פתרון תרגיל בית 4 בהסתברות וסטטיסטיקה מתמטית
88-373 סמסטר ב' תשפ"א

ריכוז מידה

תרגיל 1. הוכיחו את הגרסה הבאה של אי-שוויון צ'רנוף: יהיו $X_1, \ldots, X_n$ משתנים מקריים בלתי-תלויים המקבלים ערכים בקבוצה $\{0,1\}$. יהי $X = \sum_{i=1}^n X_i$, ותהי $\mu = \mathbb{E}[X]$ התוחלת של X. אזי לכל $\delta > 0$,

$$P(X \geq (1+\delta)\mu) \leq \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{\mu}.$$

הסיקו את החסם הפחות הדוק

$$P(X \geq (1+\delta)\mu) \leq e^{-\frac{\delta^2 \mu}{2+\delta}}$$

לכל $\delta > 0$. (בדומה אפשר להוכיח

$$P(X \leq (1-\delta)\mu) \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right)^{\mu} \leq e^{-\frac{\delta^2 \mu}{2}},$$

אבל אתם לא חייבים להוכיח גם את זה.)

הדרכה לחסם הראשון:

א. הראו כי $M_X(t) \leq e^{(e^t-1)\mu}$.

ב. היעזרו ברעיון של אי-שוויון צ'רנוף (למצוא t מינימלי) כדי לקבל את החסם ההדוק יותר.

ג. קחו לוגריתם של החסם ההדוק, והיעזרו באי-השוויון $\ln(1+x) \geq \frac{x}{1+x/2}$ כדי להסיק את החסם הפחות הדוק.

הוכחה.

א. נרשום:

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left[e^{tX_i}\right] = \prod_{i=1}^n \left(P(X_i=0)\cdot 1 + P(X_i=1)\cdot e^t\right).$$

נרצה להוכיח את החסם $(1-p)+pe^{t}\leq e^{\left(e^{t}-1\right)p}$. אכן, זה יהיה מספיק כי אז נקבל

$$.M_{X}\left(t\right)\leq\prod_{i=1}^{n}e^{\left(e^{t}-1\right)P\left(X_{i}=1\right)}=e^{\left(e^{t}-1\right)\sum_{i=1}^{n}P\left(X_{i}=1\right)}=e^{\left(e^{t}-1\right)\mu}$$

ואכן, החסם נכון כי

$$(1-p)+pe^{t}=1+p\left(e^{t}-1\right)\leq e^{\left(e^{t}-1\right)p}$$

לפי $1+x\leq e^{x}$.

ב. לכל $t>0$,

$$.P\left(X\geq\left(1+\delta\right)\mu\right)=P\left(e^{tX}\geq e^{t\left(1+\delta\right)\mu}\right)\leq\frac{M_{X}\left(t\right)}{e^{\left(1+\delta\right)\mu t}}\leq e^{\left(e^{t}-1\right)\mu-\left(1+\delta\right)\mu t}$$

נמצא את ה-t שממזער את המעריך. מגזירה נקבל

$$e^{t}\mu=\left(1+\delta\right)\mu\Longrightarrow t=\log\left(1+\delta\right)$$

ואז

$$.\left(e^{t}-1\right)\mu-\left(1+\delta\right)\mu t=\delta\mu-\left(1+\delta\right)\mu\log\left(1+\delta\right)$$

בסך הכל

$$.P\left(X\geq\left(1+\delta\right)\mu\right)\leq\frac{e^{\delta\mu}}{e^{\left(1+\delta\right)\mu\log\left(1+\delta\right)}}=\left(\frac{e^{\delta}}{\left(1+\delta\right)^{1+\delta}}\right)^{\mu}$$

ג. כדי לקבל את החסם הפחות הדוק, נסתכל על הלוגריתם של החסם:

$$.\log\left(\left(\frac{e^{\delta}}{\left(1+\delta\right)^{1+\delta}}\right)^{\mu}\right)=\mu\left(\delta-\left(1+\delta\right)\log\left(1+\delta\right)\right)$$

לפי אי-השוויון שהוזכר,

$$\mu\left(\delta-\left(1+\delta\right)\log\left(1+\delta\right)\right)\leq\mu\left(\delta-\left(1+\delta\right)\frac{\delta}{1+\delta/2}\right)=\mu\cdot\frac{\delta+\delta^{2}/2-\delta-\delta^{2}}{1+\delta/2}=-\frac{\delta^{2}}{2+\delta}\mu$$

ולכן

$$.P\left(X\geq\left(1+\delta\right)\mu\right)\leq e^{-\frac{\delta^{2}}{2+\delta}\mu}$$

$\square$

תרגיל 2. יהי X משתנה מקרי עם תוחלת μ ושונות σ^2. נגדיר $r = \frac{\sigma}{\mu}$. בשאלה זו מטרתנו תהיה לבנות אומד טוב ל-μ באמצעות כמה שפחות דגימות בלתי-תלויות $X_1, \ldots, X_n$ של X.

א. נגדיר את האומד $\hat{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. הראו כי לכל $\varepsilon, \delta > 0$ מספיק לקחת $n = O\left(\frac{r^2}{\varepsilon^2\delta}\right)$ דגימות כדי שיתקיים

$$P\left(\left|\hat{X} - \mathbb{E}\left[X\right]\right| \geq \varepsilon\mathbb{E}\left[X\right]\right) \leq \delta.$$

ב. נאמר שאומד Y הוא **אומד חלש** אם $P\left(\left|X - \mathbb{E}\left[X\right]\right| \geq \varepsilon\mathbb{E}\left[X\right]\right) \leq \frac{1}{4}$. באמצעות סעיף א', מספיק לקחת $n = O\left(\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)$ דגימות כדי לקבל אומד חלש.

נניח שיש לנו m אומדים חלשים בלתי-תלויים $\hat{X}_1, \ldots, \hat{X}_m$, ונגדיר את האומד החדש $\tilde{X}$ להיות החציון שלהם. הוכיחו כי באמצעות $m = O\left(\log\frac{1}{\delta}\right)$ אומדנים חלשים מקבלים אומד $\tilde{X}$ המקיים

$$P\left(\left|\tilde{X} - \mathbb{E}\left[X\right]\right| \geq \varepsilon\mathbb{E}\left[X\right]\right) \leq \delta.$$

(הדרכה: לסעיף א', מספיק להשתמש בצ'בישב. לסעיף ב', הגדירו את משתנה האינדיקטור של האם האומד ה-i קרוב מספיק, והשתמשו בניסוח של צ'רנוף מהתרגיל הראשון.)

הוכחה.

א. ניעזר באי-שוויון צ'בישב. התוחלת של $\hat{X}$ היא μ אבל השונות היא $\frac{\sigma^2}{n}$, ולכן

$$P\left(\left|\hat{X} - \mathbb{E}\left[X\right]\right| \geq \varepsilon\mathbb{E}\left[X\right]\right) \leq \frac{\mathrm{Var}\left(\hat{X}\right)}{\left(\varepsilon\mathbb{E}\left[X\right]\right)^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2\mu^2} = \frac{r^2}{n\varepsilon^2}.$$

לכן אם ניקח $n = \frac{r^2}{\varepsilon^2\delta}$ נקבל את הדרוש.

ב. יהי Y_i משתנה האינדיקטור שמקבל 1 אם $\left|\hat{X}_i - \mathbb{E}\left[X\right]\right| \leq \varepsilon\mathbb{E}\left[X\right]$. יהי $Z = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. אזי $\left|\tilde{X} - \mathbb{E}\left[X\right]\right| \leq \varepsilon\mathbb{E}\left[X\right]$ אם ורק אם $Z \geq \frac{m}{2}$. כיוון שכל $\hat{X}_i$ אומד חלש, $\mathbb{E}\left[Y_i\right] \geq \frac{3}{4}$. לכן $\mathbb{E}\left[Z\right] \geq \frac{3m}{4}$. נקבל

$$P\left(Z < \frac{m}{2}\right) = P\left(Z < \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{3m}{4}\right) \leq e^{-\frac{1}{18}\cdot\mathbb{E}[Z]} \leq e^{-\frac{2}{3}m}.$$

לכן מספיק לקחת $m = O\left(\log\frac{1}{\delta}\right)$ כדי לקבל את הנדרש.

□

סוגי התכנסויות

תרגיל 3. הוכיחו (או היזכרו מתורת המידה) בגרירות שהזכרנו בתרגול: התכנסות כמעט תמיד $\Longleftarrow$ התכנסות בהסתברות $\Longleftarrow$ התכנסות בהתפלגות.

הוכחה. בספר שבעמוד הקורס, עמוד 18. $\square$

תרגיל 4. הוכיחו (או היזכרו מתורת המידה) כי אם $X_n \xrightarrow{P} X$, אז קיימת לה תת-סדרה $X_{n_k} \xrightarrow{\text{a.s.}} X$.

הוכחה. בספר שבעמוד הקורס, סוף עמוד 17. $\square$

תרגיל 5. הוכיחו כי $\text{Bin}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right) \xrightarrow{\text{d}} \text{Poi}\left(\lambda\right)$.

הוכחה. נחשב:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P\left(\text{Bin}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right) = k\right) &= \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n!}{n^k\left(n-k\right)!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\right)\end{aligned}$$

הגבול של $\frac{n!}{n^k(n-k)!}$ הוא 1 (מדוע?). כאשר $n \to \infty$, $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \to e^{-\lambda}$, וכן $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \to 1^{-k} = 1$. לכן בסך הכל הגבול הוא

$$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = P\left(\text{Poi}\left(\lambda\right) = k\right).$$

$\square$

בהצלחה!