

קומבי תרגול 11

3 בינואר 2021

1 נוסחאות חזרה הומ'

תרגילים:

1. נגדיר סדרה באופן רקורסיבי באופן הבא:

$$\begin{cases} f(0) = f(1) = 0 \\ f(2) = 1 \\ \forall n \geq 3 : f(n) = 5f(n-1) + 4f(n-2) - 20f(n-3) \end{cases}$$

למשל

$$f(3) = 5f(2) + 4f(1) - 20f(0) = 5$$

$$f(4) = 5f(3) + 4f(2) - 20f(1) = 29$$

מצאו נוסחא מפורשת ל- $f(n)$.

פתרון: שלבים:

1. מציאת הפולינום המתאים לנוסחא (פולינום אופייני).

2. מציאת שורשיו.

3. מציאת הקבועים לפי תנאי ההתחלה.

אצלנו הפולינום הוא

$$x^3 - 5x^2 - 4x + 20$$

נוציא גורם משותף מהזוגות

$$x^2(x-5) - 4(x-5) = (x^2-4)(x-5) = (x-2)(x+2)(x-5)$$

כלומר, השורשים הם: $5, \pm 2$, ולכן לפי משפט, נקבל:

$$f(n) = \alpha 2^n + \beta (-2)^n + \gamma 5^n$$

כדי למצוא את הקבועים, מציבים את תנאי ההתחלה ופותרים ממ"ל:

$$\begin{cases} 0 = f(0) = \alpha + \beta + \gamma \\ 0 = f(1) = 2\alpha - 2\beta + 5\gamma \\ 1 = f(2) = 4\alpha + 4\beta + 25\gamma \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & 25 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 1 \end{array} \right)$$

ומפה קל להגיע לפתרון:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{28} \\ \frac{1}{21} \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$f(n) = -\frac{2^n}{12} + \frac{(-2)^n}{28} + \frac{5^n}{21}$$

הערה, אם הפולינום הוא מהצורה

$$x^3 - bx^2 - a^2x + a^2b = (x^2 - a^2)(x - b)$$

2 גרפים

הגדרות:

- מרחק בין קודקודים: אורך המסלול הקצר ביותר ביניהם.
- קוטר הגרף: המקסימום על המרחקים בין הקודקודים.

משפטים:

- למת לחיצת הידיים:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

- מסקנה: מספר הקודקודים בעלי דרגה אי-זוגית הוא זוגי.

תרגילים:

1. יהי $G = (V, E)$ גרף, $|V| = n$, ומתקיים:

$$\forall v \in V : \deg(v) \geq \frac{n-1}{2}$$

הוכיחו: $\text{diam}(G) \leq 2$ (ובפרט G קשיר, כלומר, יש מסלול בין כל שני קודקודים).
פתרון: נזכר בהגדרת דרגה:

$$\Gamma(v) = \{u \in V : \{u, v\} \in E\}$$

כלומר, $\Gamma(v)$ זה קבוצת שכני v . ואז מגדירים

$$\deg(v) = |\Gamma(v)|$$

פתרון: יהיו $u, v \in V$ נראה ש- $d(u, v) \leq 2$:
אם $\{u, v\} \in E$ אז נקבל $d(u, v) = 1$ וסיימנו.
אחרת, נטען: יש להם שכן משותף, כלומר:

$$\Gamma(v) \cap \Gamma(u) \neq \emptyset$$

נב"ש שלא, כלומר, נב"ש

$$\Gamma(v) \cap \Gamma(u) = \emptyset$$

נתבונן בגדלים שלהם:

$$\Gamma(v) \geq \frac{n-1}{2}, \Gamma(u) \geq \frac{n-1}{2}$$

כעת מתקיים

$$\Gamma(v) \cup \Gamma(u) \cup \{u, v\} \subset V$$

נחשב את הגודל של קבוצה זו:

$$|\Gamma(v) \cup \Gamma(u) \cup \{u, v\}|$$

נשים לב שהן זרות בזוגות, כלומר:

$$v \notin \Gamma(v), \Gamma(u)$$

$$u \notin \Gamma(v), \Gamma(u)$$

כי הם לא שכנים, וכמובן לא שכנים של עצמם. בנוסף, הנחנו

$$\Gamma(v) \cap \Gamma(u) = \emptyset$$

כיון שהקבוצות זרות בזוגות נקבל:

$$|\Gamma(v) \cup \Gamma(u) \cup \{u, v\}| = |\Gamma(v)| + |\Gamma(u)| + |\{v, u\}| \geq 2 \cdot \frac{n-1}{2} + 2 = n + 1$$

בסתירה לכך שהגודל לכל היותר n .

קיבלנו שאם הם לא שכנים, אז יש להם שכן משותף, נסמנו w , ואז $v \rightarrow w \rightarrow u$ מסלול באורך 2, ולכן בשה"כ $d(v, u) \leq 2$. מש"ל.