תוכן עניינים

פתרונות למבחנים אינפי 3

3 במאי 2024

מבחן תשע"ג מועד א'

שאלה 1:

תהי

$$f\left(x,y,z\right)=\begin{cases}\frac{z\sin(xy)}{\left(x^{2}+y^{2}+z^{2}\right)^{\frac{1}{3}}} & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

א. מצא את $\frac{\partial f}{\partial x}$.

ב. האם f דיפ' ב$(0,0,0)$.

פתרון:

א. בנקודות שאינן $(0,0,0)$ ניתן לגזור לפי כללי גזירה:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,y,z\right) & =\frac{z\cos\left(xy\right)\cdot y\cdot\left(x^{2}+y^{2}+z^{2}\right)^{\frac{1}{3}}-z\sin\left(xy\right)\cdot\frac{1}{3}\left(x^{2}+y^{2}+z^{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot2x}{\left(x^{2}+y^{2}+z^{2}\right)^{\frac{2}{3}}}\\ & =\frac{yz\cos\left(xy\right)\left(x^{2}+y^{2}+z^{2}\right)-\frac{2xz}{3}\sin\left(xy\right)}{\left(x^{2}+y^{2}+z^{2}\right)^{\frac{4}{3}}}\end{aligned}$$

ב$(0,0,0)$ נחשב לפי הגדרה:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,0,0\right)=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{f\left(t,0,0\right)-f\left(0,0,0\right)}{t}=0$$

ב. נבדוק האם שאר הנגזרות חלקיות קיימות ב$(0,0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,0,0\right)=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{f\left(0,t,0\right)-f\left(0,0,0\right)}{t}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}\left(0,0,0\right)=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{f\left(0,0,t\right)-f\left(0,0,0\right)}{t}=0$$

נבדוק האם הפונקציה רציפה, כלומר נבדוק האם $0 = \lim_{(x,y,z)\longrightarrow(0,0,0)} \frac{z\sin(xy)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{3}}}$,
נשתמש בסנדוויץ':

$$0 \le \left|\frac{z\sin(xy)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{3}}}\right| \le \left|\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{3}}}\right| \le \left|\frac{z}{z^{\frac{2}{3}}}\right| = \left|z^{\frac{1}{3}}\right| \overset{(x,y,z)\longrightarrow(0,0,0)}{\longrightarrow} 0$$

כלומר הפונקציה רציפה.
מכיוון שלא נראה כיף לבדוק האם הנגזרות החלקיות רציפות, נבדוק לפי הגדרה, כלומר נבדוק האם הגבול הבא שווה ל-0:

$$\lim_{(x,y,z)\longrightarrow(0,0,0)} \frac{f(x,y,z) - f(0,0,0) - \underbrace{f_x(0,0,0)}_{0}\cdot x - 0\cdot y - 0\cdot z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \lim_{(x,y,z)\longrightarrow(0,0,0)} \frac{\frac{z\sin(xy)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{3}}}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{(x,y,z)\longrightarrow(0,0,0)} \frac{z\sin(xy)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{6}}} = \lim_{(x,y,z)\longrightarrow(0,0,0)} \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{6}}}\cdot\frac{\sin(xy)}{xy}$$

$$= \lim_{(x,y,z)\longrightarrow(0,0,0)} \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{6}}}\cdot\underbrace{\lim_{(x,y,z)\longrightarrow(0,0,0)}\frac{\sin(xy)}{xy}}_{1} = \lim_{(x,y,z)\longrightarrow(0,0,0)} \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{6}}}$$

מכיוון שעבור נקודות (x,y,z) שקרובות מאוד ל-$(0,0,0)$ מתקיים $x^2+y^2 \ge 2xy$ ולכן:

$$0 \le \left|\frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{6}}}\right| \le \left|\frac{xyz}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{6}}}\right| \le \left|\frac{xyz}{(2xy)^{\frac{5}{6}}}\right| \le \frac{1}{2^{\frac{5}{6}}}\cdot|z|\cdot|xy|^{\frac{1}{6}} \overset{(x,y,z)\longrightarrow(0,0,0)}{\longrightarrow} 0$$

דרך נוספת ניתן לעבור לקורדינאטות כדוריות, $\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$ ואז נקבל

$$\frac{r^3\cos\theta\sin^2\varphi\sin\theta\cos\varphi}{(r^2)^{\frac{5}{6}}} = \underbrace{r^{\frac{8}{6}}}_{F(r)}\cdot\underbrace{\cos\theta\sin^2\varphi\sin\theta\cos\varphi}_{G(\theta,\varphi)}$$

ולכן הגבול אכן יוצא 0 והפונקציה דיפ' $(0,0,0)$.

שאלה 2:

תהי $f(x,y)$ פונקציה המקיימת $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{xx} + f_{yy} = 0$ ונגדיר

$$g(x,y) = f\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

הראו כי גם g מקיימת $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = g_{xx} + g_{yy} = 0$.

פתרון:

ניזכר בכלל השרשרת באופן כללי:

$$f\left(u\left(x,y\right),v\left(x,y\right)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)=\frac{\partial f}{\partial u}\left(u\left(x_0,y_0\right),v\left(x_0,y_0\right)\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(u\left(x_0,y_0\right),v\left(x_0,y_0\right)\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)=\frac{\partial f}{\partial u}\left(u\left(x_0,y_0\right),v\left(x_0,y_0\right)\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(u\left(x_0,y_0\right),v\left(x_0,y_0\right)\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)$$

בשאלה שלנו $u\left(x,y\right)=\frac{x}{x^2+y^2},v\left(x,y\right)=\frac{y}{x^2+y^2}$ וסימנו לנו $g\left(x,y\right)=f\left(u\left(x,y\right),v\left(x,y\right)\right)$.
נתחיל לגזור את g לפי x לפי כלל השרשרת:

$$g_x=f_u\cdot u_x+f_v\cdot v_x$$

נגזור שוב לפי כלל השרשרת:

$$\begin{aligned}g_{xx}&=\left(f_u\right)_x\cdot u_x+f_u\cdot u_{xx}+\left(f_v\right)_x\cdot v_x+f_v\cdot v_{xx}\\&=\left(f_{uu}\cdot u_x+f_{uv}\cdot v_x\right)\cdot u_x+f_u\cdot u_{xx}+\left(f_{vu}\cdot u_x+f_{vv}\cdot v_x\right)\cdot v_x+f_v\cdot v_{xx}\\&=f_{uu}\cdot u_x^2+2f_{uv}\cdot v_x\cdot u_x+f_u\cdot u_{xx}+f_{vv}\cdot v_x^2+f_v\cdot v_{xx}\end{aligned}$$

באופן דומה נחשב עבור y:

$$g_{yy}=f_{uu}u_y^2+2f_{uv}\cdot v_yu_y+f_u\cdot u_{yy}+f_{vv}\cdot v_y^2+f_v\cdot v_{yy}$$

ולכן סכום יהיה:

$$\begin{aligned}g_{xx}+g_{yy}=&f_{uu}u_x^2+f_{vv}v_x^2+f_{uu}u_y^2+f_{vv}v_y^2+2f_{uv}\cdot v_xu_x+2f_{uv}\cdot v_yu_y\\&+f_uu_{xx}+f_vv_{xx}+f_uu_{yy}+f_vv_{yy}\end{aligned}$$

נחשב את הנגזרות של u ו v לפי x,y:

$$\begin{cases}u_x=\frac{1\cdot\left(x^2+y^2\right)-x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{-x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=-v_y\\u_y=v_x=\frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\end{cases}$$

ולכן

$$u_x^2=v_y^2,u_y^2=v_x^2,u_xv_x=-u_yv_y$$

$$\begin{cases} u_{xx} = \frac{-2x\cdot\left(x^2+y^2\right)^2-\left(-x^2+y^2\right)\cdot 2\cdot\left(x^2+y^2\right)2x}{\left(x^2+y^2\right)^4} = \frac{-2x\left(x^2+y^2\right)-4x\cdot\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3} = \frac{2x^3-6xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^3} \\ u_{yy} = -\frac{2x^3-6xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^3} \end{cases}$$

ולכן $u_{xx}+u_{yy}=0$ ובדומה עבור v.
נסתכל על שלושה חלקים בסכום הזה בנפרד:
א. $f_{uu}u_x^2+f_{vv}v_x^2+f_{uu}u_y^2+f_{vv}v_y^2$ בעצם נשים לב כי:

$$f_{uu}u_x^2+f_{vv}v_x^2+f_{uu}u_y^2+f_{vv}v_y^2 = f_{uu}u_x^2+f_{vv}v_x^2+f_{uu}v_x^2+f_{vv}u_x^2 = \underbrace{\left(f_{uu}+f_{vv}\right)}_{0}\left(u_x^2+v_x^2\right) = 0$$

ב. $2f_{uv}\cdot v_xu_x+2f_{uv}\cdot v_yu_y$ הראנו כי $u_xv_x=-u_yv_y$ ולכן

$$2f_{uv}\cdot v_xu_x+2f_{uv}\cdot v_yu_y = 2f_{uv}\cdot v_xu_x-2f_{uv}\cdot v_xu_x = 0$$

ג. $f_uu_{xx}+f_vv_{xx}+f_uu_{yy}+f_vv_{yy}$ נשים לב כי:

$$f_uu_{xx}+f_vv_{xx}+f_uu_{yy}+f_vv_{yy} = f_u\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+f_v\left(v_{xx}+v_{yy}\right) = 0$$

ולכן סך הכל קיבלנו כי $g_{xx}+g_{yy}=0$ כנדרש.

שאלה 3:

הראה שהמערכת $\begin{cases} x^2+y^2=\frac{1}{2}z^2 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ בסביבת הנקודה $A=(1,-1,2)$ מגדירה את הפונקציות $\begin{cases} x=x(z) \\ y=y(z) \end{cases}$ בצורה סתומה.
מצא את:

$$\frac{d^2x}{dz^2}(2), \frac{dy}{dz}(2), \frac{dx}{dz}(2)$$

פתרון:

נגדיר $\begin{cases} F_1(x,y,z)=x^2+y^2-\frac{1}{2}z^2 \\ F_2(x,y,z)=x+y+z-2 \end{cases}$, נבדוק האם $F_1(A)=F_2(A)=0$:

$$\begin{cases} F_1(1,-1,2)=1^2+1^2-\frac{1}{2}\cdot 2^2=1+1-2=0 \\ F_2(1,-1,2)=1-1+2-2=0 \end{cases}$$

נחשב את הנגזרות החלקיות של F_1, F_2:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x} = 2x, \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y, \frac{\partial F_1}{\partial z} = -z \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z} = 1 \end{cases}$$

נגזרות אלו רציפות בכל $\mathbb{R}^3$ ובפרט בסביבת הנקודה A. נעבור לחישוב היעקוביאן:

$$\frac{\partial (F_1, F_2)}{\partial (x, y)} = \begin{pmatrix} F_{1x} & F_{1y} \\ F_{2x} & F_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

בנקודה A מתקיים:

$$\frac{\partial (F_1, F_2)}{\partial (x, y)} (A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \frac{\partial (F_1, F_2)}{\partial (x, y)} (A) \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = 4 \neq 0$$

לכן כל תנאי משפט הפונקציה הסתומה מערכת של משוואות מתקיימים ולכן קיימת איזושהי סביבה U של הנקודה A בעורה מערכת המשוואות מגדירה פונקציות $\begin{cases} x = x(z) \\ y = y(z) \end{cases}$ גזירות ברציפות. בנוסף לכל נקודה בסביבה מתקיים:

$$\frac{dx}{dz}(z) = -\frac{\begin{vmatrix} F_{1z} & F_{1y} \\ F_{2z} & F_{2y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_{1x} & F_{1y} \\ F_{2x} & F_{2y} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} -z & 2y(z) \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x(z) & 2y(z) \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{-(z + 2y(z))}{2x(z) - 2y(z)} = \frac{z + 2y(z)}{2x(z) - 2y(z)}$$

בנקודה A מתקיים $z = 2$ ולכן $x(2) = 1, y(2) - 1$ ולכן:

$$\frac{dx}{dz}(2) = \frac{2 + 2 \cdot (-1)}{2 \cdot 2 - 2 \cdot (-2)} = \frac{0}{4} = \boxed{0}$$

$$\frac{dy}{dz}(z) = -\frac{\begin{vmatrix} F_{1x} & F_{1z} \\ F_{2x} & F_{2z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_{1x} & F_{1y} \\ F_{2x} & F_{2y} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2x(z) & -z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x(z) & 2y(z) \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{2x(z) + z}{2x(z) - 2y(z)}$$

בנקודה A מתקיים $z = 2$ ולכן $x(2) = 1, y(2) - 1$ ולכן:

$$\frac{dy}{dz}(2) = -\frac{2 + 2}{2 \cdot 2 - 2 \cdot (-2)} = -\frac{4}{4} = \boxed{-1}$$

על מנת לחשב את $\frac{d^2x}{dz^2}(z)$ נגזור את $\frac{dx}{dz}$:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{z + 2y(z)}{2x(z) - 2y(z)}\right) = \frac{\left(1 + 2\frac{dy}{dz}\right)(2x(z) - 2y(z)) - (z + 2y(z)) \cdot \left(2\frac{dx}{dz} - 2\frac{dy}{dz}\right)}{(2x(z) - 2y(z))^2}$$

כעת נוכל להציב את הנקודה A כלומר נציב $z=2, y=-1, x=1, \frac{dx}{dz}=0, \frac{dy}{dz}=-1$ ונקבל:

$$\frac{(1+2\cdot(-1))\cdot(4)-(2-2)\,()}{4^2}=-\frac{4}{16}=\boxed{-\frac{1}{4}}$$

שאלה 4:

(א) מצאו וסווגו את נקודות הקיצון של $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ תחת האילוץ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ כאשר $a>b>c>0$.

(ב) מצאו וסווגו את נקודות הקיצון של

$$f(x,y)=x^3y^2(1-x-y)$$

פתרון:

(א) זה קיצון עם אילוץ נרצה להשתמש בכופלי לאגרנז' האילוץ שלנו הוא $g(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$, הגרדיאנט שלו הוא $\nabla g=\left(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2}\right)$ שהוא שווה ל0 רק בנקודה $(0,0,0)$ שאינה על אילוץ ולכן ניתן להשתמש בופלי לאגרנז', נגדיר:

$$L=f+\lambda g=x^2+y^2+z^2+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

נחשב גרדיאנט לL:

$$\nabla L=\left(2x+\frac{2x\lambda}{a^2},2y+\frac{2y\lambda}{b^2},2z+\frac{2z\lambda}{c^2},\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

נדרוש שהגרדיאנט יתאפס:

$$\begin{cases}x\left(1+\frac{\lambda}{a^2}\right)=0\\ y\left(1+\frac{\lambda}{b^2}\right)=0\\ z\left(1+\frac{\lambda}{c^2}\right)=0\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0\end{cases}$$

מכיוון ש$a>b>c$ λ יכול לאפס רק את אחד מבין שלוש המשוואות הראשונות (והוא חייב לאפס לפחות אחד מהם כי אחרת $x=y=z=0$ והיא לא מקיימת את המשוואה הרביעית) ולכן הנקודות החשודות הן:

$$(\pm a,0,0),(0,\pm b,0),(0,0,\pm c)$$

האילוץ הוא תחום סגור וחסום ולכן לפי היינה בורל קומפקטי, מכיוון שf רציפה אז לפי ויירשטראס קיימים מינימום ומקסימום גלובלים.
נחשב את ערכי f בנקודות האלו:

$$f\left(\pm a,0,0\right)=a^{2},f\left(0,\pm b,0\right)=b^{2},f\left(0,0,\pm c\right)=c^{2}$$

ניזכר כי $a>b>c$ ולכן $a^{2}>b^{2}>c^{2}$ ולכן הנקודות $\left(\pm a,0,0\right)$ הן מקסימום גלובלי (ובפרט מקומי) והנקודות $\left(0,0,\pm c\right)$ הן מינימום גלובלי (ובפרט מקומי).
נראה כי הנקודות $\left(0,\pm b,0\right)$ הן נקודות אוכף:
כאשר $x=0$:
הפונקציה היא $f\left(0,y,z\right)=y^{2}+z^{2}$ והאילוץ הוא $\frac{y^{2}}{b^{2}}+\frac{z^{2}}{c^{2}}=1$ לפי אותם חישובים נקבל כי הנקודות החשודות הן $\left(0,0,\pm c\right),\left(0,\pm b,0\right)$ ערכי f על הנקודות הן $f\left(0,\pm b,0\right)=b^{2}>c^{2}=f\left(0,0,\pm c\right)$,האילוץ הוא תחום סגור וחסום ולכן לפי היינה בורל קומפקטי, מכיוון שf רציפה אז לפי ויירשטראס קיימים מינימום ומקסימום גלובלים. ולכן במקרה זה $\left(0,\pm b,0\right)$ מקסימום.
כאשר $z=0$:
הפונקציה היא $f\left(x,y,0\right)=x^{2}+y^{2}$ והאילוץ הוא $\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$ לפי אותם חישובים נקבל כי הנקודות החשודות הן $\left(0,\pm b,0\right),\left(\pm a,0,0\right)$ ערכי f על הנקודות הן $f\left(0,\pm b,0\right)=b^{2}<a^{2}=f\left(\pm a,0,0\right)$,האילוץ הוא תחום סגור וחסום ולכן לפי היינה בורל קומפקטי, מכיוון שf רציפה אז לפי ויירשטראס קיימים מינימום ומקסימום גלובלים. ולכן במקרה זה $\left(0,\pm b,0\right)$ מינימום.
ולכן $\left(0,\pm b,0\right)$ הן נקודות אוכף.
ב) $f\left(x,y\right)=x^{3}y^{2}\left(1-x-y\right)=x^{3}y^{2}-x^{4}y^{2}-x^{3}y^{3}$, נחשב את הגרדיאנט של f:

$$\nabla f=\left(3x^{2}y^{2}-4x^{3}y^{2}-3x^{2}y^{3},2x^{3}y-2x^{4}y-3x^{3}y^{2}\right)$$

נדרוש שהגרדיאנט יתאפס:

$$\begin{cases}x^{2}y^{2}\left(3-4x-3y\right)=0\\x^{3}y\left(2-2x-3y\right)=0\end{cases}$$

ניתן לראות כל נקודה מהצורה $\left(0,t\right)$ או $\left(t,0\right)$ כאשר t ממשי תאפס את הגרדיאנט. כעת נדרוש ש$x,y\neq0$ לכן צריך להתקיים

$$\begin{cases}3-4x-3y=0\\2-2x-3y=0\end{cases}\Rightarrow1-2x=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow1-3y=0\Rightarrow y=\frac{1}{3}$$

כלומר כל הנקודות החשודות הן:

$$\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)\right\}\cup\left\{\left(t,0\right)|t\in\mathbb{R}\right\}\cup\left\{\left(0,t\right)|t\in\mathbb{R}\right\}$$

נרצה לסווג נקודות אלו.
ננסה לסווג באמצעות מטריצת ההסיאן:

$$H_{f}\left(x,y\right)=\begin{pmatrix}6xy^{2}-12x^{2}y^{2}-6xy^{3} & 6x^{2}y-8x^{3}y-9x^{2}y^{2}\\6x^{2}y-8x^{3}y-9x^{2}y^{2} & 2x^{3}-2x^{4}-6x^{3}y\end{pmatrix}$$

בנקודה $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$ נקבל:

$$H_f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=\begin{pmatrix}6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}-12\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9}-6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{27} & 6\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}-8\cdot\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{3}-9\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9}\\ 6\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}-8\cdot\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{3}-9\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9} & 2\cdot\frac{1}{2^3}-2\cdot\frac{1}{2^4}-6\cdot\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{9} & -\frac{1}{12}\\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{8}\end{pmatrix}$$

נחשב את הדטרמיננטות של המינורים:

$$\det\left(M_1\right)=-\frac{1}{9}<0,\det\left(M_2\right)=\frac{1}{72}-\frac{1}{144}=\frac{1}{72}>0$$

ולכן הנקודה היא נקודת מקסימום.
כעת לכל נקודה מהצורה $\{(t,0)\,|t\in\mathbb{R}\}\cup\{(0,t)\,|t\in\mathbb{R}\}$ הטדרמיננטה של מטריצת ההסיאן תתאפס וגם האיבר הראשון יתאפס ומשפט סילבסטר לא יתן לנו שום מידע. וצריך לסווג "ידנית".
עבור נקודות מהצורה $(0,t)$:
$f\left(0,t\right)=0$, אם נתקדם לאורך הישר $y=-x+t$ נקבל:

$$f\left(x,-x+t\right)=x^3\left(t-x\right)^2\left(\underbrace{1-x-\left(t-x\right)}_{1-t}\right)$$

לכל $t\neq 1$ הסימן מתחלף ב$x=0$ וזו נקודת אוכף.
עבור $t=1$ מסתכלים על $(0,1)$, לאורך הישר $y=1$ נקבל כי:

$$f\left(x,1\right)=x^3\cdot\left(1-x-1\right)=-x^4<0$$

לאורך הישר $y=-2x+1$ נקבל:

$$f\left(x,-2x+1\right)=x^3\left(-2x+1\right)^2\left(\underbrace{1-x+2x-1}_{x}\right)=x^4\left(1-2x\right)^2>0$$

ולכן גם זו נקודת אוכף.
עבור נקודות מהצורה $(t,0)$:
אם $t>1$ אזי קיימת איזושהי סביבה של הנקודה שבה מתקיים $x^3>0,1-x-y<0$ ולכן בסביבה זו

$$f\left(x,y\right)=x^3y^2\left(1-x-y\right)\leq 0$$

וזו נקודת מקסימום.
אם $t<0$ אזי קיימת איזושהי סביבה של הנקודה שבה מתקיים $x^3<0,1-x-y>0$ ולכן בסביבה זו

$$f(x,y)=x^3y^2(1-x-y)\leq 0$$

וזו נקודת מקסימום.

אם $0<t<1$ אזי קיימת איזושהי סביבה של הנקודה שבה מתקיים $x^3>0,1-x-y>0$ ולכן בסביבה זו

$$f(x,y)=x^3y^2(1-x-y)\geq 0$$

וזו נקודת מינימום.

נשארו הנק' $(0,0),(1,0)$ ב$(0,0)$ טיפלנו כשדיברנו על נקודות מהצורה $(0,t)$.

עבור $(1,0)$ נסתכל על נקודות לאורך הישר $x=1$ ושמה נקבל

$$f(1,y)=y^2\cdot(-y)=-y^3$$

שמחליפה סימן ב$y=0$ ולכן זה אוכף.

סך הכל:

הנקודות $\left\{(t,0):t>1\right\}\cup\left\{(t,0):t<0\right\}\cup\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)\right\}$ הן מקסימום.

הנקודות $\left\{(t,0):0<t<1\right\}$ הן מינימום.

הנקודות $\left\{(0,t):t\in\mathbb{R}\right\}\cup\left\{(1,0)\right\}$ הן אוכף.

מבחן תשפ"ד מועד א'

שאלה 1:

תהי $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה וחסומה. נניח כי $F\subset\Omega$ קבוצה סגורה לא ריקה. נגדיר:

$$d=\inf_{x\in F,y\in\mathbb{R}^n\setminus\Omega}\|x-y\|$$

הוכיחו כי $d>0$.

פתרון:

נניח בשלילה כי $d=0$, זה אומר שקיימות סדרות $x_k\in F,y_k\in\mathbb{R}^n\setminus\Omega$ כך ש$\|x_k-y_k\|<$ $\frac{1}{k}$ לכל $k\in\mathbb{N}$.

F סגורה, וחסומה (כי היא מוכלת בקבוצה חסומה) ולכן לפי היינה בורל קומפקטית, ולכן יש לx_k תת סדרה מתכנסת x_{k_j} נסמן את גבולה $x\in F$ השייך לF כי שוב F סגורה. נסתכל על y_{k_j} מכיוון שהמרחק שלה הוא לכל היותר $\frac{1}{k_j}$ מx_{k_j} אז גם היא שואפת ל$x\in F$. כעת Ω פתוחה ולכן $\mathbb{R}^n\setminus\Omega$ סגורה ולכן הגבול של סדרה y_{k_j} שייכת כולה ל$\mathbb{R}^n\setminus\Omega$ גם כן נמצא ב$\mathbb{R}^n\setminus\Omega$ כלומר $x\in\mathbb{R}^n\setminus\Omega$כלומר $x\notin\Omega$ בסתירה לכך ש$F\subset\Omega$.

שאלה 2:

עבור אילו ערכי $\alpha>0$ הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin^\alpha(\|x\|)}{\|x\|} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

דיפ' בנקודה $x=0$.

פתרון:

נחשב את הנגזרות החלקיות:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(0)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(te_i)-f(0)}{t}=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\frac{\sin^{\alpha}(|t|)}{|t|}}{t}=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\sin^{\alpha}(|t|)}{t\,|t|}=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\sin^{\alpha-1}(|t|)}{t}\cdot\frac{\sin(|t|)}{|t|}$$

$$=\lim_{t\longrightarrow 0}\sin^{\alpha-2}(|t|)\cdot\frac{\sin(|t|)}{t}\cdot\frac{\sin(|t|)}{|t|}$$

אם $\alpha>2$ נקבל שהגבול הוא 0, כי $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.
אם $\alpha\leq 2$ הגבול לא יהיה קיים, כי ה$\sin$ יהיה בחזקה שלילית ולכן ישאף ל∞. ולכן במקרה זה הפונקציה אינה דיפ'.
נבדוק האם הפונקציה דיפ' במקרה $\alpha>2$:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{\|x\|}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin^{\alpha}(\|x\|)}{\|x\|^2}=\lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{\sin(\|x\|)}{\|x\|}\right)^2\cdot\sin^{\alpha-2}(\|x\|)=0$$

ולכן הפונקציה דיפ' כאשר $\alpha>2$.

שאלה 3:

מצאו את המינימום והמקסימום של $f(x,y)=x^2+2y^2$ בעיגול $x^2+y^2\leq 4$.

פתרון:

התחום הוא תחום סגור וחסום ולכן לפי היינה בורל קומפקטי ולכן מכיוון שf רציפה קיימים מינימום ומקסימום גלובליסץ
אפשר לראות ישר כי הביטוי $f(x,y)$ הוא תמיד אי שלילי ומתאפס ב$(0,0)$ ולכן $(0,0)$ מינימום גלובלי.
בשביל המקסימום נשים לב כי בכל נקודה פנימית כלומר כל נקודה (x,y) המקיימת $x^2+y^2<4$, נוכל להגדיל מעט את האיקס בערכו המוחלט ונקבל שבנקודה ערך f יהיה גדול ולכן אין אף נקודה פנימית שהיא מקסימום. כלומר אם יש מקסימום הוא בהכרח על השפה שהיא $x^2+y^2=4$ נציב את משוואת השפה בפונקציה ונקבל:

$$g(y)=f(x,y)=x^2+y^2+y^2=4+y^2$$

נגזור אותה:

$$g'(y)=2y$$

מתאפסת ב$y=0$ לזו מתאימות שתי נקודות $(2,0),(-2,0)$ לזה צריך להוסיף כנקודות חשודות את קצוות הקטע של y כלומר $y=\pm 2$ כלומר הנקודות $(0,\pm 2)$. נחשב את ערכי הפונקציה על כל הנקודות:

$$f(2,0)=4,f(-2,0)=4,f(0,\pm 2)=8$$

ולכן $(0,\pm 2)$ מקסימום גלובלי.

שאלה 4:

הוכיחו הפריכו:
א. אם f פונקציה אינט' מעל תיבה $I\subset\mathbb{R}^{n}$ אזי f^{2} גם אינט' מעל I.
ב. אם f^{2} פונקציה אינט' מעל תיבה $I\subset\mathbb{R}^{n}$ אזי f גם אינט' מעל I.

פתרון:

א. הוכחה:
f אינט' ולכן לפי משפט לבג מספר נקודות אי הרציפות שלה הוא ממידה 0, לכן גם מספר נקודות הרציפות של f^{2} (שקטן שווה מספר נקודות אי הרציפות של f) הוא ממידה אפס, ולכן לפי משפט לבג גם f^{2} אינט'.
ב. הפרכה:
נבחר $n=1$ ונגדיר את f להיות $f\left(x\right)=\begin{cases} 1 & \mathbb{Q}\cap[0,1]\\ -1 & \left(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\right)\cap[0,1] \end{cases}$ כאשר $I=[0,1]$.
$f^{2}=1$ פונקציה קבועה שידוע שאינט', אך f אינה רציפה באף נקודה בקטע $[0,1]$. ולכן מספר נקודות האי רציפות אינו ממידה אפס ולכן אינה אינט' לפי קריטריון לבג.
נראה כי f אינה רציפה ב$[0,1]$ $a\in$ לכל a ניתן לקחת סדרה של רציונלים $q_{n}\longrightarrow a$ וסדרה של אי רציונלים $r_{n}\longrightarrow a$ ומתקיים:

$$\begin{cases} f\left(q_{n}\right)=1\longrightarrow1\\ f\left(r_{n}\right)=-1\longrightarrow-1 \end{cases}$$

כלומר יש שתי סדרות השואפות לa אך ערכי f עליהן שואפים לגבולות שונים ולכן הגבול לא קיים בa ובפרט f לא רציפה שם.

שאלה 5:

חשבו את נפח הגוף G החסום מלמטה על ידי הפרבולואיד $z=1-x^{2}-y^{2}$ מלמעלה על ידי המישור $z=4$ ומצדדים על ידי הגליל $x^{2}+y^{2}=1$.

פתרון:

ניזכר כי

$$Vol\left(G\right)=\iiint_{G}1dxdydz$$

נעבור לקורדינאטות גליליות. $\begin{cases} x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z \end{cases}$. r הוא הרדיוס והוא חסום בין 0 ל1. z חסום מלמטה על ידי הפרבולואיד ומלמעלה על ידי המישור ולכן $1-r^{2}\leq z\leq4$, ומכיוון שאין תנאי על הזווית θ בין 0 ל2π כלומר התחום החדש במישור r,θ,z הוא:

$$V=\left\{ \left(r,\theta,z\right):0\leq r\leq1,0\leq\theta\leq2\pi,1-r^{2}\leq z\leq4\right\}$$

היעקוביאן הוא r, ולכן לפי המשפט על החלפת משתנים נקבל כי:

$$\begin{aligned}\iiint_G 1dxdydz &= \iiint_V rdrd\theta dz\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1-r^2}^4 rdzdrd\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 3r+r^3drd\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{3r^2}{2}+\frac{r^4}{4}\bigg|_{r=0}^{r=1}d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{7}{4}d\theta\\ &= \boxed{\frac{7\pi}{2}}\end{aligned}$$

מבחן תשע"ג מועד ב'

שאלה 3:

הראה שהמערכת $\begin{cases}x^2+y^2=2z\\ x^2+2y=\frac{1}{2}z^2\end{cases}$ בסביבת הנקודה $A=(2,2,4)$ מגדירה את הפונקציות $y=y(x)\,,z=z(x)$ בצורה סתומה. מצא את:

$$\frac{dz}{dx}(2)\,,\frac{dy}{dx}(2)\,,\frac{d^2y}{dx^2}(2)$$

פתרון:

נגדיר

$$\begin{cases}F_1(x,y,z)=x^2+y^2-2z\\ F_2(x,y,z)=x^2+2y-\frac{1}{2}z^2\end{cases}$$

בנקודה A מתקיים:

$$\begin{cases}F_1(A)=2^2+2^2-4\cdot 2=0\\ F_2(A)=2^2+2\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot 4^2=0\end{cases}$$

נחשב את הנגזרות החלקיות:

$$F_{1x}=2x,F_{1y}=2y,F_{1z}=-2$$

$$F_{2x}=2x,F_{2y}=2,F_{2z}=-z$$

וכולן רציפות בכל $\mathbb{R}^3$ ובפרט בסביבת הנקודה A,

$$\frac{\partial\left(F_1,F_2\right)}{\partial\left(y,z\right)}=\begin{pmatrix}2y & -2\\ 2 & -z\end{pmatrix}\Rightarrow\left|\frac{\partial\left(F_1,F_2\right)}{\partial\left(y,z\right)}\left(A\right)\right|=\begin{vmatrix}4 & -2\\ 2 & -4\end{vmatrix}=-16+4=-12\neq0$$

כלומר כל תנאי משפט הפונקציה הסתומה מערכת של משוואות מתקיימים ולכן המשוואות מגדירות את הפונקציות $\begin{cases}y=y\left(x\right)\\ z=z\left(x\right)\end{cases}$ בצורה סתומה, כמו כן פונקציות גזירות ברציפות ומתקיים:

$$\frac{dy}{dx}\left(x\right)=-\frac{\left|\frac{\partial\left(F_1,F_2\right)}{\partial\left(x,z\right)}\right|}{\left|\frac{\partial\left(F_1,F_2\right)}{\partial\left(y,z\right)}\right|}=-\frac{\begin{vmatrix}2x & -2\\ 2x & -z\left(x\right)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2y\left(x\right) & -2\\ 2 & -z\left(x\right)\end{vmatrix}}=-\frac{-2x\cdot z\left(x\right)+4x}{-2y\left(x\right)z\left(x\right)+4}=\frac{4x-2xz\left(x\right)}{4-2y\left(x\right)z\left(x\right)}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(2\right)=-\frac{-2\cdot2\cdot4+2\cdot4}{-2\cdot2\cdot4+4}=-\frac{-16+8}{-16+4}=-\frac{-8}{-12}=-\frac{2}{3}$$

$$\frac{dz}{dx}\left(x\right)=-\frac{\left|\frac{\partial\left(F_1,F_2\right)}{\partial\left(y,x\right)}\right|}{\left|\frac{\partial\left(F_1,F_2\right)}{\partial\left(y,z\right)}\right|}=-\frac{\begin{vmatrix}2y\left(x\right) & 2x\\ 2 & 2x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2y\left(x\right) & -2\\ 2 & -z\left(x\right)\end{vmatrix}}=-\frac{4x\cdot y\left(x\right)-4x}{-2y\left(x\right)z\left(x\right)+4}$$

$$\frac{dz}{dx}\left(2\right)=-\frac{4\cdot2\cdot2-4\cdot2}{-2\cdot2\cdot4+4}=-\frac{168}{-16+4}=-\frac{8}{-12}=\frac{2}{3}$$

כעת נגזור את $\frac{dy}{dx}$ שוב כאשר נתייחס לy,z כפונקציות של x:

$$\frac{dy^2}{dx^2}\left(x\right)=\frac{\left(4-2\left(z+x\frac{dz}{dx}\right)\right)\left(4-2yz\right)-\left(4x-2xz\right)\cdot\left(-2\cdot\left(\frac{dy}{dx}\cdot z+y\cdot\frac{dz}{dx}\right)\right)}{\left(4-2yz\right)}$$

נציב $x=y=2, z=4, \frac{dz}{dx}=\frac{2}{3}, \frac{dy}{dx}=-\frac{2}{3}$ ונקבל כי:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2}(2) &= \frac{\left(4-2\cdot\left(4-2\cdot\frac{2}{3}\right)\right)\cdot(4-2\cdot2\cdot4)-(4\cdot2-2\cdot2\cdot4)\left(-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\cdot4+2\cdot\frac{2}{3}\right)\right)}{(4-2\cdot2\cdot4)} \\
&= \frac{\left(4-2\cdot\left(4-\frac{4}{3}\right)\right)\cdot(-12)-(-8)\left(-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\cdot2\right)\right)}{-12} \\
&= \frac{\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot(-12)+\frac{64}{3}}{-12} \\
&= \frac{16+\frac{64}{3}}{-12} \\
&= \frac{48+64}{-36} \\
&= \boxed{-\frac{28}{9}}
\end{aligned}$$

מבחן תשע"ב מועד א'

שאלה 2:

תהי $f(u,v)=\left(uv, u-v^2\right)$ (פונקציה מ$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$) כאשר $\begin{cases} u(x,y)=x\ln(xy) \\ v(x,y)=\frac{1}{x+y}\end{cases}$

חשבו את היעוקביאן:

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(1,1)$$

פתרון:

נשתמש בכלל השרשרת, נגדיר:
נסמן $h(x,y)=(u(x,y),v(x,y))=\left(x\ln(xy), \frac{1}{x+y}\right)$. נחשב מטריצות יעוקבי של h לפי x,y:

$$J_h(x,y)=\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \ln(xy)+x\cdot\frac{y}{xy} & x\cdot\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}y} \\ \frac{-1}{(x+y)^2} & \frac{-1}{(x+y)^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \ln(xy)+1 & \frac{\cancel{x}}{y} \\ \frac{-1}{(x+y)^2} & \frac{-1}{(x+y)^2} \end{pmatrix}$$

כולן רציפות בסביבת $(1,1)$, ולכן h דיפ' בנקודה $(1,1)$,

$$J_h(1,1)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$h(1,1)=\left(0,\frac{1}{2}\right)$, נחשב מטירצת יעקובי של f לפי u,v:

$$J_f(u,v)=\begin{pmatrix} f_{1u} & f_{1v} \\ f_{2u} & f_{2v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v & u \\ 1 & -2v \end{pmatrix}$$

כולן רציפות בכל המישור ובפרט בסביבת $h(1,1)$. ולכן f דיפ' ב$h(1,1)$, כמו כן:

$$J_f(h(1,1)) = J_f\left(0,\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

כעת לפי כלל השרשרת

$$J_{f\circ h}(1,1) = J_f(h(1,1))\cdot J_h(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

כעת אם ביקשו מטריצת יעקובי סיימנו, אם ביקשו דיפראנציאל צריך להכפיל בוקטור $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ כללי ונקבל $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x+y) \\ \frac{5}{4}(x+y) \end{pmatrix}$, אם ביקשו יעוקביאן נקבל שזה הדטרמיננטה של זה שזה 0.

שאלה 3:

הראה שהמשוואה $xz = y + z^3$ מגדירה בסביבת הנקודה $(x,y,z) = (3,-2,2)$ את z כפונקציה של x,y וחשבו את:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(3,-2), \frac{\partial z}{\partial y}(3,-2)$$

פתרון:

נגדיר $F(x,y,z) = z^3 + y - xz$, מתקיים:

$$F(3,-2,2) = 2^3 - 2 - 3\cdot 2 = 8 - 2 - 6 = 0$$

נחשב את הנגזרות החלקיות:

$$F_x = -z, F_y = 1, F_z = 3z^2 - x$$

כולן רציפות בכל $\mathbb{R}^3$ ובפרט בסביבת הנקודה $(3,-2,2)$. כמו כן:

$$F_z(3,-2,2) = 3\cdot 2^2 - 3 = 9 \neq 0$$

לכן כל תנאי משפט הפונקציה הסתומה מתקיימים, ולכן בסביבת נקודה זו ניתן לחלץ את z כפונקציה של x וy כך ש$z(3,-2) = 2$. כמו כן מהמשפט נקבל נוסחה לנגזרות:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{F_x(x,y,z(x,y))}{F_z(x,y,z(x,y))} = -\frac{-z}{3z^2 - x}$$

כעת נציב $x=3, y=-2, z\left(3,-2\right)=2$ ונקבל כי

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(3,-2\right)=\frac{2}{9}$$

באותו אופן נחשב עבור y:

$$\frac{\partial z}{\partial y}\left(x,y\right)=-\frac{F_y\left(x,y,z\left(x,y\right)\right)}{F_z\left(x,y,z\left(x,y\right)\right)}=-\frac{1}{3z^2-x}$$

כעת נציב $x=3, y=-2, z\left(3,-2\right)=2$ ונקבל כי

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(3,-2\right)=-\frac{1}{9}$$

שאלה 4:

א.מצא את הנקודות הקריטיות של הפונקציה הבאה וסווג אותן:

$$f\left(x,y\right)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$$

פתרון:

א.נחשב את הגרידאנט:

$$\nabla f=\left(4x^3-2x-2y,4y^3-2x-2y\right)$$

נשווה את הגרדיאנט לאפס ונקבל:

$$\begin{cases}4x^3-2x-2y=0\\4y^3-2x-2y=0\end{cases}$$

נחסר בין המשוואות ונקבל כי $x^3-y^3=0$ ולכן $x^3=y^3$ ולכן $x=y$, נציב חזרה במשוואה הראשונה ונקבל:

$$4x^3-4x=4x\left(x^2-1\right)=0\Rightarrow x=0,\pm1$$

כלומר קיבלנו את הנקודות $\left(-1,-1\right)\left(1,1\right),\left(0,0\right)$.
נרצה לסווג אותן באמצעות ההסיאן, נחשב את ההסיאן:

$$H_f\left(x,y\right)=\begin{pmatrix}12x^2-2 & -2\\-2 & 12y^2-2\end{pmatrix}$$

עבור הנקודות $(1,1)\,(-1,-1)$ נקבל את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$$

נבדוק מה הדטרמיננטות של המינורים:

$$\det(M_1) = 10 >, \det(M_2) = 10^2 - (-2)^2 = 96 > 0$$

כלומר הדטרמיננטות של המינורים הם חיוביים ולכן אלו נקודות מינימום.
עבור $(0,0)$ נקבל המטריצה

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

שהדטרמיננטה שלה היא 0 ולכן ההסיאן לא עוזר לסווג אותה.
נכתוב מחדש את הפונקציה:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2 = x^4 + y^4 - (x+y)^2$$

$f(0,0) = 0$.
נסתכל על מסלולים:
לאורך המסלול $x + y = 0$ הפונקציה תהיה:

$$f(x,-x) = 2x^4$$

ושמה יש ב$x = 0$ נקודת מינימום כלומר לאורך מסלול זה $(0,0)$ היא מינימום.
לאורך המסלול $x = 0$ הפונקציה תהיה

$$f(0,y) = y^4 - y^2 = y^2\left(y^2 - 1\right)$$

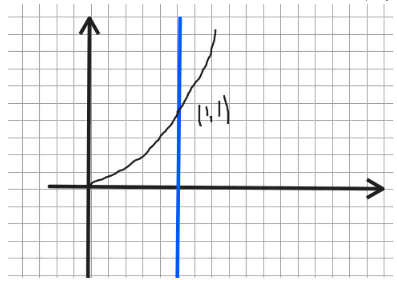
ובכל סביבה של $(0,0)$ יש נקודה $(0,y)$ בה ערך y מקיים $0 < y < 1$ ולכן בנקודה זו $f(0,y) < 0$.
ולכן בסך הכל נקבל כי $(0,0)$ היא נקודת אוכף.

שאלה 5:

(א) חשבו את $\iint_K ye^{x^5}dxdy$ כאשר K היא הקבוצה החסומה על ידי הקווים $x = 1, y = 0, y = x^2$.
(ב) חשבו את $\iiint_K z^2dxdydz$ כאשר K היא חיתוך של הכדור $\left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 4\right\}$ והגליל $\left\{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1\right\}$.

פתרון:

(א) נצייר את התחום:



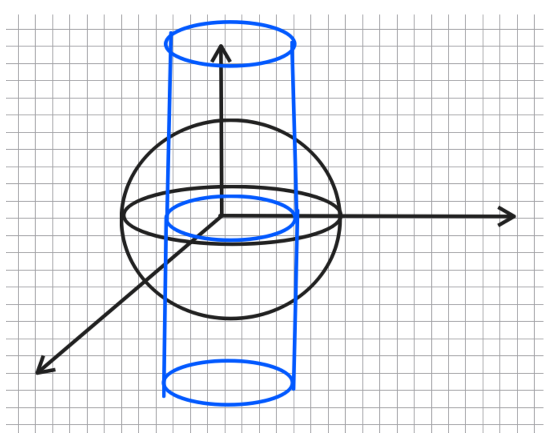
לפי הפונקציה ניתן לראות כי ה-y צריך להיות האינטגרל הפנימי יותר ולכן נכתוב את התחום באופן הבא:

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2\right\}$$

הפונקציה רציפה ולכן פוביני נקבל כי:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_K y e^{x^5}\, dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} y e^{x^5}\, dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x^4}{2} \cdot e^{x^5}\right) dx \\
&= \frac{1}{10} \cdot e^{x^5}\Big|_0^1 \\
&= \boxed{\frac{e-1}{10}}
\end{aligned}$$

(ב) נצייר את התחום:



ומהסימטריה הגלילית של התחום, נראה שכדאי לעבור לקורדינאטות גליליות.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

מכיוון שאנחנו בתוך הגליל נקבל כי $0 \le r \le 1$. אין הגבלה מבחינת סיבוב ולכן $0 \le \theta \le 2\pi$.

נרצה למצוא מה הגבולות של z, במשוואת הכדור $x^2+y^2+z^2=4$ כלומר $z=\pm\sqrt{4-x^2-y^2}$ בקורדינאטות גליליות $z=\pm\sqrt{4-r^2}$ כלומר

$$-\sqrt{4-r^2} \le z \le \sqrt{4-r^2}$$

כלומר במרחב r,θ,z התחום שלנו יהיה

$$V = \left\{ (r,\theta,z) : 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi, -\sqrt{4-r^2} \le z \le \sqrt{4-r^2} \right\}$$

היעקוביאן הוא r שמתאפס רק בנקודה אחת מה שלא משפיע ולכן מותר להפעיל את המשפט על החלפת משתנים.

הפונקציה הייתה z^2 ונשארת z^2. כעת לפי המשפט על החלפת משתנים נקבל כי:

$$\begin{aligned}
\iiint_K z^2 dxdydz &= \iiint_V z^2 \cdot r dr d\theta dz \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} z^2 r dz \right) dr \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(r \cdot \frac{z^3}{3} \Big|_{z=-\sqrt{4-r^2}}^{z=\sqrt{4-r^2}} \right) dr \right) d\theta \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (-2r) \cdot \left(4-r^2\right)^{1.5} dr \right) d\theta \\
&= -\frac{1}{3} \cdot \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{5} \cdot \left(4-r^2\right)^{2.5} \Big|_{r=0}^{r=1} \right) d\theta \\
&= -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{3^5} - \sqrt{4^5} \right) d\theta \\
&= \boxed{-\frac{4\pi}{15} \cdot \left(\sqrt{3^5} - 32 \right)}
\end{aligned}$$

מבחן תשע"ב מועד ב'

שאלה 1:

תהי

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases} \frac{2xy}{x^{2}+y^{2}} & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0 & \left(x,y\right)=\left(0,0\right) \end{cases}$$

א. מצא את $\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,y\right)$.

ב. האם קיימת $\frac{\partial^{2}f}{\partial y\partial x}\left(0,0\right)$?

פתרון:

א. בנקודות שאינן $\left(0,0\right)$ נגזור לפי כללי גזירה:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,y\right)=\frac{2y\cdot\left(x^{2}+y^{2}\right)-2xy\cdot2x}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{2}}=\frac{2y\left(x^{2}+y^{2}-2x^{2}\right)}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{2}}=\frac{2y^{3}-2y\cdot x^{2}}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{2}}$$

ב$\left(0,0\right)$ נחשב לפי הגדרה:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,0\right)=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{f\left(t,0\right)-f\left(0,0\right)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{0-0}{t}=0$$

סך הכל $\frac{\partial f}{\partial x}$ קיימת בכל נקודה ונתונה על ידי:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases} \frac{2y^{3}-2y\cdot x^{2}}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{2}} & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0 & \left(0,0\right) \end{cases}$$

ב. ניזכר כי $\left(0,0\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^{2}f}{\partial y\partial x}\left(0,0\right)$, לשם נוחות נסמן $g\left(x,y\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,y\right)=\begin{cases} \frac{2y^{3}-2y\cdot x^{2}}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{2}} & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0 & \left(0,0\right) \end{cases}$ ונבדוק האם קיימת $\frac{\partial g}{\partial y}\left(0,0\right)$ לפי הגדרה:

$$\frac{\partial g}{\partial y}\left(0,0\right)=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{g\left(0,t\right)-g\left(0,0\right)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{2t^{3}}{t^{4}}}{t}=2\cdot\lim_{t\longrightarrow0}\frac{1}{t^{2}}=\infty$$

ולכן הנגזרת החלקית $\frac{\partial^{2}f}{\partial y\partial x}\left(0,0\right)$ לא קיימת.

שאלה 4:

מצא את הנקודות הקריטיות של הפונקציה הבאה וסווג אותן:

$$f\left(x,y,z\right)=7\left(x^{2}+y^{2}+z^{2}\right)+10xy+12xz+4yz$$

פתרון:

נחשב את הגרדיאנט:

$$\nabla f = (14x + 10y + 12z, 14y + 10x + 4z, 14z + 12x + 4y)$$

נשווה את הגרדיאנט ל0 ונקבל:

$$\begin{cases} 14x + 10y + 12z = 0 \\ 10x + 14y + 4z = 0 \\ 12x + 4y + 14z = 0 \end{cases}$$

נשים לב כי ניתן לכתוב את המערכת בצורה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 14 & 10 & 12 \\ 10 & 14 & 4 \\ 12 & 4 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ברור כי וקטור האפס הוא פתרון כי זו מערכת הומוגנית, נחשב את הדטרמיננטה של המטריצה $\begin{pmatrix} 14 & 10 & 12 \\ 10 & 14 & 4 \\ 12 & 4 & 14 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 14 & 10 & 12 \\ 10 & 14 & 4 \\ 12 & 4 & 14 \end{vmatrix} &= 12 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 14 & 4 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 14 & 12 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} + 14 \cdot \begin{vmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{vmatrix} \\ &= 12 \cdot (40 - 168) - 4 \cdot (56 - 120) + 14 \cdot (196 - 100) \\ &= 12 \cdot (-128) - 4 \cdot (-64) + 14 \cdot 96 \\ &= -(10 \cdot 128 + 2 \cdot 128) + 256 + 10 \cdot 96 + 4 \cdot 96 \\ &= -1280 + 960 + 384 \\ &> 0 \end{aligned}$$

ובפרט הדטרמיננטה שונה מאפס, ולכן המטריצה הפיכה ווקטור האפס הוא הפתרון למערכת ההומוגנית.
כלומר הנקודה $(0, 0, 0)$ היא הנקודה החשודה היחידה.
נרצה לסווג אותה באמצעות ההסיאן, נחשב את מטריצת ההסיאן:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 14 & 10 & 12 \\ 10 & 14 & 4 \\ 12 & 4 & 14 \end{pmatrix}$$

נחשב את הדטרמיננטות של המינורים:

$$\det(M_1) = 14 > 0, \det(M_2) = 14^2 - 10^2 = 96 > 0$$

את $\det(M_3)$ כבר חישבנו וראינו שחיובי סך הכל כל הדטרמיננטות של המינורים הם חיוביים והנקודה היא נקודת מינימום. כלומר $(0, 0, 0)$ מינימום.

שאלה 5:

א. חשב את $\iint_K \sqrt{x^2+y^2-1}dxdy$ כאשר K היא הקבוצה ברביע הראשון החסומה על ידי הקווים:

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x, y=x, x^2+y^2=1, x^2+y^2=4$$

ב. חשב את $\iiint_K xdxdydz$ כאשר K היא הקבוצה החסומה על ידי המישורים $x=0, y=0, z=0, y=1, x+z=a$ כאשר $a>0$.

פתרון:

א. נעבור לפולרי: $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ r הוא הרדיוס ונתון על ידי $r=\sqrt{x^2+y^2}$ ולכן $1\le r^2\le 4$ ומכיוון שr הוא אי שלילי נקבל כי $1\le r\le 2$.
בנוסף:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x\le y\le x\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{3}}\le\frac{y}{x}\le 1\Rightarrow\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\le\underbrace{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}_{\theta}\le\arctan(1)$$

ולכן מכיוון שx,y שניהם חיוביים נקבל כי $\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$. כלומר התחום החדש במישור r,θ הוא:

$$E=[1,2]\times\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$$

הפונקציה היא $\sqrt{r^2-1}=\sqrt{x^2+y^2-1}$, היעקוביאן הוא r שלא מתאפס בתחום ולכן:

$$\begin{aligned}\iint\limits_K\sqrt{x^2+y^2-1}dxdy&=\iint\limits_E\sqrt{r^2-1}\cdot rdrd\theta\\&=\int\limits_1^2\left(\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}r\cdot\left(r^2-1\right)^{0.5}d\theta\right)dr\\&=\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\int\limits_1^2 r\cdot\left(r^2-1\right)^{0.5}dr\\&=\frac{\pi}{12}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(r^2-1\right)^{1.5}\Big|_{r=1}^{r=2}\\&=\boxed{\frac{\pi}{36}\cdot\sqrt{3^3}}\end{aligned}$$

ב. אחרי שציירנו את התחום (אפשר גם בלי אבל לפי דעתי יותר קשה) נכתוב כתחום נורמלי:

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq a, 0 \leq z \leq a - x\right\}$$

הפונקציה רציפה ולכן לפי פוביני נקבל כי:

$$\begin{aligned}
\iiint_K x\,dx\,dy\,dz &= \int_0^1 \left(\int_0^a \left(\int_0^{a-x} x\,dz\right) dx\right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^a x\,(a-x)\,dx\right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^a ax - x^2 dx\right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=0}^{x=a}\right) dy \\
&= \frac{a^3}{6} \cdot \int_0^1 dy \\
&= \boxed{\frac{a^3}{6}}
\end{aligned}$$

מבחן תשע"ז מועד א'

שאלה 4:

$$\iiint_E \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$$

כאשר $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq z\right\}$.

פתרון:

נעבור לקורדינאטות כדוריות:

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

נבדוק איך נראה התחום החדש:

$$x^2+y^2+z^2=r^2\leq r\cos\varphi=z$$

באופן כללי התחום של φ יכול להיות בין 0 לπ, אבל נרצה ש$\cos\varphi\geq 0$ ולכן נדרוש כי $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$, כעת $r\leq\cos\varphi$ כמו כן r הוא אי שלילי ולכן $0\leq r\leq\cos\varphi$, אין עוד מגבלות ולכן $\theta\in[0,2\pi]$ ונקבל כי התחום החדש הוא:

$$W=\left\{(r,\theta,\varphi):0\leq r\leq\cos\varphi,0\leq\theta\leq 2\pi,0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}\right\}$$

הפונקציה הייתה $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ובקורדינאטות כדוריות זה בדיוק r, היעקוביאן הוא $r^2\sin\varphi$, ולכן לפי החלפת משתנים נקבל כי:

$$\begin{aligned}\iiint_E\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz&=\iiint_W r^3\sin\varphi drd\theta d\varphi\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\cos\varphi}\left(\int_0^{2\pi}r^3\sin\varphi d\theta\right)dr\right)d\varphi\\&=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\cos\varphi}r^3\sin\varphi dr\right)d\varphi\\&=2\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\left.\frac{r^4}{4}\right|_{r=0}^{r=\cos\varphi}d\varphi\\&=\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cdot\cos^4\varphi d\varphi\\&=\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left.\cos^5\varphi\right|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}\\&=\boxed{\frac{\pi}{10}}\end{aligned}$$

שאלה 5:

תהי $U\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה וחסומה, ותהי $f:\overline{U}\longrightarrow\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ב$-\overline{U}$ ודיפ' בU.
נניח כי f מתאפסת על ∂U הוכיחו כי קיים $x\in U$ עבורו $\nabla f(x)=0$.

פתרון:

במשתנה יחיד גרסה דומה היא זו:

תהי $U\subset\mathbb{R}$ פתוחה וחסומה (לחשוב על קטע (a,b)) ותהי $f:\overline{U}\longrightarrow\mathbb{R}$ (חושבים על $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$) רציפה בקטע הסגור וגזירה בקטע הפתוח, $f(a)=f(b)=0$, וצריך להוכיח כי קיים $x\in(a,b)$ כך ש$f'(x)=0$. זה בדיוק רול.
$[a,b]$ הוא קטע סגור f רציפה בו ולכן לפי ויירשטראס יש מינימום ומקסימום נסמנם m,M.
אם $m=M$ אז הפונקציה היא קבועה ולכן בכל נקודה הנגזרת תהיה 0.
אם $m<M$ אז לפחות מהם מתקבל בנקודה פנימית ובה מתקיים $f'(x)=0$ לפי פרמה.
בכמה משתנים זה יהיה בדיוק אותו הדבר:
$\overline{U}$ זהו תחום סגור וחסום, f רציפה ב$\overline{U}$ ולכן לפי ויירשטראס f מקבלת מינימום ומקסימום ב$\overline{U}$. נסמנם m,M.
אם $m=M$ אז הפונקציה היא קבועה והגרדיאנט בכל נקודה יהיה 0.
אם $m<M$ אז לפחות אחד מהם מתקבל בנקודה פנימית (כי על השפה f מתאפסת ולכן כל הערכים שעל השפה שווים) נסמנה $x\in U$ ולכן לפי משפט פרמה מתקיים $\nabla f(x)=0$.

מבחן תשע"ו מועד ב'

שאלה 1:

א. נניח כי $\varnothing\neq K\subset\mathbb{R}^n$ היא קבוצה סגורה הוכיחו כי קיימת $p\in K$ כך שלכל נקודה $q\in K$ מתקיים $\|p\|\leq\|q\|$.
הדרכה:
עיינו בחיתוך של K עם כדור מספיק גדול שמרכזו בראשית.
ב. הוכיחו כי אם $0\notin K$ אז נקודה זו היא נקודת שפה.

פתרון:

א. נגדיר $f(x)=\|x\|$ צריך להראות שהיא מקבלת מינימום גלובלי בK (את המינימום סימנו בp), ידוע כי f רציפה, ניקח $B=B_r(0)$ כך שהחיתוך $K\cap B\neq\varnothing$. התחום $K\cap B$ הוא סגור וחסום, סגור כחיתוך של קבוצות סגורות וחסום כי הוא מוכל בכדור B, ולכן לפי היינה בורל קומפקטי, כאמור f רציפה ולכן לפי ויירשטראס קיימת נקודה p שהיא מינימום של f כלומר לכל $k\in K\cap B$ מתקיים:

$$\|p\|\leq\|k\|$$

כעת לכל נקודה $k'\in K\setminus(K\cap B)$ מתקיים:

$$\|k'\|\geq r>\|p\|$$

כלומר לכל נקודה $q\in K$ מתקיים:

$$\|p\|\leq\|q\|$$

כנדרש.
ב. נניח בשלילה שנקודה זו היא פנימית, נסתכל על הישר המחבר את הנקודה p לראשית, בגלל שהנקודה קיימת נקודה אחרת נסמנה p' הנמצאת על הישר וגם שייכת לקבוצה K, אבל מכיוון שq' הוא בין p ל0 אז $\|p'\|\leq\|p\|$ בסתירה.

מספר שאלה לא ידוע מהחוברת של אלעד:

נניח שD, D' הם תחומים קומפקטים ב$\mathbb{R}^2$ וש$\varphi : D' \longrightarrow D$ שייכת לC^1 (גזירה ברציפות).
עוד נניח כי $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ רציפה.
הראו על ידי דוגמה שאם φ לא חח"ע אז ייתכן כי:

$$\iint\limits_{D'} (f \circ \varphi)(u, v) \left| \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right| dudv \neq \iint\limits_{D} f(x, y)\, dxdy$$

פתרון:

נבחר $D = D' = \{1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ בקואורדינטות קוטביות, זו טבעת עם רדיוס 1 בין 1 ל2, היא סגורה וחסומה ולכן קומפקטית.
נתבונן בפונקציה $\varphi : D' \longrightarrow D$ $\varphi(r, \theta) = (r, 2\theta)$. ניקח את הפונקציה $f = 1$ היעקוביאן יהיה:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial (r, \theta)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

ואכן נקבל:

$$\iint\limits_{D'} 1 \cdot 2 = 2S(D') \neq S(D) = \iint\limits_{D} 1$$

והם שונים כי $D = D'$.

מבחן תשע"ט מועד א'

שאלה 1:

תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב$\mathbb{R}^k$. הוכח/הפרך:
א. אם הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לוקטור $y \in \mathbb{R}^k$ אזי $\lim_{n \longrightarrow \infty} \|x_n\| = \|y\|$.
ב. אם הסדרה $\{\|x_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ב$\mathbb{R}$, אזי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ב$\mathbb{R}^k$.
ג. אם הסדרה $\{\|x_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ב$\mathbb{R}$, אזי קיימת תת סדרה של $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ב$\mathbb{R}^k$.

פתרון:

א. הוכחה:
נסמן $x_n = (x_1^n, \ldots, x_k^n), y = (y_1, \ldots, y_k)$ ואיבר כללי ב$\mathbb{R}^k$ יהיה $x = (x_1, \ldots, x_k)$.
נסתכל על פונקציית הנורמה:

$$f(x) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_k^2}$$

וידוע שהיא רציפה כי היא אלמנטרית,ולכן לכל סדרה x_n המתכנסת לy מתקיים:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f\left(x_n\right) = f\left(\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n\right) = f\left(y\right)$$

כלומר אם הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לוקטור $y\in\mathbb{R}^k$ אזי $\lim_{n\longrightarrow\infty}\|x_n\| = \lim_{n\longrightarrow\infty} f\left(x_n\right) =$ $f\left(y\right) = \|y\|$.
כנדרש.

ב. הפרכה: $x_n = \left(-1\right)^n$ $\|x_n\| = 1$ סדרה קבועה שמתכנסת, אבל x_n אינה מתכנסת כי יש לה שתי תתי סדרות עם גבולות שונים.

ג. הוכחה:
הסדרה $\|x_n\|$ מתכנסת ובפרט חסומה כלומר $\|x_n\|\le M$ לכל n ולכן לפי הגדרה הסדרה x_n חסומה, ולכן לפי משפט בולצנו ויירשטראס נקבל כי לx_n יש תת סדרה מתכנסת ב$\mathbb{R}^k$, כנדרש.

שאלה 3:

תהי $f\left(x\right)$ פונקציה במשתנה יחיד גזירה פעמיים ברציפות, נגדיר פונקציה של שני משתנים:

$$g\left(x,y\right) = f\left(x\right) + \frac{1}{2}y^2$$

א. הראה שכל נקודה קריטית של g ב$\mathbb{R}^2$ היא מהצורה $\left(x_0,0\right)$ כאשר x_0 היא נקודה קריטית של f ב$\mathbb{R}$.

ב. מיין את הנקודות הקריטיות הבאות של g ב$\mathbb{R}^2$ בשני המקרים הבאים:
1. כאשר הנקודה המקבילה של f ב$\mathbb{R}$ היא מקסימום מקומי.
2. כאשר הנקודה המקבילה של f ב$\mathbb{R}$ היא מינימום מקומי.

פתרון:

א. נחשב את הגרדיאנט של g:

$$\nabla g = \left(f'\left(x\right), y\right)$$

נדרוש שהגרדיאנט יתאפס ונקבל כי $y=0, f'\left(x\right)=0$ כלומר כל הנקודות החשודות של g הן בדיוק הנקודות $\left(x_0,0\right)$ כך ש$f'\left(x_0\right)=0$ כלומר x_0 נקודה חשודה של f ב$\mathbb{R}$.

ב. נחשב את מטריצת ההסיאן:

$$H_f\left(x,y\right) = \begin{pmatrix} f''\left(x\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. אם x_0 מקסימום מקומי של f אזי $f''\left(x_0\right) < 0$, ולכן הדטרמיננטה של שני המינורים היא שלילית ולכן הנקודה $\left(x_0,0\right)$ היא נקודת אוכף.
2. אם x_0 מינימום מקומי של f אזי $f''\left(x_0\right) > 0$, ולכן הדטרמיננטה של שני המינורים היא חיובית ולכן הנקודה $\left(x_0,0\right)$ היא נקודת מינימום.

שאלה 4:

תהי $g(x,y)$ פונקציה גזירה ברציפות, כך שהעקום $C=\{(x,y):g(x,y)=0\}$ ולא מכיל את הראשית כלומר $g(0,0)\neq 0$, הוכח שקיימת נקודה $(x_0,y_0)\in C$ בעלת מרחק מינימלי מראשית הצירים.

פתרון:

קודם כל g גזירה ברציפות ולכן יש לה נגזרות חלקיות רציפות ולכן היא רציפה, ולכן $C=g^{-1}\{0\}$ סגורה כתמונה הפוכה של קבוצה סגורה תחת פונקציה רציפה.
נגדיר $B=\overline{B_r(0,0)}$ הכדור הסגור שמרכזו בראשית ורדיוסו r, כאשר ניקח r גדול מספיק כך $C\cap B\neq\varnothing$, ונסמן $A=B\cap C$, נשים לב כי A סגור (כחיתוך של קבוצות סגורות) וחסום כי מוכל בכדור B, ולכן מכיוון שאנחנו ב$\mathbb{R}^2$ קומפקטי לפי היינה בורל, בנוסף נשים לב כי פונקציית המרחק מהראשית שנתונה על ידי $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ היא רציפה (כי היא אלמנטרית) ולכן לפי משפט וויירשטראס נקבל כי יש לB מינימום ומקסימום בA נסמן את המינימום (x_0,y_0) ונטען שזו הנקודה שמרחקה מינימלי מראשית הצירים:
לכל נקודה $p\in A$ מתקיים

$$f(x_0,y_0)\leq f(p)$$

כי (x_0,y_0) מינימום גלובלי בA. ולכן מרחקה מהראשית יהיה קטן יותר מהמרחק של הנקודה p.
לכל $q\in C\setminus A$ מתקיים כי

$$f(q)>r\geq f(x_0,y_0)$$

סך הכל לכל נקודה $(x,y)\in C$ מתקיים כי

$$f(x_0,y_0)\leq f(x,y)$$

כלומר המרחק של (x_0,y_0) מראשית הצירים הוא מינימלי.

מבחן תש"פ מועד א'

שאלה 2:

תהי $U_1\subset\mathbb{R}^2$ הכדור הפתוח בעל רדיוס 1 שמרכזו בנקודה $(1,0)$, ותהי $U_2\subset\mathbb{R}^2$ הכדור הפתוח בעל רדיוס 1 שמרכזו $(3,0)$.
א. האם קיימת פונקציה רציפה $f:U_1\cup U_2\longrightarrow\mathbb{R}$ כך שמתקיים $f(1,0)=0, f(3,0)=1$ וגם $f(x,y)\neq\frac{1}{2}$ לכל $(x,y)\in U_1\cup U_2$?
ב. האם קיימת פונקציה רציפה $f:\overline{U_1\cup U_2}\longrightarrow\mathbb{R}$ כך שמתקיים $f(1,0)=0, f(3,0)=1$ וגם $f(x,y)\neq\frac{1}{2}$ לכל $(x,y)\in\overline{U_1\cup U_2}$?

פתרון:

א. כן, למשל ניקח את הפונקציה:

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & (x,y)\in U_1\\ 1 & (x,y)\in U_2\end{cases}$$

הפונקציה היא רציפה, כי U_1, U_2 שתיהן פתוחות והחיתוך שלהן ריק ולכן לכל $(x,y) \in U_1 \cup U_2$ אז או $(x,y) \in U_1$ או $(x,y) \in U_2$, בכל מקרה יש לה סביבה שמוכלת באותה קבוצה ושמה הפונקציה קבועה ולכן רציפה.וניתן לראות שלכל $(x,y) \in U_1 \cup U_2$ מתקיים ש$f(x,y) \in \{0,1\}$ ולכן שונה מחצי. כנדרש.
ב. לא, נב"ש שקיימת פונקציה כזו התחום $D = \overline{U_1 \cup U_2}$ הוא קומפקטי (סגור כי הוא סגור של משהו, וחסום כי $U_1 \cup U_2$ חסום ולכן גם הסגור שלו חסום ולכן לפי היינה בורל קומפקטי) וקשיר כי זה איחוד של כדורים סגורים, f רציפה ולכן לפי ערך הביניים מתקבל כל ערך בין 0 ל1 בפרט $\frac{1}{2}$.

מבחן תשע"ה

תהי f פונקציה דיפ' בנקודה $(0,0)$ נגדיר

$$h(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & xy > 0 \\ 0 & xy \le 0 \end{cases}$$

הוכיחו כי אם $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ אז h דיפ' ב$(0,0)$.

פתרון:

נרצה לחשב את הנגזרות החלקיות של h:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{h(t,0) - h(0,0)}{t} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{h(0,t) - h(0,0)}{t} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

כעת ידוע כי f דיפ' ולכן:

$$\lim_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0) \cdot x - f_y(0,0) \cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

כעת לפי הנתון נקבל כי:

$$\lim_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

נרצה לבדוק האם h דיפ':

$$\lim_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} \frac{h(x,y) - h(0,0) - h_x(0,0) \cdot x - h_y(0,0) \cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} \frac{h(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

כעת מכיוון ש$|h(x,y)| \le |f(x,y)|$ (כי $h = f$ או $h = 0$) נקבל כי:

$$0 \le \left| \frac{h(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \le \left| \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \overset{(x,y) \longrightarrow (0,0)}{\longrightarrow} 0$$

ולכן לפי סנדוויץ מתקיים:

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{h\left(x,y\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

ואכן h דיפ' לפי הגדרה.