

תרגיל בית 2.

פתרון משוואה לא ליניארית (תרגיל תיאורטי) .

1. (5 נקודות) נניח שמשתמשים בשיטת החצייה למציאת אפס הפונקציה $f(x)$ בקטע $[2, 7]$. כמה פעמים צריך לחלק את הקטע כדי להבטיח שדיוק הקירוב יהיה $5 \cdot 10^{-9}$?

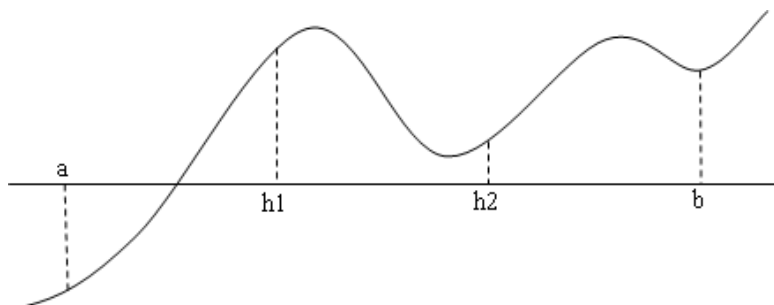
פתרון :

דיוק הקירוב בשיטת החצייה הוא $|\alpha - c_n| < \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$, לכן מחפשים n כך ש-

$$n > 28 \Leftrightarrow 2^{-n} < 2^{-10} \cdot 5^{-9} < 2^{-10} \cdot 2^{-18} = 2^{-28} \Leftrightarrow 2^{-n} < 2 \cdot 10^{-9} \Leftrightarrow \frac{5}{2^{n+1}} < 5 \cdot 10^{-9}$$

2. (10 נקודות) נשנה את שיטת החצייה ל"שיטת השלישונים" אשר מחלקת את הקטע הנוכחי לשלושה חלקים ובוחרת את הקטע השמאלי ביותר שעבור נקודות הקצה שלו יש סימנים הפוכים. לדוגמא בציור שלהלן אם נקודות הקצה של הקטע הנוכחי הן a ו b נחשב שתי נקודות ביניהן

$$h_1 = a + (b-a)/3 \text{ ו- } h_2 = a + 2(b-a)/3$$



במקרה זה נשים לב כי ל- $f(a)$ סימן הפוך מ- $f(h_1)$ ולכן קטע זה יהיה הקטע החדש.
 תנו נוסחה לחישוב הדיוק של "שיטת השלישונים" לאחר איטרציות, האם יש יתרון לשיטה זו על פני שיטת החצייה. (רמז: התייחסו לדיוק היחסי של שתי השיטות לאחר $2n$ חישובים של ערך הפונקציה).

פתרון :

מאחר והאינטרוול קטן ב $\frac{1}{3}$ בכל איטרציה אזי בכל איטרציה הדיוק הוא $\frac{b-a}{3^n}$. על מנת להשוות את מספר הערכות הפונקציה הכי נח להשוות בין דיוק שתי השיטות באופן יחסי לאחר $2n$ הערכות פונקציה. לאחר $2n$ הערכות פונקציה שיטת החצייה ביצעה $2n$ איטרציות. ושיטת השלישונים תבצע n איטרציות. כך שלשיטת החצייה יהיה דיוק של $\frac{b-a}{2^{2n}} = \frac{b-a}{4^n}$ בעוד שלשיטת השלישונים יהיה דיוק של $\frac{b-a}{3^n}$. לפיכך שיטת החצייה יותר מדויקת.

3. (10 נקודות) לפתרון המשוואה $x^3 + x = 1000$, הציעו שלושת איטרציות הבאות

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{1000 - x_n} \quad (3) \quad x_{n+1} = \frac{1000}{x_n^2} - \frac{1}{x_n} \quad (2) \quad x_{n+1} = 1000 - x_n^3 \quad (1)$$

ידוע כי שורש המשוואה נמצא בקטע (9,10) .

(א) בדקו עבור כל איטרציה האם היא מתכנסת עבור כל נקודה בקטע נתון. עבור איטרציות

מתכנסות הגדירו מהם סדר התכנסות וקבוע התכנסות;

(ב) הוכיחו את ההתכנסות/התבדרות של האיטרציות הנ"ל בשיטה גרפית ("שיטת העכביש"),

כאשר הניחוש ההתחלתי הוא $x_0 = 10$;

(ג) הציעו איטרציה משלכם ובידקו האם היא מתכנסת ואם כן, אזי מצאו סדר וקבוע התכנסות.

פתרון : שום נגזרת לא מתאפסת בקטע נתון, לכן ההתכנסות היא ליניארית והשוואה תתבצע ע"י קצב ההתכנסות :

$$\varphi(x) = 1000 - x^3 \Rightarrow \varphi'(x) = -3x^2 \Rightarrow 243 \leq |\varphi'(x)| \leq 300$$

$$\varphi(x) = \frac{1000}{x^2} - \frac{1}{x} \Rightarrow \varphi'(x) = -\frac{2000}{x^3} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow 1.99 \leq |\varphi'(x)| \leq 2.73$$

$$\varphi(x) = \sqrt[3]{1000 - x} \Rightarrow \varphi'(x) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(1000 - x)^2}} \Rightarrow 0.003353 \leq |\varphi'(x)| \leq 0.003356$$

מכאן שרק איטרציה שלישית היא מתכנסת.

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0$$

(א) הראה שיש לה בדיוק שורש ממשי אחד בקטע $(1.6, \infty)$

(ב) על ידי כתיבת המשוואה בצורה

$$x = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = G(x)$$

מצא קירוב ל- x^* (שורש אמיתי/ נקודת שבת) והוכח שעם קירוב התחלתי $x_0 = 1.6$

האיטרציה $x_{n+1} = G(x_n)$ מתכנסת. האם יש התכנסות עבור כל ערך של $x_0 > 1.6$?

פתרון :

(א) נמצא נקודות קיצון לפונקציה $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

$$f'(x) = 0 : 3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 12}{6}$$

$$x_{1,2} = 1, -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 1)$$

נבדוק תחומי עליה-ירידה ע"י סימן של נגזרת שניה בנקודות קריטיות :

$$f''(x) = 6x - 2$$

$$f''\left(-\frac{1}{2}\right) = -5 < 0, f''(1) = 4 > 0$$

קיבלנו כי בנקודה שבה $x = 1$ מתקבל מינימום של הפונקציה ובתחום

$x > 1$ הפונקציה עולה. מתקיים גם כי $f(1) = -2$. כלומר, בתחום $x > 1$

יש לפונקציה שורש ורק שורש אחד. $f(1.6) = -1.064$, כלומר אפשר

לצמצם את התחום ולהגיד כי ישנו שורש אחד בקטע $x > 1.6$

(ב) התכנסות מובטחת אם עבור $x_0 = 1.6$ יתקיים $|\phi'(1.6)| < 1$.

$$\Leftrightarrow |\phi'(1.6)| = \frac{325}{512} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \phi'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$$

האיטרציה מתכנסת.

נמצא קירוב של פתרון : לפי נוסחת רקורסיה $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n^2}$ נקבל

$$x_1 = 1 + \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0^2} = 1 + \frac{1}{1.6} + \frac{1}{1.6^2} \approx 2.0156$$

$$x_2 = 1 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1^2} = 1 + \frac{1}{2.0156} + \frac{1}{2.0156^2} \approx 1.7423$$

$$x_3 \approx 1.9034$$

$$x_4 \approx 1.8014$$

$$x_5 \approx 1.8633$$

$$x_6 \approx 1.8247$$

מכאן, עם דיוק של 2 ספרות משמעותיות נקבל כי $x^* \approx 1.8440$ (זאת אחת מהשיטות – לקחת פתרון מקורב כי אמצע הקטע האחרון).

נתבונן בקטע $x > 1.6$. ראינו כי $\phi'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$, נרצה לראות מה קורה

עם הנגזרת בקטע נתון, כלומר האם לכל x בקטע מתקיים $|\phi'(x)| < 1$.

$$\left| -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right| < 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} < 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{x+2}{x^3} < 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^3 - x - 2 > 0$$

$$\text{נגדיר } g(x) = x^3 - x - 2$$

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{3} \Leftrightarrow g'(x) = 3x^2 - 1 = 0$$

$$g''\left(\frac{1}{3}\right) = 2 > 0 \Leftrightarrow g''(x) = 6x$$

כלומר, קיבלנו כי בנודה שבה $x = \frac{1}{3}$ מתקבל מינימום של הפונקציה ובתחום

$x > \frac{1}{3}$ הפונקציה עולה ולכן גם בתחום $x > 1.6$. $g(1.6) \approx 0.49 > 0$ ולכן

עבור כל $x > 1.6$ מתקיים כי $g(x) > 0$. מסקנה : האיטרציה מתכנסת עבור כל $x > 1.6$.

5. (5 נקודות) האם אפשר להשתמש בשיטת ניוטון לצורך הפתרון של המשוואה $x^{\frac{1}{3}} = 0$? הסבר את תשובתך.

פתרון :

התשובה היא לא, כי אם נסמן $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, אזי הנגזרת $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ לא

מוגדרת ב- $x = 0$ שהוא השורש של המשוואה הזאת ולכן המשפט של ניוטון – רפסון לא מתקיים ואי-אפשר להשתמש בשיטה.

אפשר להגיע למסקנה זאת גם אם מבנה איטרצית ניוטון-רפסון :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}x_n^{-\frac{2}{3}}} = x_n - 3x_n = -2x_n$$

האיטרציה הזאת מתבדרת.

6. (16 נקודות) מצאו את השורש של המשוואה: $f(x) = x^3 + 13.8x^2 + 42.2x - 9$ שנמצא

בקטע $[0,1]$ עם $tol = 10^{-6}$. התייחסו לשגיאה כ- $\varepsilon_n = |x_{n+1} - x_n|$.

(א) בשיטת ניוטון.

(ב) בשיטת המיתר.

(ג) בשיטת המקום השגוי (regula falsi).

(ד) השוו בין השיטות השונות מבחינת מספר איטרציות, סדר ושיעור התכנסות

פתרון:

הפונקציה $f(x) = x^3 + 13.8x^2 + 42.2x - 9$

ולכן הנגזרת: $f'(x) = 3x^2 + 27.6x + 42.2$

בכל שיטה כמעט, מנסים למצוא קטע קטן ככל שיותר שמכיל את השורש, בשיטת החצייה למשל. קיימים כללי אצבע לבחירת הניחוש ההתחלתי בהינתן הקטע הראשוני.

א.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 + 13.8x_k^2 + 42.2x_k - 9}{3x_k^2 + 27.6x_k + 42.2}$$

$$\varepsilon_k = -\frac{x_k^3 + 13.8x_k^2 + 42.2x_k - 9}{3x_k^2 + 27.6x_k + 42.2}$$

נבחר: $x_0 = 0$

$$\varepsilon_0 = -\frac{x_0^3 + 13.8x_0^2 + 42.2x_0 - 9}{3x_0^2 + 27.6x_0 + 42.2} = 0.213270142; |\varepsilon_0| > 10^{-6}$$

צריך להמשיך:

$$x_1 = x_0 + \varepsilon_0 = 0.213270142$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{x_1^3 + 13.8x_1^2 + 42.2x_1 - 9}{3x_1^2 + 27.6x_1 + 42.2} = -0.01321746; |\varepsilon_1| > 10^{-6}$$

$$x_2 = x_1 + \varepsilon_1 = 0.200052681$$

$$\varepsilon_2 = -0.5268016464 \cdot 10^{-4}; |\varepsilon_2| > 10^{-6}$$

שוב צריך להמשיך:

$$x_3 = x_2 + \varepsilon_2 = 0.2$$

$$\varepsilon_3 = 0; |\varepsilon_3| < 10^{-6}$$

ולכן: $x = x_3 = 0.2$

במקרה זה יצא ממש מדויק, אבל במקרים אחרים בהם לא ידועה התשובה האנליטית, יש להתייחס לתשובה כמקורבת.

בהינתן קטע שחוסם את הפתרון (אפשר להקטין אותו כמובן ע"י חציה), בוחרים איזה מהקצוות הוא x_0 ואיזה x_1 ע"י האופציה מבין השתיים שתתן שגיאה קטנה יותר, כלומר: נקה פעם: $x_0 = a, x_1 = b$ ופעם: $x_0 = b, x_1 = a$ ונחשב: ε_1 בשני המקרים ונקח את האופציה שתתן מינימום (בערך מוחלט).

$$|\varepsilon_1(x_0 = a, x_1 = b)| = \left| \frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)} \right|; |\varepsilon_1(x_0 = b, x_1 = a)| = \left| \frac{f(a)(a-b)}{f(a)-f(b)} \right|$$

ולכן:

- נבחר: $x_0 = a, x_1 = b$ אם: $|f(b)| < |f(a)|$.
- נבחר: $x_0 = b, x_1 = a$ אם: $|f(b)| > |f(a)|$.

$$\text{במקרה שלנו: } |f(0)| = 9 < |f(1)| = 48$$

$$\text{ולכן נבחר: } x_0 = b = 1, x_1 = a = 0$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = -\frac{-9 \cdot (0-1)}{-9-48} = 0.157894736; |\varepsilon_1| > 10^{-6}$$

$$x_2 = x_1 + \varepsilon_1 = 0.157894736$$

$$f(x_2) = -1.988861389$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = 0.044790262; |\varepsilon_2| > 10^{-6}$$

נצטרך להמשיך:

$$x_3 = x_2 + \varepsilon_2 = 0.202684998$$

$$f(x_3) = 0.128554136$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{f(x_3)(x_3 - x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} = -0.271934033 \cdot 10^{-2}; |\varepsilon_3| > 10^{-6}$$

נצטרך להמשיך:

$$x_4 = x_3 + \varepsilon_3 = 0.199965657$$

$$f(x_4) = -0.164292009 \cdot 10^{-2}$$

$$\varepsilon_4 = -\frac{f(x_4)(x_4 - x_3)}{f(x_4) - f(x_3)} = 0.3431460046 \cdot 10^{-4}; |\varepsilon_4| > 10^{-6}$$

$$x_5 = x_4 + \varepsilon_4 = 0.199999971$$

$$f(x_5) = -0.1358638 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_5 = -\frac{f(x_5)(x_5 - x_4)}{f(x_5) - f(x_4)} = 0.2839996107 \cdot 10^{-7}; |\varepsilon_5| < 10^{-6}$$

ולכן:

$$x \approx \hat{x} = x_5 = 0.199999971$$

שימו לב: בחירה הפוכה של שני ניחושים נכונים הייתה עובדת אבל מתכנסת לאט יותר, היה לוקח לה 8 איטרציות במקום 4. כיוון שהפונקציה מונוטונית, והנגזרות הראשונה והשנייה לא משנות סימן בקטע ההתחלתי: ערך הפונקציה הולך ומתקרב לאפס בכל צעד נוסף, ולכן אפשר במקרה זה למשל לבקר את השגיאה על ידי מרחק הפונקציה מהאפס (כלל התפשטות השגיאה, נותן את השגיאה המקסימלית המותרת בפונקציה).
ג. שיטת המיקום השגוי:

S-C _n	f(c _n)	c _n	f(b _n)	b _n	f(a _n)	a _n
0.042105263	-1.98886135	0.157894737	48	1	-9	0
0.008601187	-0.410416111	0.191398813	48	1	-1.98886135	0.157894737
0.00174599	-0.08348426	0.19825401	48	1	-0.410416111	0.191398813
0.00035397	-0.016932113	0.19964603	48	1	-0.08348426	0.19825401
7.17427E-05	-0.003432094	0.199928257	48	1	-0.016932113	0.19964603
1.454E-05	-0.000695592	0.19998546	48	1	-0.003432094	0.199928257
2.94679E-06	-0.000140974	0.199997053	48	1	-0.000695592	0.19998546
5.97216E-07	-2.85708E-05	0.199999403	48	1	-0.000140974	0.199997053

זו דוגמא טובה לאי יעילות השיטה כאשר אחד מהקצוות נשאר קבוע. אחרי מספר צעדים זה קורה לכל פונקציה שנבחר, ולכן השיטה יעילה עבור מקרים בהם שיטת ניוטון למשל לא עובדת.

ד.

בשאלה זו הפונקציה היא חלקה, מונוטונית בקטע הנתון ובעלת עקמומיות קבועה שם, ולכן שיטת ניוטון ושיטת המיתר עובדות כסדרן, לגבי שיטת המיקום השגוי ראינו שצד אחד של האינטרוואל נשאר קבוע, ולכן היא מתכנסת יותר לאט. שיטת המיקום השגוי טובה לפונקציות לא מונוטוניות ועם עקמומיות משתנה ואפילו עם אי רציפות.

לגבי השאלה שלנו:

שיטה	איטרציות	קצב התכנסות
ניוטון	3	ריבועי
מיתר	5	1.618, מספר הזהב.
מיקום שגוי	8	לינארי עם קבוע 0.2

7. פתרון:

פירוט:

הגרפים הנ"ל נחתכים כאשר הפונקציה $f(x) = x^3 - 1 - \cos(x)$ מתאפסת.
 דוגמא לקוד:
 בשיטת החציה:

```
function [z,error,y]=bisection (f,a,b,delta)
% input: f is the function
% [a,b] is the interval
% output: z is the root we found
% y = f(z)
% error is the error of z
ya= feval (f,a);
yb=feval (f,b);
if ya*yb>0,return,end
max=1+round ((log (b-a)-log (delta))/log(2));
for k=1:max
    z=(a+b)/2;
    y=feval (f,z);
    if y==0
        a=z;
        b=z;
    elseif yb*y>0
        b=z;
        yb=y;
    else
        a=z;
        ya=y;
    end
    disp ('the current step is:')
    disp (num2str (z))
    disp ('the num of iterations is:')
    disp (num2str (k))
    if b-a < delta, break, end

end

z=(a+b)/2;
error= abs (b-a);
y=feval (f,z);
disp ('the root is:')
disp (num2str (z))
disp ('the num of iterations is:')
disp (num2str (k))
end
```

לאחר 25 איטרציות מגיעים לניחוש 1.1264.

בשיטת רגולה פולסי:

```
function [z,error,y,k] = regula (f,a,b,epsilon,maxi)
% Inputs: f is the function
% [a,b] is the interval
% maxi is the maximum number of iterations
% Output: z is the root we found
% y=f(z)
ya=feval (f,a);
yb=feval (f,b);
if ya*yb>0
    disp ('Note: f (a)*f (b)>0'),
    return,
end
for k=1:maxi
    dx=yb*(b-a)/(yb-ya);
    z=b-dx;
    ac=z-a;
    y=feval (f,z);
    disp (' the root is:')
    disp (num2str (z))
    disp (' Num of iterations')
    disp (num2str (k))
    if y==0,break;
    elseif yb*y>0
        b=z;
        yb=y;
    else
        a=z;
        ya=y;
    end
    dx=min (abs (dx),ac);
    if abs (y)<epsilon,break,end
end
z;
error=abs (b-a)/2;
y=feval (f,z);
```

לאחר 13 איטרציות בלבד מגיעים לניחוש 1.1268.
לכן שיטה זו טובה יותר.