תרגיל 8

1. יהיו $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^n$ מרחבים מטריים. הראו שמרחב המכפלה $X = \prod X_i$ הוא מטריזבילי (עם טופולוגיית המכפלה).
פתרון:

(א) נסמן את טופולוגיית המכפלה ב$-\tau_\pi$. נגדיר מטריקה על X באופן הבא:

$$d_{\max}(x,y) = \max\{d_i(x_i,y_i) \,|1 \le i \le n\}$$

כאשר d_i המטריקה של X_i, $x = (x_1,\dots,x_n), y = (y_1,\dots,y_n)$ (בדקו שזו אכן מטריקה).
המטריקה $d_{\max}$ משרה טופולוגיה $\tau_{\max}$. נראה שמתקיים: $\tau_\pi = \tau_{\max}$.
לצד אחד, נראה שפונקציות ההטלה: $p_i : (X, d_{\max}) \to (X_i, d_i)$ רציפות.
אם כן, יהי $x \in X$ ויהי $\varepsilon > 0$. נבחר $\delta = \varepsilon$ ונקבל:

$$d_i(p_i(x), p_i(y)) = d_i(x_i,y_i) \le \max\{d_i(x_i,y_i) \,|1 \le i \le n\} = d_{\max}(x,y) < \delta = \varepsilon$$

ולכן $d_i(p_i(x), p_i(y)) < \varepsilon$, והפונקציות p_i אכן רציפות.
הטופולוגיה τ_π היא החלשה ביותר בה ההטלות רציפות, ולכן $\tau_\pi \subseteq \tau_{\max}$.
לצד השני, נשים לב לעובדה הבאה:

$$y \in B_{d_{\max}}(x,\varepsilon) \iff d_{\max}(x,y) < \varepsilon \iff \max\{d_i(x_i,y_i) \,|1 \le i \le n\} < \varepsilon$$

$$\iff \forall i, d_i(x_i,y_i) < \varepsilon \iff \forall i, y_i \in B_{d_i}(x_i,\varepsilon) \iff y \in \prod B_{d_i}(x_i,\varepsilon)$$

כלומר, כל כדור במטריקה $d_{\max}$ אפשר להציג כמכפלת כדורים מהמטריקות d_i.
נסמן: $C_{\max} = \{B_{d_{\max}}(x,\varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$. נסמן גם: $C_\pi = \{\prod B_{d_i}(x_i,\varepsilon) \,|x_i \in X_i, \varepsilon > 0\}$.
קיבלנו ש: $C_{\max} \subseteq C_\pi$.
$C_{\max}$ הוא בסיס של $\tau_{\max}$, C_π הוא בסיס של τ_π ולכן $\tau_{\max} \subseteq \tau_\pi$.
בסה"כ, $\tau_\pi = \tau_{\max}$ ולכן מרחב המכפלה (עם טופולוגיית המכפלה) הוא מטריזבילי.

2. יהי (X,d) מרחב מטרי. הוכיחו שהפונקציה: $d : X \times X \to \mathbb{R}$ רציפה (לפי טופולוגיית המכפלה).
פתרון:

(א) לפי התרגיל הקודם, $X \times X$ מטריזבילי, והטופולוגיה τ_π מושרית מהמטריקה $d_{\max}$.
נראה, אם כן, שהפונקציה d רציפה לפי המטריקה $d_{\max}$ ולכן גם רציפה לפי τ_π.
תהי $(x,y) \in X \times X$ ויהי $\varepsilon > 0$. נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. כעת, אם $d_{\max}((x,y),(z,w)) < \delta$ אז:

$$|d(x,y) - d(z,w)| \le d(x,y) + d(z,w) < \delta + \delta = \varepsilon$$

ולכן d רציפה (המעבר הראשון נובע מא"ש המשולש).

3. יהי X מ״ט. נגדיר את **האלכסון** של X באופן הבא:

$$\Delta=\{(x,x)\,|x\in X\}\subseteq X\times X$$

הוכיחו שהקבוצה Δ סגורה אם ורק אם X האוסדורף.
פתרון:

(א) לצד אחד, נניח שהמרחב X האוסדורף. נניח בשלילה שהקבוצה Δ אינה סגורה, כלומר $cl\left(\Delta\right)\neq\Delta$.
מכיוון ש: $cl\left(\Delta\right)\supset\Delta$, נקבל שקיים $(x,y)\in cl\left(\Delta\right)$ כך ש: $(x,y)\notin\Delta$.
מהגדרת האלכסון, נקבל ש: $x\neq y$.
מכיוון ש$-X$ האוסדורף, קיימות סביבות $x\in U,y\in V$ זרות.
מהגדרת טופולוגיית המכפלה, נקבל ש$-U\times V$ היא סביבה (בסיסית) של (x,y), אך מתקיים:

$$(U\times V)\cap\Delta=\emptyset$$

(אחרת, נקבל שקיים איבר משותף, ומהגדרת האלכסון פירוש הדבר ש$(a,a)\in U\times V-$, בסתירה לכך ש$-U,V$ זרות).
נקודה נמצאת בסגור אם ורק אם כל הסביבות (הבסיסיות) שלה נחתכות עם הקבוצה באופן לא ריק, ולכן $(x,y)\notin cl\left(\Delta\right)$ וסתירה.
לצד שני, נניח שהאלכסון סגור ב$-X\times X$. נניח בשלילה שהמרחב X אינו האוסדורף.
לפיכך, קיימות $x,y\in X$ שונות כך שלכל שתי סביבות $x\in U,y\in V$, מתקיים $U\cap V\neq\emptyset$.
לכן, לכל סביבה (בסיסית) $(x,y)\in U\times V$ מתקיים $(U\times V)\cap\Delta\neq\emptyset$ (כי הסביבות לא זרות, ולכן תמיד קיים $a\in U\cap V$, ואז $(a,a)\in(U\times V)\cap\Delta$).
זה נכון לכל סביבה (בסיסית), ולכן $(x,y)\in cl\left(\Delta\right)$.
לפיכך, $cl\left(\Delta\right)\neq\Delta$ ולכן Δ לא קבוצה סגורה וסתירה.

4. יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים ספרביליים. האם $X\times Y$ ספרבילי?
פתרון:

(א) מהגדרת ספרביליות, קיימות $A\subseteq X,B\subseteq Y$ צפופות ובנות מניה.
מתרגיל שעשינו בכיתה:

$$cl\left(A\times B\right)=cl\left(A\right)\times cl\left(B\right)$$

כלומר:

$$cl\left(A\times B\right)=X\times Y$$

ולכן $A\times B\subseteq X\times Y$ צפופה.
מכיוון שהקבוצות A,B הן בנות מניה גם $A\times B$ בת מניה (למתקדמים: הוכיחו זאת. יש להשתמש בלמה של צורן ובהרבה מצב רוח).
לכן $X\times Y$ ספרבילי.

5. יהיו $\{(X_i,\tau_i)\}_{i=1}^{n}$ מרחבים טופולוגיים T_1. הוכיחו שמרחב המכפלה הוא T_1.
פתרון:

(א) אנו יודעים שמספיק להראות שכל נקודון הוא סגור במרחב המכפלה.
אם כן, יהי $\prod \{x_i\}$ נקודון. המשלים שלו הוא הקבוצה:

$$\bigcup_i \prod_j Y_{i,j}$$

כאשר $Y_{i,j} = X_j$ אם $i \neq j$ ו־ $Y_{i,j} = X_j \setminus \{x_j\}$ אם $i \neq j$.
בכל מקרה, $Y_{i,j} \subseteq X_j$ פתוחה (אם $i = j$, מכיוון ש-X_j הוא T_1 הנקודון $\{x_j\} \subseteq X_j$ הוא סגור ולכן $X \setminus \{x_j\}$ פתוחה).
מהגדרת טופולוגיית המכפלה, $\prod_j Y_{i,j} \subseteq \prod_j X_j$ פתוחה ולכן גם $\bigcup_i \prod_j Y_{i,j}$ פתוחה (כאיחוד של פתוחות).
לכן $\prod \{x_i\}$ סגורה.

6. יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים. הוכיחו ש: $X \times Y \cong Y \times X$.
פתרון:

(א) נגדיר פונקציה $f : X \times Y \to Y \times X$ על ידי:

$$f(x,y) = (y,x)$$

נשים לב לכך שהפונקציה:

$$p_1 \circ f : X \times Y \to Y$$

שווה לפונקציה $p_2 : X \times Y \to Y$ ולכן רציפה. כמו כן הפונקציה:

$$p_2 \circ f : X \times Y \to X$$

שווה לפונקציה $p_1 : X \times Y \to X$.
לכן הפונקציות $p_1 \circ f, p_2 \circ f$ רציפות ולכן גם f רציפה.
קל לראות שההופכית של f היא הפונקציה:

$$f^{-1} : Y \times X \to X \times Y$$

המוגדרת על ידי $f^{-1}(y,x) = (x,y)$.
f^{-1} רציפה (בדומה ל־f) ולכן f הומיאומורפיזם.