(2) $3x-4y-6=0 \Leftarrow m_1 = \frac{3}{4}$ שיפוע של שוק אחת של הזוית.

$2x-y+1=0 \Leftarrow m_2 = 2$ שיפוע של חוצה הזוית

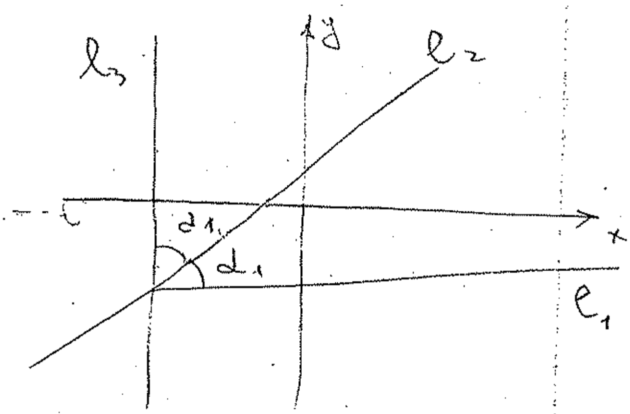
הזוית בין שוק אחת של הזוית לבין חוצה הזוית היא α_1

$$\tan\alpha_1 = \frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2} = \frac{2-\frac{3}{4}}{1+2\cdot\frac{3}{4}} = \frac{5\cdot2}{4\cdot5} = \frac{1}{2}$$

נסמן: $l_1: 3x-4y-6=0$ שוק אחת של הזוית

$l_2: 2x-y+1=0$ חוצה הזוית

$l_3: Ax+By+C=0$ השוק השנייה.



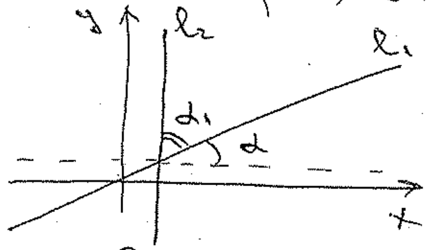
כיוון ששיפוע של הישר l_2 (חוצה זוית) שווה ל $\frac{1}{\tan\alpha_1}$

$\left(m_2 = 2 = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2\right)$ אזי השוק השנייה של הזוית

(l_3) מקבילה לציר ה-y ומשוואתה תהייה מהצורה $x=b$

<u>הסבר:</u> אם אחת משוקי הזוית מקבילה לציר ה-y

התמונה תראה כך



α - הזוית שנוצרת בין l_1 (השוק השנייה של הזוית) לבין ציר ה-x

$\tan\alpha =$ שיפוע של l_1

l_2 מקביל לציר ה-y (נתון) $\Leftarrow \alpha+\alpha_1 = 90^\circ$

$$\tan(\alpha_1) = \tan(90^\circ-\alpha) = \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

(ב) את הזוית הפריחה

[illegible]

המשך הפתרון:

נמצא את נקודת החיתוך של l_1 ו- l_2

$$-4\left\{\begin{array}{l}3x-4y-6=0\\ 2x-y+1=0\end{array}\right.$$

$$-5x-10=0$$

$$x=-2 \Rightarrow y=2x+1=-4+1=-3$$

$\Rightarrow$ נק' החיתוך $(-2,-3)$

$(-2,-3)\in l_3$ ו- $l_3: x=b$ $\Rightarrow$ משוואתו של l_3: $\underline{\underline{x=-2}}$

$\Rightarrow$ נקודת החיתוך של l_3 עם ציר ה-x: $(-2,0)$.

5) (א) נקודות חיתוך של הישר $4x+3y-24=0$ עם הצירים הן:

$A(6,0)$ $B(0,8)$

$\Rightarrow$ אורכו של קוטר המעגל זהו המרחק בין שתי הנקודות A ו- B

$$d=\sqrt{(6-0)^2+(0-8)^2}=10$$

$\Rightarrow$ רדיוס המעגל $R=\frac{d}{2}=\frac{10}{2}=5$

מרכזו של המעגל האמצע של הקטע AB

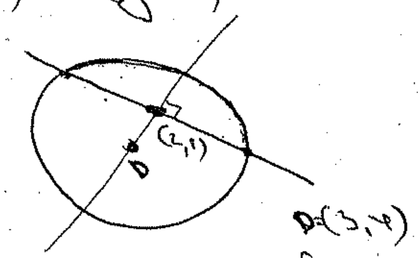
$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{6+0}{2}=3$$

$$\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{0+8}{2}=4$$

$\Rightarrow$ מ. ה. המעגל בנקודה $(3,4)$ ורדיוסו $R=5$

$\Rightarrow$ משוואת המעגל $(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$

(ב)



הישר שעובר דרך מרכז המעגל ואמצע המיתר מאונך למיתר

$\Rightarrow$ $m_1 m_2=-1$ כאשר m_1 - שיפוע של הישר העובר

דרך $(2,1)$ ו- $(3,4)$ ו- m_2 שיפוע המיתר

$$m_1 = \frac{4-1}{3-2} = 3$$

$$\Rightarrow \quad m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{3}$$

⇐ משוואת הישר העובר דרך $(2,1)$ ושיפועו $m_2 = -\frac{1}{3}$ הוא

$$y-1 = -\frac{1}{3}(x-2)$$

$$x+3y-5=0$$

(7) הגדרה: - שני קטרים נקראים צמודים אם מכפלת השיפועים שלהם שווה ל $-\frac{b^2}{a^2}$ (כאשר נתון אליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$)

נסמן את השיפועים של הקטרים ע"י m_1 ו m_2 ,

* הקטרים צמודים ⇐ $m_1 m_2 = -\frac{b^2}{a^2}$

* משוואת האליפסה $x^2+6y^2=18$ ⇐ $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{3}=1$

⇐ $a^2=18$ ו $b^2=3$

$$m_1 m_2 = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{3}{18} = -\frac{1}{6}$$

* הזוית בין הקטרים $\tan\alpha = \left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1 m_2}\right| = \tan 45° = 1$

$$\begin{cases} \frac{m_2-m_1}{1+m_1 m_2} = 1 \\ m_1 m_2 = -\frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{6m_2}$$

$$\frac{m_2 + \frac{1}{6m_2}}{1-\frac{1}{6}} = 1$$

$$\frac{6m_2^2+1}{6m_2} = \frac{5}{6}$$

$$6m_2^2+1-5m_2=0$$

$$\Delta = 25-24 = 1$$

$m_2 = \frac{5+1}{12} = \frac{1}{2}$ או $m_2 = \frac{5-1}{12} = \frac{1}{3}$

⇓ ⇓

$m_1 = -\frac{1}{6m_2} = -\frac{1}{3}$ או $m_1 = -\frac{1}{6m_2} = -\frac{1}{2}$

בס"ד

(1) אם $m_1 = -\frac{1}{3}$ ו $m_2 = \frac{1}{2}$ (וכן ידוע כי הקלריות עוברים דרך הנקודה $(0,0)$) אזי משוואות הקלריות הן:

$$\boxed{\begin{aligned} y &= -\tfrac{1}{3}x \\ y &= \tfrac{1}{2}x \end{aligned}}$$

(2) אם $m_1 = -\frac{1}{2}$ ו $m_2 = \frac{1}{3}$ אזי משוואות הקלריות הן:

$$\boxed{\begin{aligned} y &= -\tfrac{1}{2}x \\ y &= \tfrac{1}{3}x \end{aligned}}$$

⑧ נתון: $x^2 + 5y^2 = 12$ אליפסה

$m = -1$ שיפוע המיתר

$d = \sqrt{18}$ אורך המיתר

פתרון: (x_1, y_1) ו (x_2, y_2) קצותיו של המיתר הנמצאים על האליפסה.

* אורכו של המיתר זה מרחק בין (x_1, y_1) לבין (x_2, y_2) לכן

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$18 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

* שיפוע המיתר $m = -1$ <= משוואתו של המיתר מהצורה

$$y = -x + n$$

<= $\begin{cases} y_1 = -x_1 + n \\ y_2 = -x_2 + n \end{cases}$ כי (x_1, y_1) ו (x_2, y_2) שתי נקודות על המיתר

⇓

$$\boxed{y_1 - y_2 = -x_1 + x_2}$$

*

$$\begin{cases} 18 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ y_1 - y_2 = -x_1 + x_2 \end{cases}$$

⇓

$$18 = \underbrace{(y_1 - y_2)^2}_{(x_1 - x_2)^2} + (y_1 - y_2)^2$$

[illegible]

וכן $(-1,-2)=(x_2,y_2)$ אזי משוואת המיתר היא $y+2=-(x+1)$

$$\boxed{x+y+3=0}$$

(9) נתון: $2x^2-y^2=16$ משוואת ההיפרבולה

$(1,2)$ אמצע המיתר

פתרון: נסמן (x_1,y_1) ו- (x_2,y_2) - קצות המיתר

כי קצות המיתר נמצאות על ההיפרבולה -

$$2x_1^2-y_1^2=16 \quad (1)$$

$$2x_2-y_2^2=16 \quad (2)$$

קואורדינטות של אמצע המיתר

$$\frac{x_1+x_2}{2}=1 \quad \Rightarrow x_1+x_2=2 \quad (3)$$

$$\frac{y_1+y_2}{2}=2 \quad \Rightarrow y_1+y_2=4 \quad (4)$$

$(3)\Rightarrow x_1=2-x_2$

$(4)\Rightarrow y_1=4-y_2$

$(1)\Rightarrow\quad 2(2-x_2)^2-(4-y_2)^2=16$

$2(4-4x_2+x_2^2)-(16-8y_2+y_2^2)=16$

$8-8x_2+2x_2^2-16+8y_2-y_2^2=16$

$\underbrace{2x_2^2-y_2^2}_{16}-8x_2+8y_2=24$

(נובע מ(2))

$-8x_2+8y_2=8$

$-x_2+y_2=1$

$x_2=y_2-1$

נציב ב (2)

$2(y_2-1)^2-y_2^2=16$

$2y_2^2-4y_2+2-y_2^2=16$

$y_2^2-4y_2-14=0$

$\frac{\Delta}{4}=4+14=18$

$y_2=2\pm\sqrt{18}$

$x_2=2\pm\sqrt{18}-1=1\pm\sqrt{18}$

$\Rightarrow y_1 - y_2 = \pm 3$

נניח כי $y_1 - y_2 = 3$ (אם $y_1 - y_2 = -3$ אותו דבר הפוך)

$\Rightarrow x_1 - x_2 = -3$

* (x_1,y_1) ו (x_2,y_2) נקודות על האליפסה $\Rightarrow$ הן מקיימות את משוואות האליפסה $\Rightarrow$ (1)

$$\begin{cases} x_1^2 + 5y_1^2 = 21 & (1) \\ x_2^2 + 5y_2^2 = 21 & (2) \\ y_1 - y_2 = 3 & (3) \\ x_1 - x_2 = -3 & (4) \end{cases}$$

קיבלנו מערכת של ארבע משוואות עם ארבעה נעלמים
נפתור אותה ונקבל קדקודי המעוין ((x_1,y_1) ו (x_2,y_2)).

$(3) \Rightarrow y_1 = 3 + y_2$

$(4) \Rightarrow x_1 = x_2 - 3$

$$\begin{cases} (1) \Rightarrow (x_2-3)^2 + 5(3+y_2)^2 = 21 \\ (2) \Rightarrow x_2^2 + 5y_2^2 = 21 \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow x_2^2 - 6x_2 + 9 + 45 + 30y_2 + 5y_2^2 = 21$

$\underbrace{x_2^2 + 5y_2^2}_{=21} - 6x_2 + 30y_2 = 21 - 9 - 45$

(נובע מ-(2))

$\cancel{21} - 6x_2 + 30y_2 = \cancel{21} - 54 \quad /:6$

$-x_2 + 5y_2 = -9$

$$\boxed{x_2 = 5y_2 + 9}$$

נציב ב (2)

$(5y_2+9)^2 + 5y_2^2 = 21$

$25y_2^2 + 90y_2 + 81 + 5y_2^2 = 21$

$30y_2^2 + 90y_2 + 60 = 0 \quad /:30$

$y_2^2 + 3y_2 + 2 = 0$

$y_2 = -1$ או $y_2 = -2$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$x_2 = 4$ או $x_2 = -1$

אם $(x_2,y_2) = (4,-1)$ אזי משוואת המיתר היא $y+1 = -(x-4)$

⇐ המיתר עובר דרך הנקודה $(1,2)$ וכן דרך הנק'
$(1+\sqrt{18}\,,\,2+\sqrt{18})$

$m = \frac{2+\sqrt{18}-2}{1+\sqrt{18}-1} = 1$ שיפוע המיתר

⇐ משוואת המיתר העובר דרך הנק' $(1,2)$ ושיפועו $m=1$ היא

$y-2 = (x-1)$

$$\boxed{x-y+1=0}$$

(19) נתון: $2x-y+4=0$ ישר שחותך את הפרבולה
$2\frac{1}{2}=x$ שיעור ה-x של אמצע המיתר
דרוש למצוא (א) משוואת הפרבולה
(ב) את קצות המיתר

פתרון: (א) נסמן (x_1,y_1) ; (x_2,y_2) קצות המיתר

$\frac{x_1+x_2}{2} = 2\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{x_1+x_2=5}$ שיעור ה-x של אמצע המיתר

קצות המיתר הם נקודות חיתוך של הפרבולה $y^2=2px$
עם הישר $2x-y+4=0$ ז"א הם פתרון מערכת המשוואות הבאה

$$\begin{cases} y^2=2px & (1)\\ 2x-y+4=0 & (2)\end{cases}$$

$(2) \Rightarrow y=2x+4$

$(1) \Rightarrow (2x+4)^2=2px$

$4x^2+16x+16=2px$

$4x^2+2x(8-p)+16=0 \quad /:2$

$2x^2+x(8-p)+8=0$

$\Delta=(8-p)^2-64=64-16p+p^2-64=$
$=-16p+p^2$

$x_{1,2}=\frac{-(8-p)\pm\sqrt{p^2-16p}}{4}$

$x_1+x_2=-\frac{2(8-p)}{4}=5$

$-(8-p)=10$

$$x_1 = \frac{-(8-p) + \sqrt{p^2-16p}}{4} = -9$$

$$= \frac{-(8-18) + \sqrt{18^2-16\cdot 18}}{4} = 4$$

$$y_1 = 2x_1 + 4 = 2\cdot 4 + 4 = 12$$

$$x_2 = \frac{-(8-18) - \sqrt{18^2-16\cdot 18}}{4} = 1$$

$$y_2 = 2x_2 + 4 = 2\cdot 1 + 4 = 6$$

$\Rightarrow$ קבלנו ששווי הם $(4,12)$ ו $(1,6)$

נציב למשוואה שמצאנו

$$9x^2 - y^2 + 18x - 18 = 0$$

①

$$9\underbrace{(x^2+2x+1-1)}_{(x+1)^2} - y^2 = 18$$

$$9(x+1)^2 - y^2 - 9 = 18$$

$$9(x+1)^2 - y^2 = 27 \qquad /:27$$

$$\frac{(x+1)^2}{3} - \frac{y^2}{27} = 1$$

$\Rightarrow$ קיבלנו היפרבולה שמרכזה

②

$$x^2 - 4y^2 + 40y - 84 = 0$$

$$x^2 - 4(y^2 - 10y + 25 - 25) - 84 = 0$$

$$x^2 - 4(y-5)^2 + 100 - 84 = 0$$

$$x^2 - 4(y-5)^2 = -16 \qquad /:-16$$

$$-\frac{x^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{4} = 1$$

③

מרכזה של ההיפרבולה הוא $(0,-5)$

$$16x^2 - 9y^2 + 32x + 36y + 205 = 0$$

$$16(x^2+2x+1-1) - 9(y^2+4y+4-4) + 205 = 0$$

$$16(x+1)^2 - 9(y+2)^2 - 16 + 36 + 205 = 0$$

$$16(x+1)^2 - 9(y+2)^2 = -225 \qquad /:-225$$

$$-\frac{(x+1)^2}{\left(\frac{15}{4}\right)^2} + \frac{(y+2)^2}{5^2} = 1$$

④
$$4x^2-9y^2+16x-72y-128=0$$
$$4(x^2+4x+4-4)-9(y^2+8y+16-16)-128=0$$
$$4(x+2)^2-9(y+4)^2-16+144-128=0$$
$$4(x+2)^2-9(y+4)^2=0$$
$$[2(x+2)]^2-[3(y+4)]^2=0$$
$$[2(x+2)-3(y+4)][2(x+2)+3(y+4)]=0$$
$$\Leftrightarrow \quad 0=(y+4)-\tfrac{2}{3}(x+2) \Rightarrow 0=2x-3y-8$$
או $0=(y+4)+\tfrac{2}{3}(x+2) \Rightarrow 0=2x+3y+16$

משוואות אסימפטוטות של היפרבולה הנתונה

$$0=2x-3y-8$$
$$0=2x+3y+16$$

⑤
$$x^2-4y^2-6x-16y-7=0$$
$$(x^2-6x+9-9)-4(y^2+4y+4-4)-7=0$$
$$(x-3)^2-4(y+2)^2-9+16-7=0$$
$$(x-3)^2-4(y+2)^2=0$$
$$(x-3-2(y+2))(x-3+2(y+2))=0$$
$$0=(x-2y-7)(x+2y+1)$$

משוואות אסימפטוטות של ההיפרבולה
$$0=x-2y-7$$
$$0=x+2y+1$$

⑥
$$16x^2+9y^2-64x+18y+9=0$$
$$16\left(x^2-\tfrac{6}{16}x+\left(\tfrac{3}{16}\right)^2-\left(\tfrac{3}{16}\right)^2\right)+9(y^2+2y+1-1)+9=0$$
$$16\left(x-\tfrac{3}{16}\right)^2+9(y+1)^2-\tfrac{9}{16}-9+9=0$$
$$16\left(x-\tfrac{3}{16}\right)^2+9(y+1)^2=\left(\tfrac{3}{4}\right)^2 \quad /:\left(\tfrac{3}{4}\right)^2$$
$$\frac{\left(x-\frac{3}{16}\right)^2}{\left(\frac{3}{16}\right)^2}+\frac{(y+1)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}=1$$

$\Rightarrow$ מרכז ההיפרבולה $\left(\tfrac{3}{16},-1\right)$.

$x^2+4y^2+8x+12=0$ ④

$(x^2+8x+16-16)+4y^2=-12$

$(x+4)^2+4y^2=-12+16$

$(x+4)^2+4y^2=4 \quad /:4$

$\frac{(x+4)^2}{4}+y^2=1$

مركز القطع هو النقطة $(-4,0)$.

$20x^2+4y^2-20x+12y-86=0$ ⑧

$20\left(x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+4\left(y^2+3y+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)-86=0$

$20\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-5-4\cdot\frac{9}{4}-86=0$

$20\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=100$

$\Rightarrow$ مركز القطع هو النقطة $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$.

$9x^2+36y^2+12x-120y+32=0$ ⑨

$9\left(x^2+2\cdot\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}\right)+36\left(y^2-\frac{10}{3}y+\left(\frac{5}{3}\right)^2-\left(\frac{5}{3}\right)^2\right)+32=0$

$9\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+36\left(y-\frac{5}{3}\right)^2-4-100+32=0$

$9\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+36\left(y-\frac{5}{3}\right)^2=72$

مركز القطع هو النقطة $\left(-\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)$.

$4y^2+12y-8x+17=0$ ⑩

$4\left(y^2+3y+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)-8x+17=0$

$4\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-8x-9+17=0$

$4\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+8=8x$

$\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+2=2x$

قطع

(11)

$x^2 + 4x + 3y - 8 = 0$

$3y = -x^2 - 4x + 8$

$y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$

القطع

$4x^2 + 4y^2 - 4x + 12y + 50 = 0$

$4\left(x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + 4\left(y^2 + 3y + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) + 50 = 0$ (12)

$4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - 1 - 9 + 50 = 0$

$4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = -46$

⇒ المعادلة لا تمثل قطع ناقص.

$3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 4 = 0$ (13)

$3\left(x^2 - 2x + 1 - 1\right) + 3\left(y^2 + \frac{4}{3}y + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) - 4 = 0$

$3(x-1)^2 + 3\left(y + \frac{2}{3}\right)^2 - 3 - \frac{4}{3} - 4 = 0$

$3(x-1)^2 + 3\left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = 8\frac{1}{3}$ $\quad / : 3$

$(x-1)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$

المركز هو النقطة $\left(1, -\frac{2}{3}\right)$

(14)

$4x^2 - 4x - y = 0$

$y = 4x^2 - 4x$

$y = 4\left(x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$

$y = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1$

القطع

(15)

$3y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$

$3\left(y^2 + \frac{2}{3}y + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) - 2x - 7 = 0$

$3\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} - 7 = 2x$

$3\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{22}{3} = 2x$

القطع

$2x^2+y^2+4x-6y+11=0$ (16)

$2(x^2+2x+1-1)+(y^2-6y+9-9)+11=0$

$2(x+1)^2+(y-3)^2-2-9+11=0$

$2(x+1)^2+(y-3)^2=0$

$(-1,3)$ נקודה יחידה

$2x^2+y^2+4x-6y+12=0$ (17)

$2(x^2+2x+1-1)+(y^2-6y+9-9)+12=0$

$2(x+1)^2+(y-3)^2-2-9+12=0$

$2(x+1)^2+(y-3)^2=-1$

קבוצה ריקה.