

# מופשטת 1 – תרגיל בית 12

## שאלה 1

א. נתונות שש חבורות מסדר 40. זהו אילו חבורות איזומורפיות זו לזו:  
 $\mathbb{Z}_{40}$ ,  $U_{10} \times \mathbb{Z}_{10}$ ,  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ ,  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ ,  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ ,  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}$ ,  $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_5$ .

- ב. 1. כמה חבורות אבליות מסדר 500 (עד כדי איזומורפיזם) יש?  
2. בכמה מהן יש איבר מסדר 4?  
3. בכמה מהן יש איבר מסדר 20?  
ג. מצאו מספר חבורות אבליות (עד כדי איזומורפיזם) מסדר 3600. בכמה מהן יש תת-חבורה 5-סילו ציקלית?  
ד. מצאו את  $\exp(S_3), \exp(S_5)$ .

## שאלה 2

- א. מצאו כמה איברים מכל סדר יש בחבורות  
 $\mathbb{Z}_{p^3}$ ,  $\mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p$ ,  $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ .
- ב. הוכיחו שבחבורת  $p$  אבלית לא ציקלית יש תת חבורה מסדר  $p^2$  שאינה ציקלית.

## שאלה 3

האם קיימת חבורה אבלית  $G$ , כך ש-  $\exp(G) = 4$ ,  $|G| = 32$ ,  $|G/G^2| = 4$ ?

## שאלה 4

הראו ש-  $D_4$  פתירה.

## שאלה 5

- א. תהא  $G$  חבורה מסדר 34. הוכיחו שהיא פתירה.  
ב. הראו שחבורת הקוטרניונים  $Q_8$  פתירה.  
ג. הוכיחו שכל חבורה מסדר 88 היא פתירה.

## שאלה 6

מעל קבוצה  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$  נגדיר פעולה  $(a_1, b_1) \bullet (a_2, b_2) = (a_1 + b_1 a_2, b_1 b_2)$ . הוכיחו:  
א.  $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \bullet)$  חבורה והיא לא אבלית.  
ב. חשבו את  $G', G''$  והראו ש-  $G$  פתירה.

## שאלה 7

אם  $A, B$  תתי חבורות נורמליות של  $G$  אזי  $[A, B] \subseteq A \cap B$ .

### שאלת בונוס 1

תהי  $G$  חבורה ו- $A \triangleleft G$ . נתון ש- $G/A$  ציקלית. הוכיחו ש- $[G, A] = [G, G]$ .

### שאלת בונוס 2

- א. הוכיחו שהשיכון  $G \rightarrow S_n$  שמספק משפט קיילי הוא למעשה לתוך  $A_n$ , אם ורק אם תת חבורת 2-סילו של  $G$  אינה ציקלית.  
ב. נניח של- $G$  יש תת חבורת 2-סילו ציקלית. הוכיחו של- $G$  יש תת חבורה מאינדקס 2.

**בהצלחה במבחן!**