

תזכורת:

הגדרה: נניח  $(X_1, \tau_1) \xrightarrow{f} (X_2, \tau_2)$  פונקציה בין מ"ט.  $f$  נקרא הומיאומורפיזם

(Homeomorphism אזהרה: זה לא Homomorphism)

אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

(א)  $f$  חח"ע + על (ז"א קיימת פונקציה  $f^{-1}$ ).

(ב)  $f$  רציפה.

(ג)  $f^{-1}$  רציפה.

הגדרה: נסמן  $(X_1, \tau_1) \simeq (X_2, \tau_2)$  אם קיים  $f: X_1 \rightarrow X_2$  homeomorphism ונגיד

מרחבים הומיאומורפיים.

תכונות שמחלקות את TOP למחלקות:

$$(1) (X, \tau) \simeq (X, \tau)$$

$$(2) (X_2, \tau_2) \simeq (X_1, \tau_1) \Leftrightarrow (X_1, \tau_1) \simeq (X_2, \tau_2)$$

$$(3) (X_1, \tau_1) \simeq (X_3, \tau_3) \Leftrightarrow \begin{cases} (X_1, \tau_1) \simeq (X_2, \tau_2) \\ (X_2, \tau_2) \simeq (X_3, \tau_3) \end{cases}$$

(בשביל להוכיח את (1) משתמשים ב-  $id$ , בשביל (2) ב-  $f^{-1}$  ובשביל (3)  $f_1 \circ f_2$ ).



שאלה חשובה: מתי 2 מרחבים טופולוגיים  $X, Y$  הם הומיאומורפיים או ומתי לא?

$$X \simeq Y \text{ או } X \neq Y$$

שאלה יותר כללית: מתי קיימת פונקציה רציפה ועל  $X \xrightarrow{f} Y$

(ז"א מתי  $Y =$  "תמונה רציפה" של  $X$ ).

**הערה:** מה התכונות שנשמרות ע"י הומיאורפיזמים או ע"י תמונה רציפה?

(א) כל תכונה טופולוגית נשמרת ע"י הומיאורפיזם.

(ב) כל תכונה מטריית נשמרת ע"י איזומטריה.

**שאלה:** למיין קטעים ב-  $\mathbb{R}$ :

(א) עד כדי הומיאורפיזמים (כן יחס שקילות!).

(ב) עד כדי תמונה רציפה (לא יחס שקילות!).

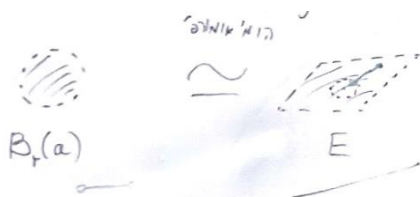
**דוגמאות להומיאורפיזמים:**

- הרכבה של פונקציות רציפות (הומיאומו') גם רציפה (הומיאומו').
- אם  $f: X \rightarrow Y$  רציפה (הומיאומו') אז גם  $f: A \rightarrow f(A)$  רציפה (הומיאומו').
- כל איזומטריה בעצם הומיאורפיזם (ההיפך לא תמיד נכון!).
- בכל מרחב נורמי  $(E, \|\cdot\|)$ : הזזות  $T_v: E \rightarrow E$ ,  $T_v(x) = v + x$  תמיד איזומטריות.
- כפל בסקלר  $c \neq 0$  תמיד הומיאורפיזם:

$0 \neq c \in \mathbb{R}$ ,  $M_c(x) = c \cdot x$ ,  $M_c: E \rightarrow E \in Lip_{|c|}$  קבוע נתון.

$$\boxed{M_c^{-1} = M_{c^{-1}}}$$

**משפט:** כל מרחב נורמי  $\cong$  לכל כדור פתוח שלו.  
הומיאורפי



**הוכחה:**

$\forall r > 0, \forall a \in E: B_r(a) \cong B_1(0)$  – שלב א' –

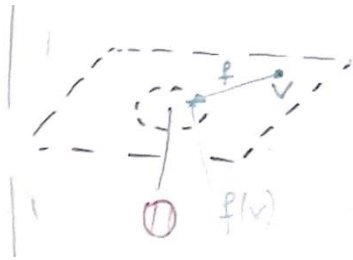
כי:  $B_1(0) \underset{M_r}{\cong} B_r(0) \underset{T_a}{\cong} B_r(a)$

הערה: הרכבה של הומיאורפיזם גם עם צמצום מלא (גם בטווח) הוא הומיאורפיזם.

שלב ב' - מ"ל ש:  $E \underset{f}{\simeq} B_1(0)$

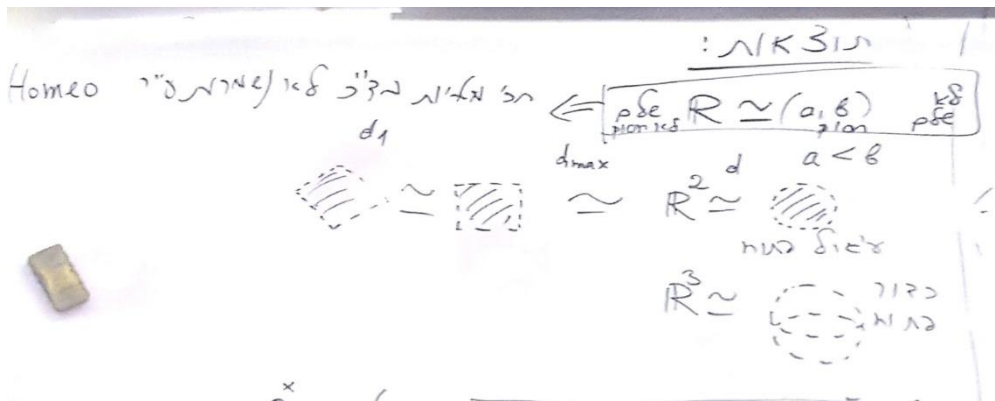
נגדיר  $f: E \rightarrow B(0_E, 1)$   $f(v) = \frac{1}{1+\|v\|} \cdot v$

$f^{-1}: B(0_E, 1) \rightarrow E$   $f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\|x\|} \cdot x$



תוצאות:  $\mathbb{R} \simeq (-1, 1) \simeq (a, b)$

$\mathbb{R}^n \simeq B(v, r) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$



המשך דוגמאות:

- $a < b, c < d$  כאשר  $[a, b] \simeq [c, d]$  (למצוא הומיאומורפיזם פונקציה' לינארית למקוטעין).
- $(a, \infty) \simeq (c, d) \simeq (-\infty, b)$

(חלק מההסבר:  $(0, \infty) \simeq \mathbb{R}$ )

$$\begin{matrix} 2^x \\ \downarrow \\ \mathbb{R} \\ \uparrow \\ \log_2 \end{matrix}$$

•  $(0, 1) \not\simeq [2, 3]$

כי הקטע הסגור קומפקטי בעוד שהקטע הפתוח לא קומפקטי. אפילו לא קיימת פונקציה רציפה ועל מ-  $[2, 3]$  על-  $(0, 1)$  כי קומפקטיות נשמרת ע"י תמונה רציפה.

•  $[3, 8] \not\simeq [0, 1] \cup [3, 6]$

כי הראשון קשיר והשני לא קשיר (למרות ששניהם קשירים ולא קומפקטיים).

$$\bullet [0,1) \neq (2,5)$$

ב - (2,5) כל נקודה היא "נקודה מחלקת"  $(2,5)/\{c\} \notin Conn$ . אבל ב - [0,1) יש נק' שלא מחלקת, זאת נק' 0.  $[0,1)/\{0\} \in Conn$

**הגדרה:** נקודה  $a \in X$  במ"ט  $X$  נקראת **מחלקת** אם:  $X$  קשיר אבל  $X \setminus \{a\}$  לא קשיר.

הערה: קיום של נקודה לא מחלקת זאת **תכונה טופולוגית** (נשמרת ע"י הומיאומורפיזם).

**טענה:** אם  $X \xrightarrow{f} Y$  הומיאומו' אז לכל נק' מחלקת  $p \in X$  גם  $f(p) \in Y$  נק' מחלקת.

$$\text{גם הומיאומורפיזם.} \quad \underbrace{X/\{p\}}_{\text{פריק}} \xrightarrow{f_*} \underbrace{Y/\{f(p)\}}_{\text{שגם פריק}}$$

ז"א לא קשיר

כנ"ל: מספר נקודות מחלקות, מספר נקודות לא מחלקות. כנ"ל מספר מרכיבי קשירות.

- הוכיחו ש -  $8 \neq 0$  (שניהם קומפקטיים, קשירים...)
- \* למיין:

(א) את כל "הספרות"

=1234567890=

(ב) האלף-בית האנגלי

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

(עבור sans serif font "ללא קישוטים, ללא עובי" אותיות וגם הספרות)

- כל פונקציה לינארית בין מרחבים אוקלידיים

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A_f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$$

היא רציפה (ליפשיץ -  $k = \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2}$ ), כאשר  $A_f$  מטריצה של  $f$

⇓

- $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  לינארית הפיכה ( $\det(A_f) \neq 0$ ). אזי  $f$  הומיאומורפיזם.

**תרגיל:** הוכיחו שכל ריבוע/עיגול הומיאומורפי עם אליפסה

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$$

**תרגיל:** הוכיחו שכל הכדורים ב  $(\mathbb{Z}, d_p)$  הם הומיאומורפיים.

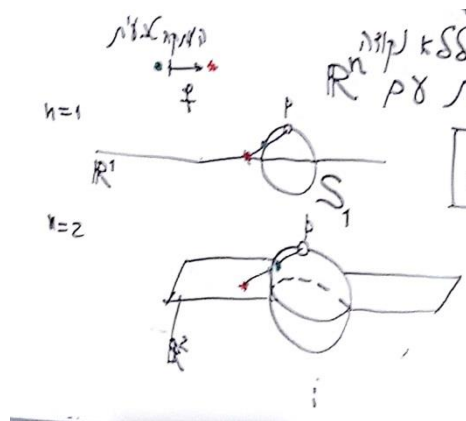
• היטל סטריאוגרפי

**טענה:** ספירה  $n$  – מימדית  $S_n$  ללא נקודה אחת היא הומיאומורפית עם  $\mathbb{R}^n$ .

$$S_n / \{z\} \simeq \mathbb{R}^n$$

$$S_n = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$$

למשל: כאשר  $n = 1, 2$  נגדיר  $f$  לפי:



הגדרות: (אוטומורפיזמים)

חבורת הומיאומורפיזמים של מ"ט

$$Homeo(X) := \{X \xrightarrow{f} X \text{ הומיאומורפיזמים}\}, X \in TOP$$

חבורת איזומטריות של מ"מ

$$Iso(X) := \{(X, d) \rightarrow (X, d) \text{ איזומטריות}\}, X = (X, d) \in Metr$$

**שימו לב:** אם  $\tau = top(d)$  אז  $Iso(X, d)$  תת חבורה של  $Homeo(X, \tau)$ .

$$Iso(X) \leq Homeo(X) \leq \underbrace{(S_X, \circ)}_{\text{חבורה סימטרית ת"ח}}$$

**הגדרה:** נגדיר פעולה טבעית  $Homeo(X) \times X \rightarrow X \quad (f, x) \mapsto f(x)$

מחלקות שקילות  $[x] = \{f(x) \in X \mid f \in Homeo(X)\}$  – אורביטה (מסלול) של  $x$ .

אומרים ש  $X$  – הוא מ"ט הומוגני (*homogeneous*) אם יש רק מסלול 1.

שקול:  $\forall x, y \in X, \exists f \in \text{Homeo}(X): f(x) = y$

דוגמה: כל מ"ט דיסקרטי הוא הומוגני (מה הוא  $(X, \tau_{discr})$  ?)

דוגמה:  $X = (0, 2)$  מ"ט הומוגני.

דוגמה: אם  $X = [0, 1) \cup \{3\}$ . אז לא הומוגני. יש 3 מסלולים הבאים:

$$[3] = \{3\}, \quad [0] = \{0\}, \quad \left[\frac{1}{2}\right] = (0, 1)$$

הגדרה: באופן דומה מגדירים מ"מ  $(X, d)$  הומוגני

(אם לפעולה  $X \rightarrow X \times X$  יש מסלול אחד).

דוגמה:  $\mathbb{R}^n$ , מרחב נורמי,  $S_n, (\mathbb{Z}, d_p)$  מ"מ הומוגניים (לכן גם הומוגני כמ"ט).

דוגמה:  $X = (-1, 1)$  אז הוא הומוגני כמרחב טופולוגי אבל לא כמ"מ

(שימו לב:  $\text{Iso}(X)$  בעל שני איברים בלבד: פונקצית זהות ושיקוף).

תרגיל: כמה מסלולים קיימים בפעולה של  $\text{Homeo}(x)$  על  $X$  אם:

(א)  $X = (3, \infty)$

(ב)  $X = [0, 1]$

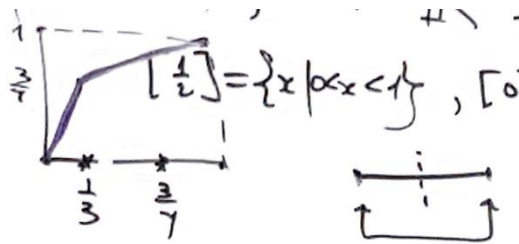
(ג)  $X = 8$

(ד)  $X = (0, 1) \cup (2, 4) \cup \{7\}$

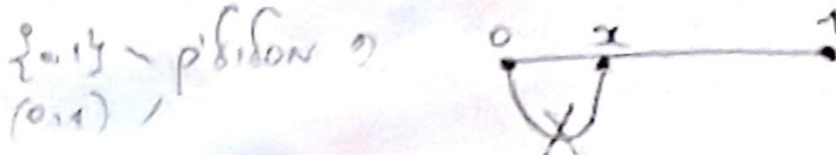
תשובה:

(א) מסלול 1 (הומוגניות!).  $\mathbb{R} \simeq (3, \infty)$  ו-  $\mathbb{R}$  הומוגני (הזזות).

(ב) 2 מסלולים.  $[0] = \{0, 1\} = [1]$   $\left[\frac{1}{2}\right] = \{x \mid 0 < x < 1\}$



הערות:



לא קיים  $h \in \text{Homeo}([0,1])$  כך ש  $h(0) = x, 0 < x < 1$  כי  $x$  נק' מחלקת עבור  $[0,1]$  ו-  $0$  לא.

ג) 2 מסלולים. מדוע ?

ד) 2 מסלולים. מדוע ?

### קשירות (המשך)

**משפט:** קשירות נשמרת ע"י תמונה רציפה.

**הוכחה:**

נניח ש  $X \in \text{Conn}$ . מאחר ו  $f$  – על אז  $f(X) = Y$ . צ"ל  $Y \in \text{Conn}$ .

אם נניח שלא, אז  $Y$  פריק טופולוגית:  $Y = \bigcup_{\substack{Y_1 \\ \neq \emptyset}} \bigcup_{\substack{Y_2 \\ \neq \emptyset}}$  כאשר  $Y_1, Y_2$  פתוחות.

$$X = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2) \text{ – אזי}$$

כאשר נשים לב ש  $f^{-1}(Y_1), f^{-1}(Y_2) \neq \emptyset$  כי  $f$  היא פונקציה על וגם הן פתוחות כי  $f$  רציפה. קיבלנו ש  $X$  פריק, ז"א  $X \notin \text{Conn}$  בסתירה!

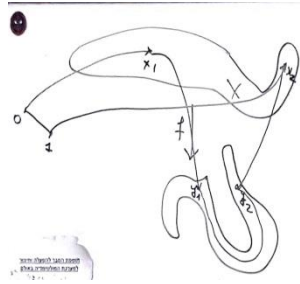
☺

**הגדרה:** מ"ט  $X$  קשיר מסילתית אם לכל  $x, y \in X$  קיימת מסילה מ  $x$  ל  $y$ . מסילה מ  $x_1$

ל  $x_2$   $[0,1] \xrightarrow{\varphi} X$  פונקציה רציפה,  $\varphi(0) = x_1, \varphi(1) = x_2$ . סימון:  $X \in P\text{Conn}$ .

**משפט:** קשירות מסילתית נשמרת ע"י תמונה רציפה.

**הוכחה:** נניח ש  $X \in PConn$  על ורציפה אז  $f(X) = Y \in PConn$  - צ"ל.



נניח  $y_1, y_2 \in Y$ , אז קיימים  $x_1 \xrightarrow{f} y_1, x_2 \xrightarrow{f} y_2$  כי  $f$  על.

קיימת מסילה מ  $x_1$  ל  $x_2$   $[0,1] \xrightarrow{\varphi} X$  פונקציה רציפה,  $\varphi(0) = x_1, \varphi(1) = x_2$ .

$$[0,1] \xrightarrow{\varphi} X \xrightarrow{f} Y \quad [0,1] \xrightarrow{f \circ \varphi} Y$$

וגדיר מסילה - ואז מצאנו מסילה בין  $y_1$  ל  $y_2$ .



אזהרה: תמונה  $f[0,1]$  של המסילה לא תמיד הומיאומורפי ל  $[0,1]$ .

למשל ידוע שקיימת פונקציה רציפה ועל  $f : [0,1] \rightarrow [0,1]^2$  (Peano curve).

**משפט:**  $PConn \subset Conn$

**הוכחה:** נניח  $X \in PConn$  צ"ל  $X \in Conn$ .

אם נניח בשלילה שלא, אז פריק:  $X = X_1 \sqcup X_2$

נבחר  $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ .

$X \in PConn \Leftrightarrow$  קיימת מסילה מ  $x_1$  ל  $x_2$ , לכן -

$$\varphi(0) = x_1, \varphi(1) = x_2 \quad [0,1] \xrightarrow{\varphi} X$$

$$[0,1] = \varphi^{-1}(X_1) \sqcup \varphi^{-1}(X_2) \quad \text{כעת -}$$

$\varphi^{-1}(X_1), \varphi^{-1}(X_2)$  קבוצות זרות פתוחות (רציפות !)

לא ריקות  $(0 \in \varphi^{-1}(X_1), 1 \in \varphi^{-1}(X_2))$

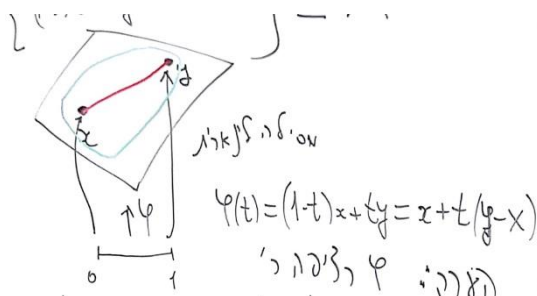
ואז קיבלנו פירוק של  $[0,1]$  בסתירה לכך ש  $[0,1] \in Conn$ .





הגדרה: תת קבוצה  $X$  במ"נ  $(E, \|\cdot\|)$  נקראת קבוצה קמורה (convex) אם לכל  $x, y \in X$  מתקיים –  $\{(1-t)x + ty : 0 \leq t \leq 1\} \subseteq X$  (מסילה לינארית)

נסמן –  $X \in Conv$

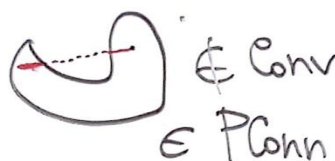


הערה:

$\varphi \in Lip_{\|y-x\|}$  – רציפה כי

טענה:  $Conv \subset PConn$

$$Conv \subsetneq PConn \subsetneq Conn$$



דוגמה:

הגדרה:  $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$  קטע אם לכל  $a, b \in X$  מתקיים  $[a, b] \subseteq X$

טענה: נניח  $X \subset \mathbb{R}$  תת מרחב. אזי התנאים הבאים שקולים:

(1)  $X$  "קטע" (יתכן כמובן לא חסום)

(2)  $X \in Conv$

(3)  $X \in PConn$

(4)  $X \in Conn$

הסבר: (1)  $\Leftrightarrow$  (2): לכל  $a, b \in X$  מתקיים  $[a, b] \subseteq X$ . מצד שני

$$[a, b] = \{a + (b-a)t \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

(2)  $\Rightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (4) נובע מהכלות ברורות  $Conv \subseteq PConn \subseteq Conn$

(4)  $\Rightarrow$  (1)

אם נניח שלא, אז  $X$  לא קטע, כלומר קיימים  $a, b \in X$  כך ש  $[a, b] \not\subseteq X$ . ז"א קיימים

$a, b \in X$  אבל  $c \notin X$  כך ש  $a < c < b$

נגדיר  $X_1 := (-\infty, c) \cap X, X_2 := (c, \infty) \cap X$

ואז נקבל ש  $X = \underbrace{X_1}_a \sqcup \underbrace{X_2}_b$  פירוק טופולוגי.

ואז קיבלנו ש  $X \notin Conn$  - בסתירה!



**משפט (ערך הביניים):** נניח  $X$  מ"ט. אזי התנאים הבאים שקולים:

(1)  $X \in Conn$ .

(2) לכל פונקציה רציפה  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  יש תכונת ערך ביניים.