 x\partial^2 y}\left(0,0\right)$.

**פתרון:**

ידוע כי

$$e^{2x} = \sum_{n=0}\frac{x^{2n}}{n!}, \cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n\cdot x^{2n}}{\left(2n\right)!}$$

$$\cos y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n\cdot y^{2n}}{\left(2n\right)!}$$

$$\begin{cases} e^{2x} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \dots \\ \cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + \dots \end{cases}$$

לכאורה כדי לקבל את טור המקלורן עד סדר 8 (ועוד שלוש נקודות) צריך להכפיל את כל האיברים שכתבו במפורש, אבל האמת היא שלא מעניין אותנו כל הטור עד סדר 8 אלא רק המקדם של $x^2y^2$ אם נכפיל נקבל שהמקדם הוא $-\frac{1}{2}$. ולכן ידוע כ:

$$-\frac{1}{2}x^2y^2 = \frac{1}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{\partial^4 f}{\partial^2 x\partial^2 y}\left(0,0\right)\cdot x^2y^2 \Rightarrow \frac{\partial^4 f}{\partial^2 x\partial^2 y}\left(0,0\right) = -\frac{2\cdot 2}{2} = -2$$

הערה:
נכתוב בכל זאת את טור המקלורן עד סדר 8:

$$\begin{aligned} e^{2x}\cos y &= \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \dots\right)\left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + \dots\right) \\ &= 1 - \frac{y^2}{2} + x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{24} - \frac{y^2x^4}{4} + \frac{x^2y^4}{24} + \frac{x^4y^4}{48} + \dots \end{aligned}$$

## נקודות קיצון בפונקציות רבות משתנים

במשתנה יחיד $f(x)$, רצינו למצוא קיצון $[a,b]$, הכלי העיקרי היה משפט פרמה $f'(x)=0$ כלומר כל נקודה שהיא מקיימת שהנגזרת בה היא אפס היא חשודה כקיצון, רק חשודה כי לא בטוח שהיא קיצון יכול להיות פיתול ובשביל זה יש את מבחן הנגזרת השנייה.
בכמה משתנים:
הנקודות החשודות של $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ הן כל הנקודות $a\in\mathbb{R}^n$ כך ש$\nabla f(a)=0$.
נצטרך לעבוד קצת יותר קשה כדי למצוא אנלוג למבחן הנגזרת השנייה:

**הגדרה:**

נקודה $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ תקרא נקודת מינימום (מקסימום) אם קיימת סביבה שלה בה לכל נקודה $(x,y)$ בסביבה מתקיים $f(x_0,y_0)\overset{(\leq)}{\geq}f(x,y)$.
סביבה של נקודה $(x_0,y_0)$ הוא כדור פתוח מהצורה:

$$B_r((x_0,y_0))=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:d((x_0,y_0),(x,y))<r\right\}$$

נקודה $(x_0,y_0)$ תקרא אוכף אם היא אינה מקסימום ואינה מינימום.

**הגדרה:**

תהי $A\in M_n(\mathbb{R})=\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה סימטרית אזי:

- $A$ נקראת חיובית למחצה אם לכל $v\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $A(v,v):=v^tAv\geq 0$.
- $A$ נקראת שלילית למחצה אם לכל $v\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $A(v,v):=v^tAv\leq 0$.
- $A$ נקראת חיובית לחלוטין אם לכל $v\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $A(v,v):=v^tAv>0$. (יכול להתקיים שיוויון רק עבור $v=0$).
- $A$ נקראת שלילית לחלוטין אם לכל $v\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $A(v,v):=v^tAv<0$. (יכול להתקיים שיוויון רק עבור $v=0$).
- $A$ נקראת מעורבת אם לא היא חיובית ולא שלילית כלומר קיימים $v_1,v_2\in\mathbb{R}^n$ כך ש$v_1^tAv_1<0, v_2^tAv_2>0$.

**הערה:**

$v\in\mathbb{R}^n$ וקטור עמודה ולכן הגדלים של המכפלה הם:

$$\underbrace{v^t}_{1\times n}\underbrace{A}_{n\times n}\underbrace{v}_{n\times 1}\in\mathbb{R}$$

**משפט:**

מטריצה סימטרית $A\in M_n(\mathbb{R})=\mathbb{R}^{n\times n}$ מתקיים כי:

- $A$ נקראת חיובית למחצה אם ורק אם כל הערכים העצמיים שלה אי שליליים.
- $A$ נקראת שלילית למחצה אם ורק אם כל הערכים העצמיים שלה אי חיוביים.
- $A$ נקראת חיובית לחלוטין אם ורק אם כל הערכים העצמיים שלה חיוביים.
- $A$ נקראת שלילית לחלוטין אם ורק אם כל הערכים העצמיים שלה שלילים.
- $A$ נקראת מעורבת אם קיים לה ערך עצמי חיובי וערך עצמי שלילי.

**הערה:**

אם $(0,0)$ נק' קריטית. אז לפי טיילור:

$$f(x,y)=f(0,0)+f_x(0,0)\cdot x+f_y(0,0)\cdot y+\frac{1}{2}\left(f_{xx}(0,0)x^2+2xyf_{xy}(0,0)+y^2f_{yy}(0,0)\right)+\dots$$

כאשר השלוש נקודות הם גורמים ממעלה 3,

$$f(x,y)-f(0,0)=\frac{1}{2}\left(f_{xx}(0,0)x^2+2xyf_{xy}(0,0)+y^2f_{yy}(0,0)\right)+\dots$$

"נזניח" כרגע את הגורמים ממעלה 3 והלאה כי עבור נקודות קרובות מספיק ל$(0,0)$ הם לא ישפיעו על הסימן (אם הוא חיובי הם לא יהפכו אותו לשלילי ולהפך.)
נסמן

$$A=f_{xx}(0,0)\,,B=f_{xy}(0,0)\,,C=f_{yy}(0,0)$$

כלומר צריך לבדוק חיוביות ושליליות של $Ax^2+2Bxy+Cy^2$.
$A\neq 0$:
באמצעות טריקים אלגברים נקבל:

$$Ax^2+2xyB+Cy^2=A\left[\left(x+\frac{B}{A}y\right)^2+y^2\cdot\frac{AC-B^2}{A^2}\right]$$

אז $AC-B^2>0$, אם $A>0$ הביטוי תמיד חיובי ולכן זו נקודת מינימום. בדומה אם $A<0$ זו נקודת מקסימום.
$AC-B^2<0$, על נקודות מהצורה $y=0$, הביטוי ב[] חיובי, ועל נקודות מהצורה $x+\frac{B}{A}y=0$ הביטוי ב[] שלילי. ולכן זו נקודות אוכף.
$AC-B^2=0$, על נקודות מהצורה $x+\frac{B}{A}y=0$ הביטוי מתאפס, והגורמים ממעלה 3 כבר לא יהיו זניחים.
$A=0$:
$2Bxy+Cy^2$,

$B=C=0$ אין מסקנה.
$B=0, C\neq 0$, על $y=0$ מתאפס ואין מסקנה.
$B\neq 0, C=0$ $2Bxy$ שזה אוכף.
$B,C\neq 0$ באמצעות טריקים אלגברים נקבל:

$$C\left[\left(y+\frac{B}{C}x\right)^2-\frac{B^2}{C^2}x^2\right]$$

וזה גם יצא אוכף (תרגיל).

$$H\left(f\right)=\begin{pmatrix}f_{xx} & f_{yx}\\ f_{xy} & f_{yy}\end{pmatrix}$$

נשים כי לפי מה שגילינו זה הכל תלוי בדטמיננטות של המטריצה, אם $\det H>0$ אז יש קיצון והוא מינימום אם $f_{xx}>0$, ומקסימום אם $f_{xx}<0$. אם $\det H<0$ אוכף, ואם $\det H=0$ אז לא יודעים.
עד כאן הערה

**הגדרה:**

עבור פונקציה $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ גזירה ברציפות פעמיים, נגדיר את מטריצת ההסיאן להיות:

$$H\left(f\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_n}\end{pmatrix}$$

**משפט:**

עבור נקודה קריטית $(x_0,y_0)$ מתקיים:

- אם $H\left(f\right)|_{(x_0,y_0)}$ חיובית לחלוטין $(x_0,y_0)$ היא נקודת מינימום.
- אם $H\left(f\right)|_{(x_0,y_0)}$ שלילית לחלוטין $(x_0,y_0)$ היא נקודת מקסימום.
- אם $H\left(f\right)|_{(x_0,y_0)}$ מעורבת אז $(x_0,y_0)$ היא נקודת אוכף.

הערה:
אם המטריצה חיובית או שלילית למחצה אז לא יודעים וייתכן שהיא אוכף או מינימום או מקסימום בהתאמה.
**משפט סילבסטר:**
עבור מטריצה $A\in M_n\left(\mathbb{R}\right)$ סימטרית, $A$ חיובית לחלוטין אם ורק אם הדטרמיננטה של כל המינורים הראשיים חיובית כלומר לכל $1\leq i\leq n$ $\det\left(M_i\right)>0$ כאשר $M_i$ זו המטריצה בגודל $i\times i$ בפינה השמאלית עליונה של $A$. (במקרה שלנו $A=H\left(f\right)$ ובמקרה זה הנקודה היא מינימום).

$A$ שלילית לחלוטין אם ורק אם הדטרמיננטה של המינורים הראשיים מחליפים סימנים כאשר $\det(M_1) < 0$.
אם אחד המינורים מתאפס אז אנחנו לא מקבלים מידע ממינור זה וזה כמו חיובי או שלילי למחצה.
ואם אף אחד מאלו לא קורה אז זה אוכף.
**תרגיל:**
מצאו את הנק' הקריטיות של הפונקציות הבאות וסווגו אותן:

$$f(x, y, z) = 3x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 2z + 1$$

פתרון:
נחשב את הגרדיאנט:

$$\nabla f = \left(9x^2 + 6y, 2y + 6x, 2z - 2\right)$$

נשווה לאפס:

$$z = 1, \begin{cases} 2y + 6x = 0 \\ 9x^2 + 6y = 0 \end{cases}$$

לפי המשוואה הראשונה $y = -3x$ נציב בשנייה ונקבל

$$9x^2 - 18x = 0 \Rightarrow 9x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, 2$$

ולכן $y = -3x = 0, -6$.
ולכן הנקודות החשודות לקיצון הן:

$$(0, 0, 1), (2, -6, 1)$$

נחשב נגזרות חלקיות מסדר שני:

$$f_{xx} = 18x, f_{xy} = 6, f_{xz} = 0, f_{yy} = 2, f_{yz} = 0, f_{zz} = 2$$

ולכן מטריצת ההסיאן היא:

$$H(f) = \begin{pmatrix} 18x & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

בנקודה $(0, 0, 1)$ מטריצת ההסיאן היא:

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det(M_1)=0$, $\det(M_2)=\begin{vmatrix}0 & 6\\ 6 & 2\end{vmatrix}=-36<0$, $\det(M_3)=2\cdot\det(M_2)=-72<0$,
הדטרמיננטה של המינור הראשון מתאפסת ולכן לכאורה לא ניתן אם זו נקודת אוכף או מינימום או מקסימום, זה לא נקודת מינימום כי יש מינורים שהדטרמיננטה שלהן שלילית, וזו לא נקודת מקסימום כי יש המינור השני בעל דטרמיננטה שלילית ואם זו נקודת מקסימום המינור השני חייב להיות בעל דטרמיננטה חיובית וסה"כ קיבלנו שזה אוכף.
בנקודה $(2,-6,1)$ מטריצת ההסיאן היא:

$$\begin{pmatrix}36 & 6 & 0\\ 6 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$\det(M_1)=36>0$, $\det(M_2)=\begin{vmatrix}36 & 6\\ 6 & 2\end{vmatrix}=72-36=36>0$, $\det(M_3)=2\cdot\det(M_2)>0$ הדטרמיננטות של המינורים כולם חיוביים ולכן המטריצה חיובית לחלוטין ולכן זו נקודת מינימום.

**תרגיל:**

מצאו את הנק' הקריטיות של הפונקציות הבאות וסווגו אותן:

$$f(x,y)=3\left(x^2+y^2\right)+x^3+4y$$

פתרון:

$$\nabla f=\left(6x+3x^2,6y+4\right)$$

נבדוק מתי הוא מתאפס $6y+4=0\Rightarrow y=\frac{-2}{3}$, $6x+3x^2=0$

$$3x(2+x)=0\Rightarrow x=-2,0$$

בעצם יש לנו שתי נקודות $\left(0,-\frac{2}{3}\right)$ $\left(-2,-\frac{2}{3}\right)$ שהן חשודות כקיצון.

$$f_{xx}=6+6x, f_{xy}=0, f_{yy}=6$$

כלומר מטריצת ההסיאן היא:

$$H(f)=\begin{pmatrix}6+6x & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$$

בנקודה $\left(-2,-\frac{2}{3}\right)$ נקבל:

$$\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$$

שהערכים העצמיים שלה הם: $\pm 6$ כלומר אחד חיובי ואחד שלילי ולכן זו נקודת אוכף.
בנקודה $\left(0,-\frac{2}{3}\right)$ נקבל $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ הערכים העצמיים הם שניהם חיוביים ולכן זו נקודת מינימום.
קיצון יכול להיות גם על השפה, שמה יש שתי דרכים לטפל בזה או להציב כשהתחום והפונקציה פשוטים מספיק או כופלי לארגנז.

**דוגמה (קיצון עם שפה עם הצבה):**

מצאו את המינימום והמקסימום הגלובלים של הפונקציה

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 2x - 2y$$

במשולש שקודקודיו הם $(0,6)$ $(6,0)$ , $(0,0)$.
**פתרון:**
נתחיל מלחפש נקודות קיצון בפנים של המשולש:

$$\nabla f = (2x - y - 2, 2y - x - 2)$$

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ 2y - x - 2 = 0 \end{cases}$$

נבודד מהמשוואה הראשונה את $y$:$y = 2x - 2$ נציב במשוואה השנייה ונקבל:

$$2(2x-2) - x - 2 = 0 \Rightarrow 3x - 6 \Rightarrow x = 2$$

ולכן $y = 2x - 2 = 2$, כלומר הנקודה החשודה היא $(2,2)$, ובאמת היא בתוך התחום.
משוואות הישרים המרכיבים המשולש הם

$$x = 0, y = 0, y = -x + 6$$

נציב אותם בפונקציה,
$x = 0$ ונקבל:

$$g(y) = f(0,y) = y^2 - 2y$$

$$g'(y) = 2y - 2$$

והנגזרת מתאפסת בנקודה $y=1$. כלומר עוד נקודה חשודה היא $(0,1)$.
$y=0$ ונקבל:

$$h\left(x\right)=f\left(x,0\right)=x^{2}-2x$$

לפי אותם חישובים כמו בהצבה הקודמת נקבל כי עוד נקודה חשודה היא $(1,0)$.
$y=-x+6$:

$$k\left(x\right)=f\left(x,-x+6\right)=x^{2}+x^{2}-12x+36-x\left(-x+6\right)-2x-2\left(-x+6\right)$$

$$=x^{2}+x^{2}-12x+36+x^{2}-6x-2x+2x-12$$

$$=3x^{2}-18x+24$$

$$k'\left(x\right)=6x-18$$

כלומר $x=3$ כלומר הנקודה החשודה הנוספת היא $y=3$ $(3,3)$.
כלומר סך הכל הנקודות החשודות הן:

$$\left(0,0\right),\left(0,6\right),\left(6,0\right),\left(0,1\right),\left(1,0\right),\left(3,3\right),\left(2,2\right)$$

נחשב את ערכי $f$ על נקודות אלו:

$$\begin{cases}
f\left(0,0\right)=0\\
f\left(0,6\right)=6^{2}-12=24\\
f\left(6,0\right)=6^{2}-12=24\\
f\left(0,1\right)=1^{2}-2=-1\\
f\left(1,0\right)=1^{2}-2=-1\\
f\left(3,3\right)=3^{2}+3^{2}-3^{2}-2\cdot3-2\cdot3=-3\\
f\left(2,2\right)=2^{2}+2^{2}-2^{2}-2\cdot2-2\cdot2=-4
\end{cases}$$

המשולש הוא תחום קומפקטי (כי הוא סגור וחסום ב$\mathbb{R}^{2}$) ולכן לפי משפט וירשטראס מכיוון ש$f$ היא פונקציה רציפה אז יש איזשהם מינימום ומקסימום על המשולש.
ולכן המינימום הגלובלי מתקבל בנקודה $(2,2)$ וערכו $-4$, והמקסימום הגלובלי מתקבל בנקודה $\left(6,0\right),\left(0,6\right)$ וערכו $24$.

## קיצון עם כופלי לארגנז':

הרעיון יש לנו פונקציה $f(x,y)$ שרוצים למצוא לה קיצון על אילוץ מהצורה $g(x,y)=0$ שמקיים $\nabla g\neq 0$, מגדירים את הלאגרנזיאן $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$. והמשפט אומר שהנקודות החשודות של $f$ על האילוץ זה הנקודות החשודות של $L$.
מגדירים את הלאגרנג'יאן (אין שום סיכוי שכתבתי את זה נכון):

$$L=f+\lambda g$$

עבור $L$ נחפש נקודות קריטיות והנקודות החשודות כקיצון שלו יהיו הנקודות החשודות כקיצון של $f$ על האילוץ.

**דוגמה:**

נמצא את המקסימום והמינימום הגלובלי של $f(x,y)=e^{-x}\cdot y$ על מעגל היחידה הסגור שנסמנו $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\right\}$.
קודם כל נמצא קיצון בפנים של $D$. זה כמו שעשינו עד עכשיו נחשב את הגרדיאנט:

$$\nabla f=\left(-e^{-x}y,e^{-x}\right)$$

$e^{-x}$ אף פעם לא מתאפס ולכן אין נקודות חשודות בתוך הפנים של $D$.
$D$ הוא סגור וחסום ולכן קומפקטי ולכן לפי ויירשטראס יש מינימום ומקסימום גלובלים.
נרצה למצוא אותם לפי כופלי לאגרנז:
האילוץ שלנו הוא $g(x,y)=x^2+y^2-1$, $\nabla g=(2x,2y)$ שמתאפס רק בנקודה $(0,0)$ שאינה על האילוץ.
נסתכל על הלאגרנזיאן:

$$L=f+\lambda g=e^{-x}\cdot y+\lambda x^2+\lambda y^2-\lambda$$

נחשב את הגרדיאנט שלו:

$$\nabla L=\left(-e^{-x}\cdot y+2\lambda x,e^{-x}+2\lambda y,x^2+y^2-1\right)$$

צריך לפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases}-e^{-x}y+2\lambda x=0\\ e^{-x}+2\lambda y=0\\ x^2+y^2-1=0\end{cases}$$

מהמשוואה השנייה נקבל כי $-e^{-x}=2\lambda y$ נציב בראשונה ונקבל:

$$2\lambda y^2+2\lambda x=0$$

$$y^2 + x = 0$$

$\lambda \neq 0$ כי אחרת זו סתירה למשוואה השנייה, ולכן ניתן לחלק ב$2\lambda$. נקבל כי $x = -y^2$ נציב במשוואה השלישית ונקבל

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

מכאן מוצאים את $y = \pm\sqrt{-\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\right)}$ בודקים מה ערך הפונקציה על כל הנקודות ואיפה יש מינימום ואיפה מקסימום.

**דוגמה:**

מצאו את אורכה רוחבה וגובהה של תיבה שנפחה $S \neq 0$ כאשר ידוע ששטח הפנים הוא מינימלי.

**פתרון:**

עבור תיבה שאורכיה צלעותיה הם $x, y, z$, שטח הפנים הינו:

$$f(x, y, z) = 2xy + 2yz + 2xz$$

כלומר זו הפונקציה שאני רוצה למצוא לה מינימום על האילוץ $g(x, y, z) = S - xyz = 0$.
נגדיר את הלרגנזיאן:

$$L(x, y, z, \lambda) = f + \lambda g = 2xy + 2yz + 2xz + \lambda S - \lambda xyz$$

$$\nabla L = (2y + 2z - \lambda yz, 2x + 2z - \lambda xz, 2y + 2x - \lambda xy, S - xyz)$$

נרצה נקודות בהן הגרדיאנט מתאפס כלומר:

$$\begin{cases} 2y + 2z - \lambda yz = 0 \\ 2x + 2z - \lambda xz = 0 \\ 2x + 2y - \lambda xy = 0 \\ S - xyz = 0 \end{cases}$$

נחסר את המשוואה הראשונה מהשנייה ונקבל:

$$2x - 2y - \lambda(xz - yz) = 0$$

$$(x - y)(2 - \lambda z) = 0$$

או $x=y$ או $z=\frac{2}{\lambda}$ במקרה זה משוואה הראשונה ונקבל:

$$2y+2\cdot\frac{2}{\lambda}-2y=\frac{4}{\lambda}=0$$

בסתירה. ולכן $x=y$.
באופן דומה ממשוואות $1,3$ לקבל גם $y=z$.
(לא הוכחנו מינימליות)
כלומר התיבה בעלת שטח הפנים המינימלית היא קוביה כלומר $x=y=z$, $xyz=x^3=S$
ולכן $x=\sqrt[3]{S}$. כלומר זו קוביה בעלת אורך צלע $\sqrt[3]{S}$ ושטח הפנים שלה יהיה $6\sqrt[3]{S^2}$.

**הערה:**

בדיוק כמו שהגדרנו $L=f+\lambda g$ כאשר יש לנו יש $n$ אילוצים $g_1,\ldots,g_n$ נגדיר $L=f+\lambda_1 g_1+\ldots+\lambda_n g_n$.
כאשר הפעם נדרוש ש $\{\nabla g_i\}_{i=1}^n$ היא בלתי תלויה על האילוצים.
**תרגיל:**
מצאו את נקודות הקיצון של $f(x,y,z)=-x+2y+2z$, תחת האילוצים

$$\begin{cases} g_1(x,y,z)=y+2z-1=0 \\ g_2(x,y,z)=x^2+y^2-2=0 \end{cases}$$

**פתרון:**

נבדוק שהגרדיאנטים של האילוצים הוא בלתי תלויים לינארית:

$$\begin{cases} \nabla g_1=(0,1,2) \\ \nabla g_2=(2x,2y,0) \end{cases}$$

והם אינם תלויים לינארית על החיתוך של האילוצים.
נגדיר

$$L=f+\lambda g_1+\mu g_2=-x+2y+2z+\lambda y+2\lambda z-\lambda+\mu x^2+\mu y^2-2\mu$$

$$\nabla L=\left(-1+2\mu x,2+\lambda+2\mu y,2+2\lambda,y+2z-1,x^2+y^2-2\right)$$

נכתוב בצורה של מערכת משוואות:

$$\begin{cases} -1+2\mu x=0 \\ 2+\lambda+2\mu y=0 \\ 2+2\lambda=0 \\ y+2z-1=0 \\ x^2+y^2-2=0 \end{cases}$$

טוב מהמשוואה השלישית רואים מיד ש$\lambda = -1$, נציב את זה בשנייה ונקבל $1 + 2\mu y = 0$ ולכן $\mu = -\frac{1}{2y}$, מהמשוואה הראשונה נקבל $\mu = \frac{1}{2x}$ ולכן:

$$\frac{1}{2x} = -\frac{1}{2y} \Rightarrow x = -y$$

את זה נציב במשוואה החמישית ונקבל:

$$2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = \mp 1$$

מהמשוואה הרביעית נקבל:

$$2z = 1 - y \Rightarrow z = \frac{1-y}{2} = 1, 0$$

כלומר הנקודות המתקבלות הן

$$(1, -1, 1), (-1, 1, 0)$$

הקבוצה $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | g_1(x, y, z) = 0 \; and \; g_2(x, y, z) = 0\right\}$ היא קבוצה סגורה כחיתוך של סגורות, וחסומה כי $x, y$ חייבים להיות על מעגל ברדיוס $\sqrt{2}$ ולפי המשוואה $g_1$ ברגע ש$y$ חסום גם $z$ חסום. כלומר זו קבוצה סגורה וחסומה ב$\mathbb{R}^3$ ולכן לפי היינה בורל קומפקטית. כעת לפי משפט ויירשטראס מכיוון ש$f$ רציפה היא מקבלת שמה מינימום ומקסימום.

$$f(1, -1, 1) = -1 + 2 \cdot (-1) + 2 = -1$$

$$f(-1, 1, 0) = 1 + 2 + 2 \cdot 0 = 3$$

ולכן הנקודה $(-1, 1, 0)$ היא נקודת מקסימום (גלובלית), והנקודה $(1, -1, 1)$ היא נקודת מינימום (גלובלית).

**תרגיל:**

נסתכל על הפונקציה $P(x, y, z) = y(x + z)$, כאשר $x, y, z \in \mathbb{R}$. מצאו מינימום ומקסימום תחת האילוצים

$$\begin{cases} g_1 = x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ g_2 = y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

**פתרון:**

נחשב את הגרדיאנטים של האילוצים:

$$\nabla g_1 = (2x, 2y, 0), \nabla g_2 = (0, 2y, 2z)$$

$$\alpha\nabla g_1+\beta\nabla g_2=0$$

$$\left(2\alpha x,2y\left(\alpha+\beta\right),2z\beta\right)=0$$

אם לא רוצים ש$\alpha,\beta$ יהיו אפס חייב להתקיים מהרכיב הראשון והשלישי ש$x=z=0$ ולכן לפי $g_1$ נקבל כי $y\in\{\pm1\}$ ולפי $g_2$ נקבל כי $y\in\{\pm2\}$ בסתירה. ולכן לפחות אחד מהם הוא אפס נניח $\alpha$ אז מקבלים ש$y\in\{\pm2\}$ ולכן

$$0=2y\left(\alpha+\beta\right)=2y\cdot\beta$$

אבל $y\neq0$ ולכן $\beta=0$ והם באמת בת"ל.
נגדיר

$$L=f+\lambda g_1+\mu g_2=xy+yz+\lambda x^2+\lambda y^2-\lambda+y^2+\mu z^2-4\mu$$

נחשב את הגרדיאנט ונשווה ל0:

$$\begin{cases}y+2\lambda x=0\\x+z+2\lambda y+2y=0\\y+2\mu z=0\\x^2+y^2-1=0\\y^2+z^2-4=0\end{cases}$$

אם נסתכל על 3 המשוואות הראשונות:

$$\begin{pmatrix}2\lambda&1&0\\1&2\lambda+2&1\\0&1&2\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

אם המטריצה היא הפיכה, אז יש פתרון יחיד למערכת (כי $Ax=0$) זו וקטור האפס שלא מקיים את האילוצים, ולכן נרצה את ערכי $\lambda,\mu$ עבורם המטריצה אינה הפיכה

$$\begin{vmatrix}2\lambda&1&0\\1&2\lambda+2&1\\0&1&2\mu\end{vmatrix}=2\lambda\begin{vmatrix}2\lambda+2&1\\1&2\mu\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&0\\1&2\mu\end{vmatrix}=2\lambda\left(\left(2\lambda+2\right)\cdot2\mu-1\right)-2\mu=0$$

$$\left(4\lambda\mu-1\right)\left(2\lambda+2\mu\right)=0$$

אם $\lambda=-\mu$, נקבל $-2\lambda x=2\mu x=-2\mu z\Rightarrow x=-z$ ואם את זה אני אציב באילוצים אז נקבל כי $x^2=z^2$ ונקבל סתירה.
$\lambda=\frac{1}{4\mu}$, הפתרון יוצא עוד קצת ארוך וממש לא מעניין.

**תרגיל:**

מצאו את נקודות הקיצון של $f\left(x,y,z\right)=x^{2}+y^{2}+z^{2}$ על האילוץ $g\left(x,y,z\right)=\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}+\frac{z^{2}}{c^{2}}-1=0$ כאשר $a>b>c>0$.

**פתרון:**

ברור כי $\nabla g\neq0$, נשתמש בכופלי לארנז':

$$L=f+\lambda g=x^{2}+y^{2}+z^{2}+\lambda\left(\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}+\frac{z^{2}}{c^{2}}-1\right)$$

נגזור ונקבל שצריך לפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases}2x+\frac{2\lambda x}{a^{2}}=0\\2y+\frac{2\lambda y}{b^{2}}=0\\2z+\frac{2\lambda z}{c^{2}}=0\\\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}+\frac{z^{2}}{c^{2}}-1=0\end{cases}$$

בשלוש המשוואות הראשונות $\lambda$ יכול לדאוג לאפס רק משוואה אחת כי $a\neq b\neq c\neq a$ ולכן הנקודות החשודות הן $\left(0,0,\pm c\right),\left(0,\pm b,0\right),\left(\pm a,0,0\right)$.
האילוץ שלנו הוא תחום סגור וחסום ה$\mathbb{R}^{3}$: סגור כי קבוצת הנקודות המקיימות את האילוץ היא בדיוק $\{0\}$ $g^{-1}$, $g$ רציפה $\{0\}$ הוא נקודון ולכן סגור ולכן גם האילוץ סגור. חסום - כדור שמרכזו בראשית ורדיוסו $2a$ יעבוד. ולכן לפי היינה בורל קומפקטי ולכן לפי ויירשטראס יש מינימום ומקסימום. נחשב את ערכי הפונקציה על הנקודות:

$$f\left(\pm a,0,0\right)=a^{2},f\left(0,\pm b,0\right)=b^{2},f\left(0,0,\pm c\right)=c^{2}$$

מכיוון ש$a>b>c>0$ אז הנקודות $\left(\pm a,0,0\right)$ הן מקסימום גלובלי (ובפרט מקומי) והנקודות $\left(0,0,\pm c\right)$ הן מינימום גלובלי (ובפרט מקומי).
מסתכלים על מסלולים:
כאשר $x=0$:
האילוץ הוא $\frac{y^{2}}{b^{2}}+\frac{z^{2}}{c^{2}}-1=0$ והפונקציה היא $f\left(0,y,z\right)=y^{2}+z^{2}$, באותו אופן נקבל כי נקודות הקיצון הן $\left(0,0,\pm c\right),\left(0,\pm b,0\right)$ וכאן ערכי הפונקציה הם $b^{2}>c^{2}$ ולכן על מסלול זה (גם הוא סגור וחסום) הנקודות $\left(0,\pm b,0\right)$ הן מקסימום.
אבל כאשר $z=0$ האילוץ יהיה $\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$ והפונקציה היא $f\left(x,y,0\right)=x^{2}+y^{2}$ וכאן הנקודות $\left(0,\pm b,0\right)$ יוצאות מינימום ולכן אצלנו הן אוכף.

## משפט הפונקציה הסתומה

מוטיבציה:
לתאר $F\left(x,y\right)=0$ כפונקציה של $x$ בסביבה של נקודה כלשהי, לפונקציה כזו נקרא חילוץ.
דוגמה:
$F\left(x,y\right)=-x+y^{5}+y^{3}+y$.

בנקודות בהן $F(x,y)=0$ מתקיים $x=g(y)=y^5+y^3+y$.
קיבלנו חילץ של $x$ כפונקציה של $y$ כשרוצים חילוץ של $y$ כפונקציה של $x$.
$g(y)$ עולה ממש כי $g'(y)=5y^4+3y^2+1>0$, היא עולה ממש ולכן חח"ע.
כמו כן במינוס $\infty$ היא שואפת ל$-\infty$ וב$\infty$ ל$\infty$ והיא רציפה בכל $\mathbb{R}$ ולכן היא על.
כלומר קיבלנו כי $g$ היא חח"ע ועל ולכן הפיכה נסמנת את ההופכית $y=f(x)$.

**משפט (משפט הפונקציה הסתומה בשני משתנים):**

נתונה המשוואה $F(x,y)=0$, כאשר $F$ מוגדרת בסביבה $D$ של הנקודה $(x_0,y_0)$, אם $F(x,y),F_x(x,y),F_y(x,y)$ רציפות ב$-D$ ואם:

$$F(x_0,y_0)=0,F_y(x_0,y_0)\neq 0$$

אזי קיים מלבן:

$$\Delta=\{(x,y)\,|\,|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\varepsilon\}$$

כך שהמשוואה $F(x,y)=0$ מגדירה את $y$ כפונקציה סתומה של $x$ ונסמן $y=f(x)$.
כמו כן $y_0=f(x_0)$, ולכל $x$ במלבן מתקיים $F_y(x,f(x))\neq 0$ והפונקציה $y=f(x)$ גזירה ברציפות ומתקיים:

$$\frac{df}{dx}(x)=-\frac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))}$$

**תרגיל:**

נתונה המשוואה $F(x,y)=x^y-y^x-y=0$. האם היא מגדירה את $y$ כפונקציה של $x$ בסביבת הנקודה $(2,1)$. במידה וכן $y'(2)$.

**פתרון:**

נבדוק האם הנקודה מקיימת את המשוואה:

$$F(2,1)=2^1-1^2-1=2-1-1=0$$

כלומר הנקודה מקיימת את המשוואה כנדרש.
נחשב נגזרות חלקיות של $F$:

$$F_x(x,y)=yx^{y-1}-y^x\ln y,F_y(x,y)=x^y\ln x-xy^{x-1}-1$$

וכולן $(F,F_x,F_y)$ רציפות בסביבת $(2,1)$.

$$F_y(2,1)=2^1\cdot\ln 2-2\cdot 1^1-1=2\ln 2-3\neq 0$$

כלומר כל תנאי משפט הפונקציה הסתומה מתקיימים, ולכן קיים מלבן $\Delta$ כל שהמשוואה $F(x,y)=0$ מגדירה את $y$ כפונקציה של $x$ נסמן $y=f(x)$, לפי המשפט:

$$y'(2)=-\frac{F_x(2,1)}{F_y(2,1)}=-\frac{1\cdot 2^0-1^2\cdot\ln 1}{2\ln 2-3}=-\frac{1}{2\ln 2-3}\approx -2.59$$

**תרגיל:**

מצאו את כל הנקודות בהן ניתן להביע את $y$ כפונקציה של $x$ (לפי משפט הפונקציה הסתומה) עבור המשוואה $F(x,y)=x^3+3y^2=0$.

**פתרון:**

רוצים למצוא את כל הנקודות $(x_0,y_0)$ כך ש $F(x_0,y_0)=0$ וגם $F_y(x_0,y_0)\neq 0$.

$$F_y=6y$$

מתאפסת רק כאשר $y_0=0$, ולכן כל נקודה $(x_0,y_0)$ שמקיימת $F(x_0,y_0)=0$ כך ש$y_0\neq 0$ ניתן לחילוץ.

נמצא את החילוץ ללא קשר למשפט הפונקציה הסתומה:

$$x^3+3y^2=0\Rightarrow -\frac{x^3}{3}=y^2\Rightarrow y=\pm\sqrt{-\frac{x^3}{3}}$$

כלומר לכל נקודה מהצורה $\left(x_0,\pm\sqrt{\frac{-x_0^3}{3}}\right)$ כאשר $x_0<0$ ניתן למצוא חילוץ של $y$ כפונקציה של $x$. (זה ממשפט הפונקציה הסתומה באופן כללי זה נכון גם עבור $x_0=0$ אבל לא מהמשפט כי אז $F_y=0$).

**משפט הפונקציה הסתומה ב$n$ משתנים:**

תהי $F(x_1,\ldots,x_{n-1},y)=0$ משוואה כאשר $F$ פונקציה של $n$ משתנים המוגדרת באיזושהי סביבה $D$ של נקודה $x^0=\left(x_1^0,\ldots,x_{n-1}^0,y^0\right)$ (זה לא חזקה אלא אינדקס עליון). נניח כי $F\left(x^0\right)=0$, ובנוסף $F\in C^1(D)$ וגם $F_y\left(x^0\right)\neq 0$, אזי קיימת תיבה $n-$מימדית $\left|x_i-x_i^0\right|<\delta_i$ כך שהמשוואה מגדירה בסביבה זו את $y$ כפונקציה סתומה של $x_1,\ldots,x_{n-1}$ כלומר:

$$y=y(x_1,\ldots,x_{n-1})$$

בנוסף $y$ גזירה ברציפות לפי כל אחד מהמשתנים ומתקיים:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}=-\frac{F_{x_i}}{F_y}$$

**תרגיל:**

$$y^3+xz+y^2+e^z-3=0$$

הוכיחו כי המשוואה מגדירה פונקציה $z=z\left(x,y\right)$ בסביבת הנקודה $\left(1,1,0\right)$.

**פתרון:**

נסמן $F\left(x,y,z\right)=y^3+xz+y^2+e^z-3$,

$$F\left(1,1,0\right)=1^3+1\cdot0+1^2+e^0-3=0$$

$$F_x=z,F_y=3y^2+2y,F_z=x+e^z$$

וכולן רציפות בכל $\mathbb{R}^3$ ולכן בפרט $F\in C^1\left(D\right)$ כאשר $D$ היא סביבת הנקודה $\left(1,1,0\right)$.

$$F_z\left(1,1,0\right)=1+e^0=1+1=2\neq0$$

כלומר כל תנאי משפט הפונקציה הסתומה מתקיימים ולכן קיימת תיבה $n$ מימדת (במילים שלנו זה פשוט סביבה) כך ש $z$ היא פונקציה של $x,y$ כלומר $z=z\left(x,y\right)$.
לא ביקשו אבל נחשב נגזרות בנקודה, מתקיים לפי המשפט:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(1,1\right)=-\frac{F_x\left(1,1,0\right)}{F_z\left(1,1,0\right)}=-\frac{0}{2}=0,\frac{\partial z}{\partial y}\left(1,1\right)=-\frac{F_y\left(1,1,0\right)}{F_z\left(1,1,0\right)}=-\frac{5}{2}$$

תזכורת:
עבור $F=\left(f_1,\ldots,f_m\right):\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ מגדירים את מטריצת יעוקבי שלה להיות

$$\frac{\partial\left(f_1,\ldots,f_m\right)}{\partial\left(x_1,\ldots,x_n\right)}=\left(J\left(F\right)\right)_{ij}=\left(f_i\right)_{x_j}$$

סימון נוסף הוא $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}$.

**משפט הפונקציה הסתומה מערכת של משוואות:**

נתבונן ב$m$ משוואות עם $n+m$ נעלמים:

$$F_i\left(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m\right)=0,\forall i:1\leq i\leq m$$

נניח שכל ה$F_i$ גזירות ברציפות לפי כל המשתנים בסביבה $D$ של נקודה $x^0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0\right)$.
כמו כן $\forall i : F_i\left(x^0\right) = 0$. והיעקוביאן בנקודה $x^0$ לפי המשתנים $y_1, \ldots, y_m$ שונה מאפס, כלומר:

$$\det\left(J\left(F\right)\right) = \det\left(\frac{\partial\left(F_1, \ldots, F_m\right)}{\partial\left(y_1, \ldots, y_m\right)}\right) \neq 0$$

אזי קיימת סביבה $U$ של $x^0$ בה המערכת מגדירה $m$ פונקציות גזירות ברציפות

$$y_k\left(x_1, \ldots, x_n\right), \forall k : 1 \leq k \leq m$$

כך ש$y_k\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right) = y_k^0$.
והנגזרות נתונות על ידי:

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_j} = -\frac{\det\left(\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, x_j, \ldots y_m)}\right)}{\det\left(\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}\right)}$$

כאשר $\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, x_j, \ldots y_m)}$ היא מטריצה $\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}$ בה החלפנו את העמודה ה$k$ בה היה את הנגזרות לפני $y_k$ בנגזרות לפי $x_j$.

**דוגמה:**

נתבונן במערכת:

$$\begin{cases} xe^{u+v} + 2uv = 1 \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x \end{cases}$$

1. הוכיחו כי המערכת מגדירה פונקציות דיפ' $u\left(x, y\right), v\left(x, y\right)$ כך ש $u\left(1, 2\right) = v\left(1, 2\right) = 0$.
2. מצאו את $du\left(1, 2\right)$.

**פתרון:**

1. נרצה לבדוק האם המערכת מקיימת את תנאי המשפט:

$$\begin{cases} F_1\left(x, y, u, v\right) = xe^{u+v} + 2uv - 1 \\ F_2\left(x, y, u, v\right) = ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} - 2x \end{cases}$$

נגדיר

$$f\left(x, y, u, v\right) = \left(F_1, F_2\right), f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

הנקודה עליה אנו מסתכלים היא $x = 1, y = 2, u = 0, v = 0$ כלומר מסתכלים על הנקודה $\left(1, 2, 0, 0\right)$.

$$\begin{aligned} f(1,2,0,0) &= (F_1(1,2,0,0), F_2(1,2,0,0)) \\ &= \left(1\cdot e^{0+0}+2\cdot 0\cdot 0-1, 2\cdot e^{0-0}-\frac{0}{1}-2\right) \\ &= (0,0) \end{aligned}$$

נמצא את היעקוביאן לפי $(u,v)$:

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} xe^{u+v}+2v & xe^{u+v}+2u \\ ye^{u-v}-\frac{1}{1+v} & -ye^{u-v}+\frac{u}{(1+v)^2} \end{pmatrix}$$

$$(F_1)_x = e^{u+v}, (F_1)_y = 0, (F_2)_x = -2, (F_2)_y = e^{u-v}$$

ואכן הנגזרות החלקיות לפי $x,y$ גם כן רציפות בסביבה, כלומר בסביבת הנקודה $(1,2,0,0)$
כל הנגזרות החלקיות רציפות כלומר לכל $i$ $F_i$ גזירה ברציפות לפי כל המשתנים.
לכן מטריצת יעוקבי בנקודה $x^0=(1,2,0,0)$ היא:

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}(x^0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

זו מטריצת יעקובי בנקודה $x^0$, נחשב לה דטרמיננטה:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2-1 = -3 \neq 0$$

לכן תנאי משפט הפונקציה הסתומה מערכת של משוואות מתקיימים ונקבל כי קיימת סביבה $U$ של $(1,2,0,0)$ בה ניתן להביע את $u,v$ כפונקציות של $x,y$ כלומר

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

כך ש$u(1,2)=v(1,2)=0$.
שהן גזירות ברציפות ולכן בפרט דיפ'.
.2

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,2) = -\frac{\det\left(\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,v)}\right)}{\det\left(\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}\right)} = -\frac{\begin{vmatrix} e^{u+v} & xe^{u+v}+2u \\ -2 & -ye^{u-v}+\frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix}}{-3}$$

נציב את הנקודה $x=1,y=2,u=v=0$ ונקבל:

$$= -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}}{-3} = 0$$

עכשיו נחשב את הנגזרת לפי $y$:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,2) = -\frac{\det\left(\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,v)}\right)}{\det\left(\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}\right)} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^{u+v}+2u \\ e^{u-v} & -ye^{u-v}+\frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix}}{-3}$$

נציב את הנקודה $x=1,y=2,u=v=0$ ונקבל:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,2) = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{-3} = -\frac{-1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

ניזכר רגע מה זה דיפראנציאל $u(x,y):\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ הדיפראנציאל שלה הוא $du_{(x_0,y_0)}(dx,dy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot dy$ ובמקרה שלנו:

$$du(1,2) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,2)\cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y}(1,2)\cdot dy = -\frac{1}{3}dy$$

**משפט הפונקציה ההפוכה:**

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהי $f:A \longrightarrow \mathbb{R}^n$, גזירה ברציפות. תהי $a \in A$ עבורה $\det(J_f(a)) \neq 0$. אזי קיימת סביבה $U$ של $a$ כך שהקבוצה $f(U)$ פתוחה, וגם $f$ חח"ע ועל איזושהי $V$ כך ש $f^{-1}:V \longrightarrow U$ גם גזירה ברציפות ומתקיים:

$$J_{f^{-1}}(f(x)) = (J_f(x))^{-1}$$

**הערה:**

ניזכר רגע במשתנה יחיד ידוע כי עבור $f$ חח"ע ועל מתקיים (אולי עם עוד כל מיני תנאים):

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} = (f'(a))^{-1}$$

כלומר משפט הפונקציה ההפוכה קורס למה שאנחנו מכירים במשתנה יחיד.
לדוגמה $g(x)=e^x, g^{-1}(y)=\ln y$ כאשר $y=g(x)$ ולכן:

$$\frac{1}{e^x} = \frac{1}{y} = (\ln y)' = \frac{1}{g'(x)} = \frac{1}{e^x}$$

כמו שצריך.

**דוגמה:**

תהי $f\left(x,y,z\right)=\left(e^{x}\sin z,e^{y}\cos z,e^{z}xy\right)$ הוכיחו כי $f$ הפיכה מקומית בנקודה $\left(0,1,0\right)$, ומצאו את מטריצת יעוקבי של $f^{-1}$ בנקודה $\left(0,e,0\right)$.

**פתרון:**

נחשב את מטריצת יעוקבי של $f$:

$$J_{f}=\begin{pmatrix}e^{x}\sin z & 0 & e^{x}\cos z\\ 0 & e^{y}\cos z & -e^{y}\sin z\\ e^{z}y & e^{z}x & e^{z}xy\end{pmatrix}$$

כל הנגזרות החלקיות רציפות ולכן $f$ גזירה ברציפות בכל $\mathbb{R}^{3}$,

$$J_{f}\left(0,1,0\right)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & e & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

זוהי מטריצה הפיכה (למשל כי השורות בת"ל) ולכן $\det\left(J_{f}\left(0,1,0\right)\right)\neq0$. כלומר כל תנאי משפט הפונקציה ההפוכה מתקיימים ולכן קיימת סביבה $U$ של $\left(0,1,0\right)$ בה $f$ הפיכה מקומית כך ש-$f^{-1}$ גזירה ברציפות ומתקיים:

$$J_{f^{-1}}\left(f\left(0,1,0\right)\right)=J_{f^{-1}}\left(0,e,0\right)=\left(\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & e & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & e^{-1} & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

**תרגיל (ממבחן):**

תהי $F\left(x,y\right)=\left(x^{2}y,xy^{2}\right)$.

א. מצאו את כל הנקודות בהן $F$ הפיכה מקומית.

ב. מצאו את היעקוביאן של $F^{-1}$ בנקודה $\left(4,2\right)$.

ג. חשבו את הדיפראנציאל של $F^{-1}$ בנקודה $\left(4,2\right)$.

**פתרון:**

א. נסמן $f_{1}=x^{2}y,f_{2}=xy^{2}$. נחשב נגזרות חלקיות:

$$\frac{\partial f_{1}}{\partial x}=2xy,\frac{\partial f_{1}}{\partial y}=x^{2},\frac{\partial f_{2}}{\partial x}=y^{2},\frac{\partial f_{2}}{\partial y}=2xy$$

כל אחת מהנגזרות החלקיות רציפה ולכן $F$ גזירה ברציפות.

$$J_{F}\left(x,y\right)=\begin{pmatrix}2xy & x^{2}\\ y^{2} & 2xy\end{pmatrix}\longrightarrow\left|J_{F}\left(x,y\right)\right|=4x^{2}y^{2}-x^{2}y^{2}=3x^{2}y^{2}$$

בכל נקודה בה $xy \neq 0$ היעקוביאן יהיה שונה מאפס ולכן $F$ תהיה הפיכה מקומית בסביבה של $(x,y)$.
ב. נשים לב כי $F(2,1)=(4,2)$. בנוסף מכיוון ש$1\cdot 2 = 2 \neq 0$ לפי סעיף א נקבל כי $F$ הפיכה מקומית בסביבה של $(2,1)$ ומתקיים:

$$J_{F^{-1}}((4,2)) = (J_F((2,1)))^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

ולכן היעקוביאן יהיה:

$$|J_{F^{-1}}(4,2)| = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{9} - \frac{1}{36} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

ג. ידועה מטריצת יעקובי ולכן:

$$d\left(F^{-1}\right)_{(4,2)} = J_{F^{-1}}((4,2)) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y \\ -\frac{1}{12}x + \frac{1}{3}y \end{pmatrix}$$

וזה הדיפראנציאל.

## אינטגרלים רב ממדיים

**תזכורת למשתנה יחיד:**

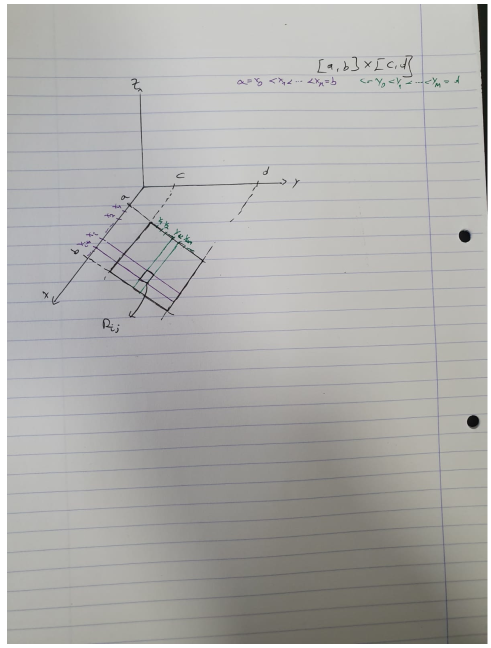
עבור $f$ חסומה בקטע סגור $[a,b]$ מחלקים את הקטע לחלוקה $P$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, בכל קטע $[x_i, x_{i+1}]$ לכל $0 \leq i \leq n-1$ נבחר נקודה $c_i$ בה "נדגום את הפונקציה" ואז סכום רימן הוא בדיוק סכום הדגימות האלו כפול אורכי הקטעים בחלוקה כלומר $x_{i+1} - x_i$ שיסומן $\Delta x_i$:

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$$

וידוע שככל שפרמטר החלוקה הולך לאפס (כלומר $\Delta x_i$ המקסימלי קטן) אז סכום רימן ישאף לאינטגרל.

**בשני משתנים (אינטואיטיבי):**

קודם כל אנחנו מתעניינים רק באינטגרלים מסויימים זאת אומרת בסופו של דבר תמיד נקבל מספר, ותמיד התחום יהיה חסום והפונקציה תהיה חסומה בתחום כלומר אין אינטגרלים מוכללים (קיים כזה דבר, לא בקורס).




בכמה משתנים נגדיר לפי אותה "רוח" קודם כל נסתכל על מלבן $R=[a,b]\times[c,d]=\left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^{2}:a\le x\le b,c\le y\le d\right\}$.
עבור $f\left(x,y\right)$ חסומה במלבן.
ניקח חלוקה $P$ לקטע $[a,b]$:

$$a=x_{0}<x_{1}<\ldots<x_{n-1}<x_{n}=b$$

וניקח חלוקה $Q$ לקטע $[c,d]$:

$$c=y_{0}<y_{1}<\ldots<y_{m}=d$$

נסתכל על $x_{i},x_{i+1},y_{j},y_{j+1}$ הם יוצרים איזשהו מלבן שלו אני קורא $R_{ij}$. נבחר $(t_{i},s_{j})\in R_{ij}$ בה נדגום את הפונקציה ואז בכל מלבן שכזה, הגובה שלו יקבע לפי $f\left(t_{i},s_{j}\right)$, סכום רימן הינו:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f\left(t_{i},s_{j}\right)\cdot\Delta x_{i}\Delta y_{j}$$

וכאשר נעדן החלוקות $P,Q$ יותר ויותר סכום הרימן ישאף לאינטגרל הכפול שאותו מסמנים באופן הבא:

$$\iint\limits_{R}f\left(x,y\right)dxdy$$

עבור $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ חסומה ועבור תחום $D\subseteq\mathbb{R}^2$ חסום שאינו מלבן, ניקח מלבן שמכיל אותו שנסמנו $R$ ונגדיר פונקציה:

$$g\left(x,y\right)=\begin{cases}f\left(x,y\right) & \left(x,y\right)\in D\\ 0 & \left(x,y\right)\in R\setminus D\end{cases}$$

ומגדירים:

$$\iint\limits_{D}f\left(x,y\right)dxdy:=\iint\limits_{R}g\left(x,y\right)dxdy$$

**משפטים:**

יהיו $R,R_1,R_2$ תחומים (חסומים וסגורים) ב$\mathbb{R}^2$ ותהיינה $f,g:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ רציפות בתחומים (ניתן לדבר על דרישה חלשה של אינטגרביליות אבל בקורס בכל הדברים נניח רציפות) ויהיו $a,b\in\mathbb{R}$:

- לינאריות:

$$\iint\limits_{R}\left(af+bg\right)dxdy=a\iint\limits_{R}fdxdy+b\iint\limits_{R}gdxdy$$

- אדיטיביות:
אם $R_1\cup R_2=R,R_1\cap R_2=\emptyset$ אזי:

$$\iint\limits_{R}fdxdy=\iint\limits_{R_1}fdxdy+\iint\limits_{R_2}fdxdy$$

הערה - המשפט עדיין נכון אם $R_1\cap R_2$ הוא "ממימד 1" כלומר מספר סופי של נקודות או אפילו עקום כלשהו.

- ערך הממוצע האינטגרלי, קיימת נקודה $\left(x_0,y_0\right)\in R$ כך ש

$$\iint\limits_{R}fdxdy=\underbrace{S\left(R\right)}_{*}\cdot f\left(x_0,y_0\right)$$

*כאשר $S\left(R\right)$ זהו השטח של $R$.

- מונוטונית של האינטגרל: אם לכל $\left(x,y\right)\in R$ מתקיים $f\left(x,y\right)\leq g\left(x,y\right)$ אזי:

$$\iint\limits_{R}fdxdy\leq\iint\limits_{R}gdxdy$$

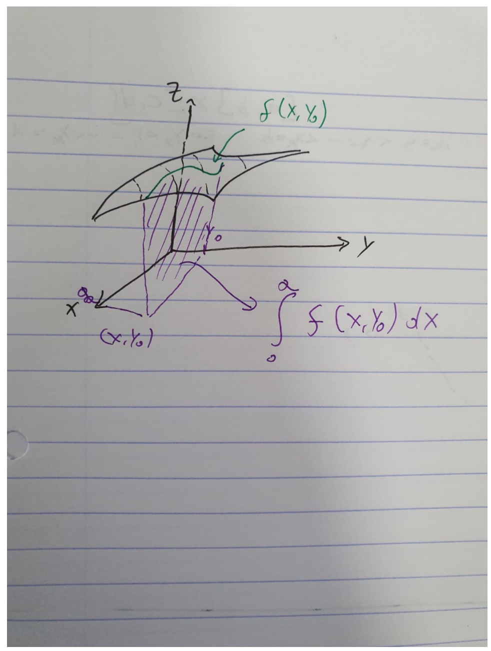
- מתקיים $\min_R f = m \leq f \leq M = \max_R f$ כי $f$ רציפה, ולכן לפי מונוטוניות נקבל:

$$m \cdot S(R) \leq \iint\limits_R f dxdy \leq M \cdot S(R)$$

- $\left|\iint_R f dxdy\right| \leq \iint_R |f| \, dxdy$.

## איך באמת מחשבים אינטגרלים רב מימדיים:

**רעיונית:**




מקבעים $y = y_0$ מקבלים ישר $(x, y_0)$ ערכי הפונקציה על הישר יוצרים גרף של פונקציה $f(x, y_0)$ זו פונקציה רק של $x$ ולכן אפשר לעשות לה אינטגרל כמו במשתנה יחיד, ומקבלים $g(y) = \int_0^a f(x,y)\,dx$, לפונקציה זו ניתן לעשות אינטגרל מ$c$ ל$d$ ונקבל

$$\int\limits_c^d \left( \int\limits_0^a f(x,y)\,dx \right) dy$$

משפט פוביני מפרמל רעיון זה:

**בא לעזרתנו משפט פוביני (למלבן):**

תהי $f$ רציפה במלבן $D=[a,b]\times[c,d]$. אזי:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right)dx=\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

**דוגמה:**

חשבו את $\iint_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy$ כאשר $D=[0,1]\times[0,1]$.

נשתמש במשפט פוביני $f(x,y)=\frac{x^2}{1+y^2}$ רציפה בכל המישור $\mathbb{R}^2$ כמנה של פולינומים שאינה מתאפסת, ולכן:

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1\frac{x^2}{1+y^2}dx\right)dy=\int\limits_0^1\frac{1}{1+y^2}\cdot\left(\int\limits_0^1 x^2dx\right)dy$$

$$=\int\limits_0^1\frac{1}{1+y^2}\cdot\left(\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1\right)dy=\frac{1}{3}\int\limits_0^1\frac{1}{1+y^2}dy=\frac{1}{3}\arctan y|_0^1=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4}=\boxed{\frac{\pi}{12}}$$

נראה שבאמת הסדר לא משנה ונחשב בכיוון ההפוך:

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1\frac{x^2}{1+y^2}dy\right)dx=\int\limits_0^1 x^2\underbrace{\left(\int\limits_0^1\frac{1}{1+y^2}dy\right)}_{*}dx$$

כל מה שמסומן בכוכבית זה אינטגרל של פונקציה שתלויה רק ב$y$ לפי $y$ כלומר זה מספר ואותו אפשר להוציא מהאינטגרל:

$$\int\limits_0^1\frac{1}{1+y^2}dy\cdot\int\limits_0^1 x^2dx=\frac{\pi}{12}$$

ובאמת זה בדיוק אותו הדבר.

**הגדרה:**

נגיד כי תחום $D\subseteq\mathbb{R}^2$ הוא נורמלי לפי $x$ אם הוא מהצורה:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:a\le x\le b,y_1(x)\le y\le y_2(x)\right\}$$

**הערה:**

באופן דומה מגדירים תחום נורמלי לפי $y$ (ייתכן כי ההגדרות הפוכות ונורמלי לפי $x$ זה כשאיקס בין שתי פונקציות של $y$).

**דוגמה:**

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\le x\le 1,0.5\cdot x^2\le y\le x^2\right\}$$

**משפט (פוביני לתחום נורמלי):**

תהי $f(x,y)$ רציפה ויהי $D$ תחום נורמלי לפי $x$ אזי:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$

**הערה:**

באופן דומה עבור $D$ תחום נורמלי לפי $y$ מתקיים

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_c^d\left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy$$

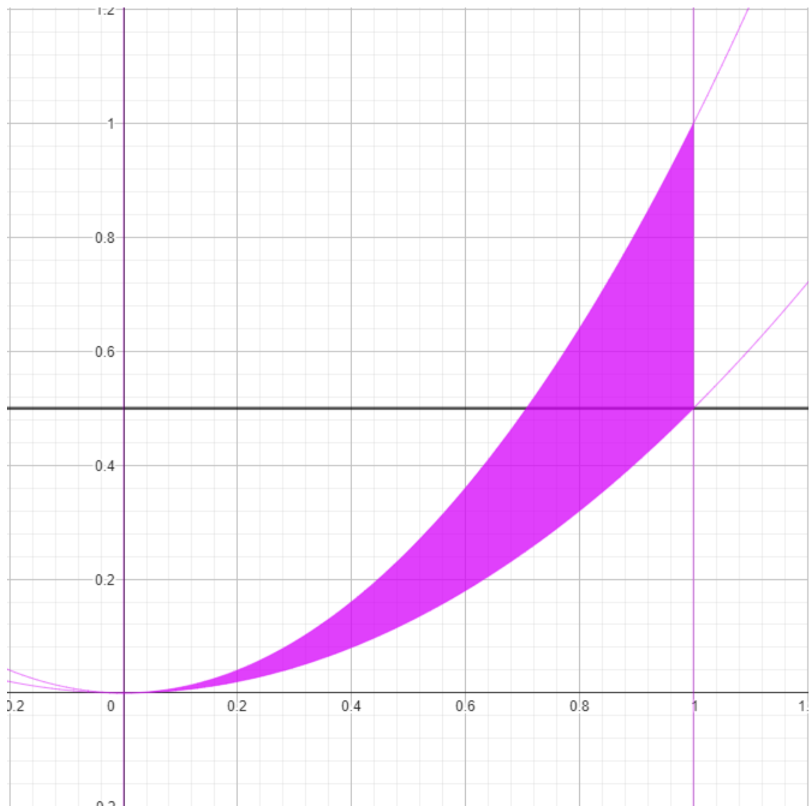
**דוגמה:**

נסתכל על התחום $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\le x\le 1,0.5\cdot x^2\le y\le x^2\right\}$ ממקודם ועל הפונקציה $f(x,y)=x^2y$. נרצה לחשב את $\iint_D f(x,y)\,dxdy$:
$f$ רציפה, $D$ תחום נורמלי לפי $x$ ולכן לפי פוביני נקבל כי:

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy&=\int\limits_0^1\left(\int\limits_{0.5x^2}^{x^2} x^2y dy\right)dx\\&=\int\limits_0^1 x^2\left(\left.\frac{y^2}{2}\right|_{y=0.5x^2}^{y=x^2}\right)dx\\&=\int\limits_0^1 x^2\left(\frac{x^4}{2}-\frac{x^4}{2}\cdot 0.5^4\right)dx\\&=\frac{15}{32}\cdot\int\limits_0^1 x^6dx\\&=\frac{15}{32}\cdot\left.\frac{x^7}{7}\right|_0^1\\&=\frac{15}{224}\end{aligned}$$

**החלפת סדר:**

ישנם תחומים הנורמלים לפי $x$ כך שניתן לכתוב אותם כאיחוד זר (עד כדי איזשהו עקום שלא משפיע על האינטגרל) של תחומים נורמלים לפי $y$, יכול להיות טוב כאשר לא ניתן לחשב את האינטגרל כאשר התחום נורמלי לפי איקס אבל אפשר אם הוא נורמלי לפי $y$.
למשל נסתכל על התחום $D$ ממקודם:



נרצה להציג אותו כאיחוד של תחומים הנורמלים לפי $y$:
קודם כל ניתן לראות ש$0 \leq y \leq 1$ בכל התחום, עד $y = 0.5$ ידוע כי $0.5x^2 \leq y \leq x^2$ ולכן נגדיר $\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{2y}$

$$D_1 = \left\{0 \leq y \leq 0.5, \sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{2y}\right\}$$

זה בעצם מה שמתחת לקו השחור.
מעל הקו השחור $0.5 \leq y \leq 1$, $\sqrt{y} \leq x \leq 1$. ולכן:

$$D_2 = \{0.5 \leq y \leq 1, \sqrt{y} \leq x \leq 1\}$$

ובאמת עד כדי הישר $y=0.5$ שהוא ישר ולכן "ממימד 1" ולכן לא משפיע על האינטגרל כלומר $D=D_1\cup D_2$.

**דוגמה לפוביני עבור תחום נורמלי לפי $y$:**

ניקח את אותו תחום $D=D_1\cup D_2$ ואת הפונקציה $f\left(x,y\right)=2x+3y^2+3$.
$f$ פונקציה ולכן ניתן להשתמש בפוביני (השתמשנו במעבר השני, במעבר הראשון זה אדטיביות)

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{D} f\left(x,y\right)dxdy &= \iint\limits_{D_1} f\left(x,y\right)dxdy+\iint\limits_{D_2} f\left(x,y\right)dxdy\\
&=\int\limits_{0}^{0.5}\left(\int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2y}}2x+3y^2+3dx\right)dy+\int\limits_{0.5}^{1}\left(\int\limits_{\sqrt{y}}^{1}2x+3y^2+3dx\right)dy\\
&=\int\limits_{0}^{0.5}\left(x^2+3y^2x+3x\Big|_{x=\sqrt{y}}^{x=\sqrt{2y}}\right)dy+\int\limits_{0.5}^{1}\left(x^2+3y^2x+3x\Big|_{x=\sqrt{y}}^{x=1}\right)dy\\
&=\int\limits_{0}^{0.5}\left(y+3y^2\left(\sqrt{2y}-\sqrt{y}\right)+3\sqrt{2y}-\sqrt{y}\right)dy+\int\limits_{0.5}^{1}\left(1+3y^2+3-\left(y+3y^2\sqrt{y}+3\sqrt{y}\right)\right)dy\\
&=\int\limits_{0}^{0.5}\left(y+\left(3\sqrt{2}-3\right)\cdot y^{2.5}+\left(3\sqrt{2}-3\right)y^{0.5}\right)dy+\int\limits_{0.5}^{1}\left(3y^2+4-y-3y^{2.5}-3y^{0.5}\right)dy\\
&=\frac{y^2}{2}+\left(3\sqrt{2}-3\right)\cdot\frac{y^{3.5}}{3.5}+\left(3\sqrt{2}-3\right)\frac{y^{1.5}}{1.5}\Big|_{0}^{0.5}+y^3+4y-\frac{y^2}{2}-3\cdot\frac{y^{3.5}}{3.5}-3\cdot\frac{y^{1.5}}{1.5}\Big|_{0.5}^{1}
\end{aligned}$$

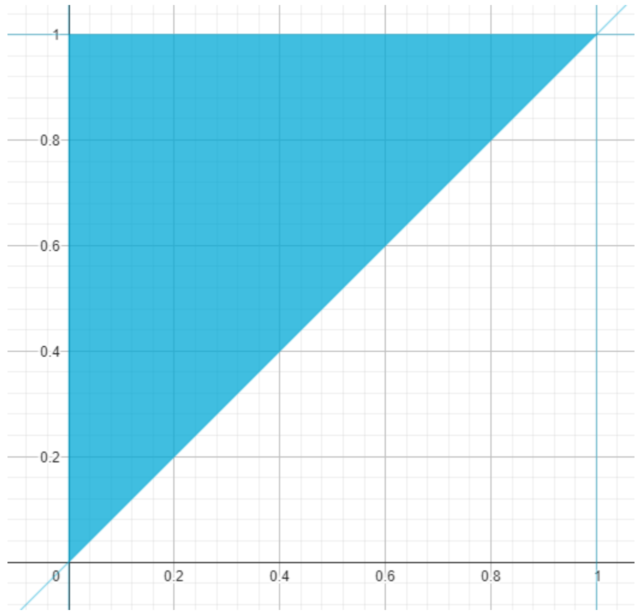
זה יוצא איזשהו מספר (מוזמנים לשים בוולפארם אלפא ולהגיד לי איזה).
עכשיו נראה דוגמה ללמה שינוי סדר אינטגרציה זה חשוב נראה שעבור סדר מסויים זה לא עובד ועבור הסדר השני זה כן עובד.

**תרגיל:**

תהי $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ המוגדרת לפי $f\left(x,y\right)=e^{-y^2}$, נסתכל על התחום $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\leq x\leq 1,x\leq y\leq 1\right\}$
חשבו את $\iint_D f\left(x,y\right)dxdy$.

**פתרון:**

נצייר את התחום:




לפי איך שהתחום הנתון כתוב רואים כי התחום נורמלי לפי $x$ ננסה לחשב את האינטגרל באופן זה:

$$\iint\limits_{D} f\left(x,y\right)dxdy=\int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{x}^{1}e^{-y^{2}}dy\right)dx$$

כאן נתקלים בבעיה כי ל $e^{-y^{2}}$ אין פונקציה קדומה אלמנטרית ולכן לא ניתן לפתור את האינטגרל הפנימי. (הערה - זה לא שהמשפט נכשל אלא פשוט את האינטגרל הפנימי אני לא יודע לחשב)
מהציור ניתן לראות כי התחום נורמלי לפי $y$ באופן הבא:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^{2}:0\leq y\leq1,0\leq x\leq y\right\}$$

ננסה לחשב את האינטגרל באופן זה:

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^y e^{-y^2}dx\right)dy \\ &= \int_0^1 \left(ye^{-y^2}\right)dy \\ &= -\frac{1}{2}\cdot e^{-y^2}\Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}-1\right) \\ &= \frac{e-1}{2e}\end{aligned}$$

## דוגמאות יותר מעניינות/קשות להחלפת סדר אינטגרציה:

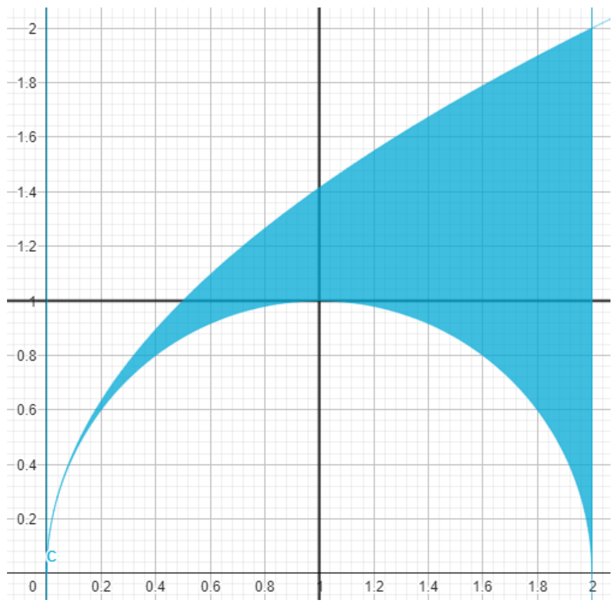
**תרגיל:**

החליפו סדר אינטגרציה באינטגרל:

$$\int_0^2 \left(\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy\right)dx$$

**פתרון:**

נצייר את התחום:




יש לנו שתי פונקציות $y_1\left(x\right)=\sqrt{2x-x^2}, y_2\left(x\right)=\sqrt{2x}$.
נשים לב כי

$$y=\sqrt{2x-x^2} \iff y^2+x^2-2x=0 \iff y^2+\left(x-1\right)^2=1$$

כלומר זהו מעגל ברדיוס $1$ שמרכזו בנקודה $(1,0)$. נרצה להפריד את $x$ כפונקציה של $y$:

$$\left(x-1\right)^2=1-y^2 \Rightarrow x-1=\pm\sqrt{1-y^2} \Rightarrow x=1\pm\sqrt{1-y^2}$$

וכי $y^2=2x \Leftarrow y=\sqrt{2x}$ כלומר $x=0.5y^2$.
נתחיל לחלק את התחום כך שנקבל תחום נורמלי לפי $y$:

$$D_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq y\leq 1, 0.5y^2\leq x\leq 1-\sqrt{1-y^2}\right\}$$

$$D_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq y\leq 1, 1+\sqrt{1-y^2}\leq x\leq 2\right\}$$

$$D_3=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\leq y\leq 2, 0.5y^2\leq x\leq 2\right\}$$

לכן האינטגרל בסדר המוחלף הוא:

$$\int\limits_0^1 \left( \int\limits_{0.5y^2}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx \right) dy + \int\limits_0^1 \left( \int\limits_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x,y)\,dx \right) dy + \int\limits_1^2 \left( \int\limits_{0.5y^2}^{2} f(x,y)\,dx \right) dy$$

**בשלושה משתנים:**

**דוגמה:**

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^1 \left( \int\limits_0^2 \left( \int\limits_2^3 xyzdz \right) dy \right) dx &= \int\limits_0^1 \left( \int\limits_0^2 \left( xy \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_{z=2}^{z=3} \right) dy \right) dx \\
&= 2.5 \int\limits_0^1 \left( \int\limits_0^2 xydy \right) dx \\
&= 2.5 \cdot \int\limits_0^1 \left( x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=2} \right) dx \\
&= 5 \int\limits_0^1 xdx \\
&= 5 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=1} \\
&= 2.5
\end{aligned}$$

**הערה:**

איך נראה תחום נורמלי, $a \le x \le b$ ואז $y_1(x) \le y \le y_2(x)$ ואז $z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$.

**דוגמה:**

נסתכל על התחום:

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 2, 0 \le y \le z, 0 \le x \le y \right\}$$

זה תחום נורמלי כי $z$ בין שני קבועים, $y$ בין שתי פונקציות של $z$, $y_1(z) = 0, y_2(z) = z$ ו־$x$ הוא בין שתי פונקציות של $y, z$ כאשר $x_1(y,z) = 0, x_2(y,z) = y$.

נחשב את האינטגרל של הפונקציה $xyz$ על התחום $D$:

$$\begin{aligned}
\iiint_D xyzdxdydz &= \int\limits_0^2 \left( \int\limits_0^z \left( \int\limits_0^y xyzdx \right) dy \right) dz \\
&= \int\limits_0^2 \left( \int\limits_0^z \left( yz \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=y} \right) dy \right) dz \\
&= \int\limits_0^2 \left( \int\limits_0^z \frac{y^3 z}{2} dy \right) dz \\
&= \int\limits_0^2 \left( \frac{z}{2} \cdot \frac{y^4}{4} \Big|_{y=0}^{y=z} \right) dz \\
&= \int\limits_0^2 \frac{z^5}{8} dz \\
&= \frac{1}{8} \cdot \frac{z^6}{6} \Big|_{z=0}^{z=2} \\
&= \frac{2^6}{2^3 \cdot 2 \cdot 3} \\
&= \boxed{\frac{4}{3}}
\end{aligned}$$

**תרגיל:**

חשבו את האינטגרל $\iiint_G f(x,y,z)dxdydz$ כאשר $f(x,y,z) = 1 - x$.
כאשר $G$ היא הפרימידה שפיאותיה הם מישורי הצירים (כלומר $xy, xz, yz$) והמישור $3x + 2y + z - 6 = 0$.

**פתרון:**

נשים לב כי נקודות החיתוך עם מישורי הצירים הם: $(0,3,0), (2,0,0), (0,0,6)$.
נראה שזה תחום נורמלי כמו שכתבנו למעלה, נרצה ש$z$ יהיה בין שתי פונקציות של $x, y$, $0 \le z$ כי הוא מעל המישור $xy$. הוא מתחת למישור $3x + 2y + z - 6 = 0$ כלומר $z \le -3x - 2y + 6$.
במישור $xy$ התחום שקיבלנו שנסמנו $D$ הוא משולש, שצלעתיו הם על ציר ה$x$ ציר ה$y$ והישר המתקבל מהמישור על ידי הצבה $z = 0$ כלומר $z = 0 \wedge 3x + 2y = 6$
כלומר את התחום $D$ אפשר להציג באופן הבא:

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \frac{6-3x}{2}, 0 \le x \le 2 \right\}$$

סך הכל קיבלנו כי:

$$G=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^{3}:0\leq x\leq 2,0\leq y\leq\frac{6-3x}{2},0\leq z\leq -3x-2y+6\right\}$$

$$\begin{aligned}
\iiint_{G}(1-x)\,dxdydz &= \int\limits_{0}^{2}\left(\int\limits_{0}^{3-1.5x}\left(\int\limits_{0}^{-3x-2y+6}(1-x)\,dz\right)dy\right)dx\\
&= \int\limits_{0}^{2}\left(\int\limits_{0}^{3-1.5x}\left((1-x)(-3x-2y+6)\right)dy\right)dx\\
&= \int\limits_{0}^{2}\left(\int\limits_{0}^{3-1.5x}\left(3x^{2}-2y+2xy+6-9x\right)dy\right)dx\\
&= \int\limits_{0}^{2}\left(3x^{2}y-y^{2}+xy^{2}+6y-9xy\Big|_{y=0}^{y=3-1.5x}\right)dx\\
&= \int\limits_{0}^{2}\left(3x^{2}(3-1.5x)-(3-1.5x)^{2}+x(3-1.5x)^{2}+6(3-1.5x)-9x(3-1.5x)\right)dx\\
&= \int\limits_{0}^{2}\left(9x^{2}-4.5x^{3}-9+9x-2.25x^{2}+9x-9x^{2}+2.25x^{3}+18-9x-27x+13.5x^{2}\right)dx\\
&= \int\limits_{0}^{2}\left(-2.25x^{3}+11.25x^{2}-18x+9\right)dx\\
&= -2.25\cdot\frac{x^{4}}{4}+11.25\cdot\frac{x^{3}}{3}-9x^{2}+9x\Big|_{x=0}^{x=2}\\
&= 3
\end{aligned}$$

**חישוב נפחים באמצעות אינטגרלים:**

במשתנה יחיד $\int_{a}^{b}1dx=b-a=|[a,b]|$.
בכמה משתנים $\iint_{D}1dxdy=S(D),\iiint_{V}1dxdydz=Vol(V)$ כלומר אינטגרל של הפונקציה 1 על תחום $D\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יתן את הנפח ה$n$ מימדי של $D$.

**דוגמה:**

מצאו את גודל השטח הכלוא בין הפרבולה $y=-x^{2}+2x$ ו$y=x^{2}$ כאשר $1\leq x\leq 3$.

נגדיר $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\leq x\leq 3, -x^2+2x\leq y\leq x^2\right\}$ רוצים לחשב את $S\left(D\right)$,

$$\begin{aligned}
S\left(D\right) &= \iint\limits_{D} 1dxdy \\
&= \int\limits_{1}^{3}\int\limits_{-x^2+2x}^{x^2} 1dydx \\
&= \int\limits_{1}^{3}\left(x^2+x^2-2x\right)dx \\
&= \int\limits_{1}^{3}\left(2x^2-2x\right)dx \\
&= \frac{2}{3}x^3-x^2\Big|_{1}^{3} \\
&= \frac{2}{3}\cdot 3^3-3^2-\frac{2}{3}+1 \\
&= \boxed{\frac{28}{3}}
\end{aligned}$$

**תרגיל:**

חשבו את נפח הפירמידה בתרגיל ממקודם.

**פתרון:**

הפירמידה היא $G$ שפיאותיה הם מישורי הצירים (כלומר $xy,xz,yz$) והמישור $3x+2y+z-6=0$. ראינו ש

$$G=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\leq x\leq 2, 0\leq y\leq \frac{6-3x}{2}, 0\leq z\leq -3x-2y+6\right\}$$

כעת נחשב את נפחה:

$$
\begin{aligned}
Vol\left(G\right) &= \iiint_G 1dxdydz \\
&= \int_0^2 \int_0^{3-1.5x} \int_0^{-3x-2y+6} 1dzdydx \\
&= \int_0^2 \int_0^{3-1.5x} \left(-3x-2y+6\right)dydx \\
&= \int_0^2 \left(-3xy-y^2+6y\right)\Big|_0^{3-1.5x} dx \\
&= \int_0^2 \left(-3x\left(3-1.5x\right)-\left(3-1.5x\right)^2+6\left(3-1.5x\right)\right)\Big|_{y=0}^{y=3-1.5x} dx \\
&= \int_0^2 2.25x^2-9x+9dx \\
&= \frac{9}{4}\cdot\frac{x^3}{3}-9\frac{x^2}{2}+9x\Big|_0^2 \\
&= 6-18+18 \\
&= 6
\end{aligned}
$$

כלומר נפח הפירמידה $G$ הוא 6.

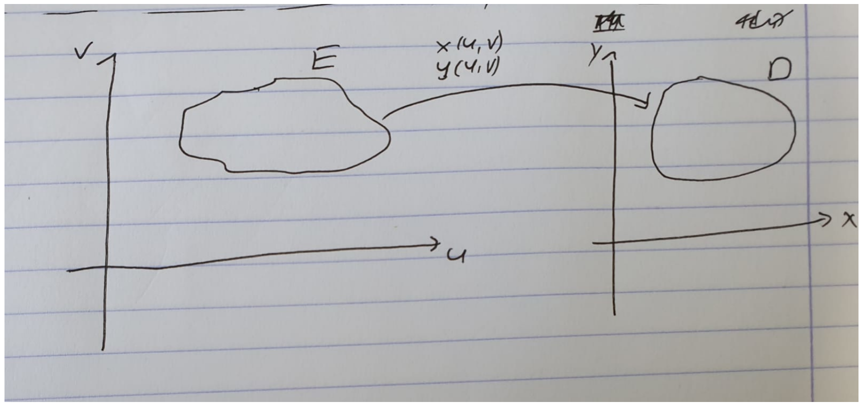
## החלפת משתנים באינטגרל:

תזכורת למשתנה יחיד:

$$\int_a^b f\left(x\right)dx$$

$x\left(t\right)$ גזירה ברציפות (ועוד כל מיני תנאים)

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = \int_{[a,b]} f\left(x\right)dx = \int_{x^{-1}[a,b]} f\left(x\left(t\right)\right)x'\left(t\right)dt = \int_{x^{-1}(a)}^{x^{-1}(b)} f\left(x\left(t\right)\right)x'\left(t\right)dt$$




הציור אולי לא עקבי עם המשפט שבא אחרי, המשפט נכון ואולי הציור לא.

$$\iint\limits_{D} f\left(x,y\right)dxdy=\iint\limits_{E} f\left(x\left(u,v\right),y\left(u,v\right)\right)\underbrace{\left|J\right|}_{*}dudv$$

אם "מעתיקים על עיוור אז חוץ מ* הכל מאוד הגיוני, ו* זה איזשהו ביטוי נגזרתי שהוא היעקוביאן והוא מופיע בערך מוחלט

$$\left|\det\left(\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)}\right)\right|=\left|\det\left(\begin{pmatrix}x_{u} & x_{v}\\ y_{u} & y_{v}\end{pmatrix}\right)\right|=\left|x_{u}y_{v}-y_{u}x_{v}\right|$$

עד פה אינטואיציה.

**משפט (החלפת משתנים ב $\iint$):**

תהי $f$ רציפה בתחום $D\subseteq\mathbb{R}^{2}$ יהיו $\begin{cases}x\left(u,v\right)\\ y\left(u,v\right)\end{cases}$ גזירות ברציפות. נניח כי הן מגדירות העתקה הפיכה בין התחום $D$ לתחום $E$ במישור $\left(u,v\right)$ ובנוסף נניח כי:

$$J=\det\left(\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)}\right)=\det\left(\begin{pmatrix}x_{u} & x_{v}\\ y_{u} & y_{v}\end{pmatrix}\right)$$

לא מתאפס בתחום $E$.
אזי:

$$\iint\limits_{D} f\left(x,y\right)dxdy=\iint\limits_{E} f\left(x\left(u,v\right),y\left(u,v\right)\right)\left|J\right|dudv$$

**הערות:**

- לא חייבים שהיעקוביאן לא מתאפס בכלל, מספיק לדרוש שהוא מתאפס רק על קבוצה שלא משפיעה על האינטגרל (מספר סופי של נקודות או איזשהו עקום).
- החלפות משתנים יהיו בעיקר בשביל התחום גם בשביל הפונקציה אבל בעיקר בשביל התחום.

**דוגמאות:**

1. חשבו את $\iint_D \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dxdy$ כאשר $D$ הוא התחום הכלוא בין $y = x, y = \sqrt{3}x$ והמעגלים $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4$. כאשר $x, y \geq 0$.

נבצע החלפת משתנים לקורדינאטות פולריות $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $r$ הוא הרדיוס שהוא $r = \sqrt{x^2+y^2}$ ולכן הוא נע בין 1 ל2 $1 \leq r \leq 2$.
$\theta$ תלך בין $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ לבין $\arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$. $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$. כלומר קיבלנו את המלבן $E = [1,2] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$.
ההעתקה היא הפיכה כי יודעים לחשב הופכית (ו $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ כלומר יש חחע).

$$J = \det\left(\begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

והוא שונה מאפס בתחום כי $r$ רץ בין 1 ל2.

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dxdy &= \int\limits_1^2 \left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{\theta}_{\arctan\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}} \cdot \underbrace{r}_{|J|} \, d\theta\right) dr \\
&= \int\limits_1^2 \left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \theta \cdot r \, d\theta\right) dr \\
&= \int\limits_1^2 \left( r\frac{\theta^2}{2}\bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \right) dr \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{16}\right) \int\limits_1^2 r dr \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{16}\right) \cdot \frac{r^2}{2}\bigg|_1^2 \\
&= \frac{3\pi^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right)
\end{aligned}$$

**הערות על משפט החלפת המשתנים:**

אם ההעתקה היא לינארית $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au+bv \\ cu+dv \end{pmatrix}$,

$$J = \det\left(\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \det A$$

וידוע שהעתקה לינארית היא הפיכה אם ורק אם המטריצה $A$ הפיכה אם ורק אם $J = \det A \neq 0$. כלומר במקרה של ההעתקה לינארית שתי הדרישות האלו קורסות לאותה דרישה.

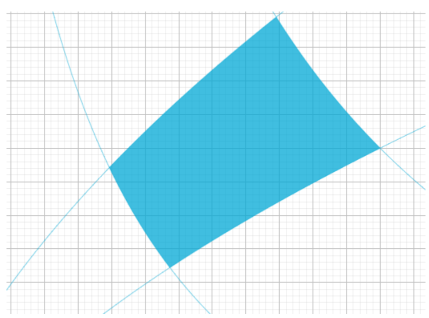
אם ההעתקה היא לא לינארית אז אלו דרישות שונות.

לפי משפט הפונקציה ההפוכה אנחנו יודעים שאם היעקוביאן שונה מ0 בנקודה אז ההעתקה היא הפיכה בסביבה של הנקודה, אבל זה לא נכון שאם היעקוביאן שונה מ0 בתחום כלשהו אז ההעתקה היא הפיכה בתחום הזה, דוגמה נגדית ניקח פולריות $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ כאשר $r \in [1,2]\,, \theta \in [0, 6\pi]$.

את היעקוביאן חישבנו והוא יוצא $r$ ששונה באפס בתחום, אבל ברור שההעתקה אינה חחע כי $\theta = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi$ מתקבלים אותם ערכים.

2. נרצה לחשב את $\iint_D \sqrt{xy}dxdy$, כאשר $D$ יהיה השטח הכלוא בין הפרבולות $y^2 = 6x, y^2 = 3x$, ובין ההיפרבולות $y = \frac{9}{x}, y = \frac{4}{x}$.

לשם המחשה נצייר את התחום:



ניתן לראות לפי התחום כי יהיה מאוד נוח להגדיר $\begin{cases} u(x,y) = \frac{y^2}{x} \\ v(x,y) = xy \end{cases}$ לכן נשים לב כי במישור $u, v$ נקבל את התחום $E = [3,6] \times [4,9]$ כלומר קיבלנו מלבן.

$\sqrt{xy}$ היא פונקציה אלמנטרית ולכן רציפה בכל תחום הגדרתה שהוא $\mathbb{R}^2$ ולכן בפרט רציפה ב$D$.

$\begin{cases} u = \frac{y^2}{x} \Rightarrow x = \frac{y^2}{u} \\ v = xy \Rightarrow v = \frac{y^3}{u} \end{cases}$ כלומר $y^3 = uv$ כלומר $y = \sqrt[3]{uv}$ ולכן $x = \frac{y^2}{u} = \frac{\sqrt[3]{u^2v^2}}{u} = u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}$. ואלו באמת גזירות ברציפות במלבן $E$.

למה ההעתקה $(x(u,v), y(u,v))$ הפיכה, התשובה "הלא הוכחתית" כי מצאנו העתקה הופכית יש לנו $\begin{cases} x(u,v) & u(x,y) \\ y(u,v) & v(x,y) \end{cases}$.

אפשר גם ממש להוכיח ישירות שהיא חחע ועל, לא נעשה את זה.
לפי משפט הפונקציה ההפוכה (אולי אפשר גם לפי כלל השרשרת):

$$\det\left(J_{f^{-1}}\right)=\frac{1}{\det\left(J_f\right)}$$

לכן במקום לחשב את $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ ניתן לחשב את $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ לעשות לו דטרמיננטה ואז $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ יהיה בדיוק אחד חלקי:

$$\frac{\partial\left(u,v\right)}{\partial\left(x,y\right)}=\begin{pmatrix}-\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x}\\ y & x\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(\begin{pmatrix}-\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x}\\ y & x\end{pmatrix}\right)=-\frac{y^2}{x^2}\cdot x-\frac{2y\cdot y}{x}=-\frac{3y^2}{x}=-3u$$

$$J=\left|\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)}\right|=\frac{1}{-3u}\Rightarrow|J|=\frac{1}{3u}$$

$$\iint\limits_D\sqrt{xy}dxdy=\iint\limits_E\sqrt{v}\cdot\frac{1}{3u}dudv$$

ניזכר כי $E$ הוא מלבן, ולכן לפי פוביני:

$$\begin{aligned}\iint\limits_E\sqrt{v}\cdot\frac{1}{3u}dudv&=\int_3^6\int_4^9\sqrt{v}\cdot\frac{1}{3u}dvdu\\&=\int_3^6\frac{1}{3u}\underbrace{\int_4^9\sqrt{v}dvdu}_{*}\\&=\int_4^9\sqrt{v}dv\cdot\int_3^6\frac{1}{3u}du\\&=\frac{2}{3}\cdot v^{\frac{3}{2}}\Big|_4^9\cdot\frac{1}{3}\ln u\Big|_3^6\\&=\left(18-\frac{16}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}\ln 2\\&=2.9266\end{aligned}$$

**דוגמה מגניבה אינטגרל גאוס:**

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

אין אפשרות לחשב בכלים של משתנה יחיד, אבל איכשהו נצליח לפתור בכלים של שני משתנים.

נסתכל על הפונקציה $f\left(x,y\right) = e^{-x^2-y^2}$, נגדיר $I_a = \iint_{D_a} f\left(x,y\right)dxdy$ כאשר $D_a = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \le a^2\right\}$.

נחשב את $I_a$ על ידי מעבר לפולריות, $\begin{cases} x = r\cos\theta & r\in[0,a] \\ y = r\sin\theta & \theta\in[0,2\pi) \end{cases}$ היעקוביאן הוא $r$ שאמנם מתאפס בנקודה אחת אבל בגלל שזו רק נקודה אחת זה לא משפיע על האינטגרל וזה לא מעניין.

$$\begin{aligned}
I_a &= \iint\limits_{D_a} e^{-x^2-y^2}dxdy \\
&= \int\limits_0^a \left(\int\limits_0^{2\pi} e^{-r^2}\cdot rd\theta\right)dr \\
&= 2\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\int\limits_0^a -2re^{-r^2}dr \\
&= -\pi\cdot e^{-r^2}\Big|_0^a \\
&= -\pi\cdot\left(e^{-a^2}-1\right) \\
&= \pi\left(1-e^{-a^2}\right)
\end{aligned}$$

בנוסף נגדיר $J_a = \iint_{R_a} f\left(x,y\right)dxdy$ כאשר $R_a$ הוא הריבוע בגודל $2a$ על $2a$ שצלעותיו מקבילות לצירים והוא סימטרי ביחס לצירים.

נחשב לפי פוביני:

$$
\begin{aligned}
J_a &= \iint\limits_{R_a} e^{-x^2-y^2}dxdy \\
&= \int\limits_{-a}^{a}\left(\int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}dx\right)dy \\
&= \int\limits_{-a}^{a} e^{-y^2}\cdot\left(\int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}dx\right)dy \\
&= \int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}dx\cdot\int\limits_{-a}^{a} e^{-y^2}dy \\
&= \left(\int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}dx\right)^2
\end{aligned}
$$

נשים לב כי $I_a \leq J_a \leq I_{2a}$. זה נכון כי המעגל ברדיוס $a$ מוכל בריבוע $R_a$ שמוכל במעגל ברדיוס $2a$ ומכיוון שהפונקציה היא אי שלילית אז ככל שעושים אינטגרל על תחום גדול יותר ערך האינטגרל יכול רק לגדול.

$$\pi\left(1-e^{-a^2}\right) \leq \left(\int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}dx\right)^2 \leq \pi\left(1-e^{-(2a)^2}\right)$$

נשאיף את $a \longrightarrow \infty$ ונעשה סנדוויץ שני הקצוות שואפים ל$\pi$ ולכן גם מה שבאמצע שואף ל$\pi$.

כמעט שמה רוצים להגיד $\lim_{a\longrightarrow\infty}\left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\right)^2 = \pi$ ולכן $\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \pi$ ולכן $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

כמו שזה כתוב זה לא נכון כי לא ככה הגדרנו $\int_{-\infty}^{\infty}$ אלא צריך לחלק באיזושהי נקודה באמצע לקבל שני אינטגרלים מוכללים לבדוק ששניהם מתכנסים ואז $\int_{-\infty}^{\infty}$שווה לסכומים.

הסיבה שבכל זאת נכון זה כי הפונקציה $e^{-x^2}$ היא זוגית (כלומר $e^{-x^2} = e^{-(-x)^2}$) ולכן $\int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx = \int_{-a}^{0} e^{-x^2}dx + \int_{0}^{a} e^{-x^2}dx = 2\int_{0}^{a} e^{-x^2}dx$.

**דוגמה:**

חשבו את $\iint_D \frac{x+3y}{x^4}\cdot e^{\frac{y}{x^3}}dxdy$ כאשר $D = \left\{(x,y) : \frac{1}{2} - x \leq y \leq 1-x, x^3 \leq y \leq 4x^3\right\}$.

נשים לב כי את התחום אפשר גם לכתוב באופן הבא:

$$D = \left\{(x,y) : \frac{1}{2} \leq x+y \leq 1, 1 \leq \frac{y}{x^3} \leq 4\right\}$$

כלומר אם נגדיר $u\left(x,y\right)=x+y, v\left(x,y\right)=\frac{y}{x^{3}}$ נקבל בדיוק מלבן כאשר $u\in\left[\frac{1}{2},1\right], v\in$ $[1,4]$. נסמן $E=\left[\frac{1}{2},1\right]\times\left[1,4\right]$.

$$\left|\frac{\partial\left(u,v\right)}{\partial\left(x,y\right)}\right|=\begin{vmatrix}u_{x} & u_{y}\\ v_{x} & v_{y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -3\cdot\frac{y}{x^{4}} & \frac{1}{x^{3}}\end{vmatrix}=\frac{1}{x^{3}}+\frac{3y}{x^{4}}=\frac{x+3y}{x^{4}}$$

נקבל כי

$$J=\frac{1}{\left|\frac{\partial\left(u,v\right)}{\partial\left(x,y\right)}\right|}=\frac{x^{4}}{x+3y}$$

שזה בדיוק יצטמצם עם ה$\frac{x+3y}{x^{4}}$ שמופיע כבר באינטגרל. לכן נקבל:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D}\frac{x+3y}{x^{4}}\cdot e^{\frac{y}{x^{3}}}dxdy&=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\int\limits_{1}^{4}e^{v}dv\right)du\\&=\frac{1}{2}\cdot e^{v}\Big|_{1}^{4}\\&=\frac{1}{2}\left(e^{4}-e\right)\end{aligned}$$

**דוגמה לקורדינאטות גליליות:**

חשבו את $\iiint_{V}\left(x+y+z\right)dxdydz$ כאשר

$$V=\left\{ \left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^{3}:\sqrt{x^{2}+y^{2}}\le z\le\sqrt{4-x^{2}-y^{2}}\right\}$$

($z^{2}=x^{2}+y^{2}, z^{2}=4-x^{2}-y^{2}\Rightarrow x^{2}+y^{2}+z^{2}=4$)
הקורדינאטות גליליות:

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}$$

$x^{2}+y^{2}=r^{2}$ כלומר $r\le z\le\sqrt{4-r^{2}}$. בקורדינאטות גליליות באופן כללי $\theta$ הוא בין 0 ל$2\pi$.
ידוע כי $r$ הוא אי שלילי כלומר $r\ge0$, וכן $r\le\sqrt{4-r^{2}}$ כלומר $r^{2}\le4-r^{2}$ ולכן $r^{2}\le2$ ונקבל כי $r\le\sqrt{2}$. כלומר $0\le r\le\sqrt{2}$.
כלומר קיבלנו במישור $r,\theta,z$ את התחום:

$$G=\left\{ 0\le r\le\sqrt{2},0\le\theta\le2\pi,r\le z\le\sqrt{4-r^{2}}\right\}$$

הפונקציה היא

$$x+y+z=r\left(\cos\theta+\sin\theta\right)+z$$

נחשב את היעקוביאן:

$$\left|\frac{\partial\left(x,y,z\right)}{\partial\left(r,\theta,z\right)}\right|=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r$$

ולכן:

$$\begin{aligned}\iiint_V x+y+zdxdydz &= \iiint_G \left(r\left(\cos\theta+\sin\theta\right)+z\right)rdrd\theta dz\\ &=\int\limits_0^{\sqrt{2}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_r^{\sqrt{4-r^2}}\left(r^2\cos\theta+r^2\sin\theta+rz\right)dzd\theta dr\\ &=\int\limits_0^{\sqrt{2}}\int\limits_0^{2\pi} z\left(r^2\cos\theta+r^2\sin\theta\right)+r\cdot\frac{z^2}{2}\bigg|_{z=r}^{z=\sqrt{4-r^2}}d\theta dr\end{aligned}$$

$$\int\limits_0^{\sqrt{2}}\int\limits_0^{2\pi} z\left(r^2\cos\theta+r^2\sin\theta\right)+r\cdot\frac{z^2}{2}\bigg|_{z=r}^{z=\sqrt{4-r^2}}d\theta dr=\int\limits_0^{\sqrt{2}}\int\limits_0^{2\pi}\left(\sqrt{4-r^2}-r\right)\left(r^2\cos\theta+r^2\sin\theta\right)+\frac{r}{2}\left(4-r^2-r^2\right)d$$

כל הגורמים שיש בהן $\sin\theta$ או $\cos\theta$ כשנעשה אינטגרל $d\theta$ מכיוון שעושים אינטגרל על מחזור שלם של הפונקציה $(0\longrightarrow 2\pi)$ אז זה יתאפס.
ולכן באינטגרל האחרון שקיבלנו בסוף הוא יצא שווה ל

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\sqrt{2}}\int\limits_0^{2\pi}\frac{r}{2}\left(4-r^2-r^2\right)d\theta dr &= \int\limits_0^{\sqrt{2}}\theta\cdot\left(2r-r^3\right)\Big|_0^{2\pi}dr\\ &=2\pi\cdot\int\limits_0^{\sqrt{2}}2r-r^3dr\\ &=2\pi\cdot r^2-\frac{r^4}{4}\bigg|_0^{\sqrt{2}}\\ &=2\pi\cdot(2-1)\\ &=\boxed{2\pi}\end{aligned}$$

**קורדינאטות כדוריות:**

נמצא את נפח הכדור $x^2+y^2+z^2=R^2$ נסמן את הכדור

$$B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le R^2\right\}$$

ניזכר כי $Vol\left(B\right)=\iiint_B 1dxdydz$.
נשתמש בקורדינאטות כדוריות:

$$\begin{cases} x=\rho\sin\theta\cos\phi & 0\le\rho\le R\\ y=\rho\sin\theta\sin\phi & 0\le\theta\le\pi\\ z=\rho\cos\theta & 0\le\phi\le2\pi\end{cases}$$

נחשב את היעקוביאן:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial\left(x,y,z\right)}{\partial\left(\rho,\theta,\phi\right)}\right| &= \begin{vmatrix}\sin\theta\cos\phi & \rho\cos\theta\cos\phi & -\rho\sin\theta\sin\phi\\ \sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\sin\phi & \rho\sin\theta\cos\phi\\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0\end{vmatrix}\\
&=\cos\theta\cdot\begin{vmatrix}\rho\cos\theta\cos\phi & -\rho\sin\theta\sin\phi\\ \rho\cos\theta\sin\phi & \rho\sin\theta\cos\phi\end{vmatrix}+\rho\sin\theta\cdot\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\phi & -\rho\sin\theta\sin\phi\\ \sin\theta\sin\phi & \rho\sin\theta\cos\phi\end{vmatrix}\\
&=\cos\theta\left(\rho^2\cos^2\phi\cos\theta\sin\theta+\rho^2\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta\right)+\rho\sin\theta\left(\rho\sin^2\theta\cos^2\phi+\rho\sin^2\theta\sin^2\phi\right)\\
&=\cos\theta\left(\rho^2\cos\theta\sin\theta\left(\underbrace{\cos^2\phi+\sin^2\phi}_{1}\right)\right)+\rho\sin\theta\left(\rho\sin^2\theta\left(\underbrace{\cos^2\phi+\sin^2\phi}_{1}\right)\right)\\
&=\rho^2\cos^2\theta\sin\theta+\rho^2\sin^3\theta\\
&=\rho^2\sin\theta\left(\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{1}\right)\\
&=\rho^2\sin\theta\end{aligned}$$

התחום החדש במרחב $\rho,\theta,\phi$ הוא התיבה $W=[0,R]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$ ולכן נקבל כי:

$$\begin{aligned}\iiint_B 1dxdydz &= \iiint_W |J|\,d\rho d\theta d\phi\\ &= \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\left(\rho^2\sin\theta\right)d\phi d\theta d\rho\\ &= \int_0^R\int_0^\pi\left(\rho^2\sin\theta\right)\phi\Big|_{\phi=0}^{\phi=2\pi}d\theta d\rho\\ &= 2\pi\int_0^R\int_0^\pi\left(\rho^2\sin\theta\right)d\theta d\rho\\ &= 2\pi\int_0^R\rho^2\cdot\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^\pi d\rho\\ &= 4\pi\int_0^R\rho^2 d\rho\\ &= 4\pi\cdot\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^R\\ &= \boxed{\frac{4\pi R^3}{3}}\end{aligned}$$

**תרגיל:**

חשבו את נפח הגוף הכלוא בין הספירה $x^2+y^2+z^2=6$ לבין הפרבולואיד $z=x^2+y^2$.

**פתרון:**

נסמן את התחום הכלוא בין הספירה לפרבולואיד $V$ ונשים לב כי צריך לחשב את

$$Vol\left(V\right)=\iiint_V 1dxdydz$$

נרצה להבין מה קורה במישור החיתוך, כדי שאחרי החלפת המשתנים נדע מה יהיו הגבולות:

$$z^2+z-6=0\Rightarrow z=2,-3$$

$z=-3$ לא בתחום ולכן $z=2$ הוא מישור החיתוך כלומר מעגל החיתוך הוא $x^2+y^2=2, z=2$.

הספירה מעל הפרבולואיד ולכן $x^2+y^2 \le z \le \sqrt{6-x^2-y^2}$, נשים לב כי יש לנו $x^2+y^2$ בשתי הפונקציות שמגבילות את $z$, נעבור לגליליות:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & 0 \le \theta \le 2\pi \\ y = r\sin\theta & r^2 \le z \le \sqrt{6-r^2} \\ z = z & 0 \le r \le \sqrt{2} \end{cases}$$

הפונקציה קודם הייתה הפונקציה הקבועה $1$ וזה נשאר, היעקוביאן הוא $r$ והוא מתאפס בתחום רק בנקודה אחת שלא משפיע על האינטגרל.
ולכן:

$$\begin{aligned} \iiint_V 1dxdydz &= \int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}}\left(\int_0^{2\pi} 1\cdot rd\theta\right)dz\right)dr \\ &= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} rdz\right)dr \\ &= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(r\ z|_{z=r^2}^{z=\sqrt{6-r^2}}\right)dr \\ &= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(r\left(\sqrt{6-r^2}-r^2\right)\right)dr \\ &= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(r\left(6-r^2\right)^{0.5}-r^3\right)dr \\ &= 2\pi -\frac{1}{3}\left(6-r^2\right)^{1.5}-\frac{r^4}{4}\Big|_{r=0}^{r=\sqrt{2}} \\ &= 2\pi\left(-\frac{1}{3}\cdot 8-1-\left(-\frac{1}{3}\cdot 6^{1.5}\right)\right) \end{aligned}$$

איזשהו מספר.

**תרגיל:**

חשבו את נפח הגוף $V$ החסום על ידי $y=x, y=2x, z=x^2+y^2, z=2\left(x^2+y^2\right), z=h$ כאשר $x,y,z \ge 0$.

**פתרון:**

למעשה צריך לחשב את $\iiint_V 1dxdydz$. נראה בגלל הפרבולואידים ($z=x^2+y^2, z=2\left(x^2+y^2\right)$) שכדאי לעבור לגלילי.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

רוצים נקודות ששיעור ה$x,y$ הוא בין $y=x$ ל$y=2x$ ולכן $\theta$ הולכת בין $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ לבין $\arctan 2$. $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \arctan 2$.
$z$ הוא בין 0 ל$h$ ולכן $0 \le z \le h$. ו$r$ ייקבע לפי $\theta, z$ באופן הבא

$$\begin{cases} z = r^2 \longrightarrow r = \sqrt{z} \\ z = 2r^2 \longrightarrow r = \sqrt{\frac{z}{2}} \end{cases}$$

ולכן התחום $W$ במרחב $r,\theta,z$ הוא:

$$W = \left\{ (r,\theta,z) : \frac{\pi}{4} \le \theta \le \arctan 2, \sqrt{\frac{z}{2}} \le r \le \sqrt{z}, 0 \le z \le h \right\}$$

$$\begin{aligned}
\iiint_V 1dxdydz &= \iiint_W rdrd\theta dz \\
&= \int_0^h \left( \int_{\sqrt{\frac{z}{2}}}^{\sqrt{z}} \left( \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} rd\theta \right) dr \right) dz \\
&= \left( \arctan 2 - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \int_0^h \left( \int_{\sqrt{\frac{z}{2}}}^{\sqrt{z}} rdr \right) dz \\
&= \left( \arctan 2 - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \int_0^h \left. \frac{r^2}{2} \right|_{r=\sqrt{\frac{z}{2}}}^{r=\sqrt{z}} dz \\
&= \left( \arctan 2 - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \int_0^h \left( \frac{z}{2} - \frac{z}{4} \right) dz \\
&= \left( \arctan 2 - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \frac{h^2}{8}
\end{aligned}$$