

לינארית תרגול 12

12 בינואר 2021

1 דטרמיננטות

תיזכורות:

- חישוב דטרמיננטה "פיתוח לפי שורה": נניח לפי השורה ה- i :

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} A_{ik} \det M_{ik}$$

כאשר M_{ik} זו המטריצה המתקבלת ע"י מחיקת השורה ה- i והעמודה ה- k .

- השפעת פעולות שורה על דטרמיננטה:

- החלפת שורות: הכפלה ב-1: לדוגמא:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

- כפל שורה ב- α : הכפלת הדטרמיננטה ב- α :

$$\det \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b & \alpha c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \alpha \cdot \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

- הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת לא משפיעה על הדטרמיננטה. לדוגמא:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d+3a & 2e+3b & 2f+3c \\ g & h & i \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

- כפלויות הדטרמיננטה:

$$\det AB = \det A \cdot \det B$$

- A הפיכה אם $\det A \neq 0$.

$$|A^t| = |A|$$

תרגילים:

$$1. \text{ חשבו דטר' של } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 20 & 6 \\ 4 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

פתרון: נפתח לפי שורה ראשונה:

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{1+1} A_{11} \det \begin{pmatrix} 20 & 6 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} A_{12} \det \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} A_{13} \det \begin{pmatrix} 3 & 20 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} = \\ &= 26 - 2 \cdot (-12) + 3 \cdot (-53) = -109 \end{aligned}$$

2. תהא $A \in \mathbb{R}^{5781 \times 5781}$ אנטי-סימטרית. הוכיחו: A לא הפיכה.
פתרון: לפי הגדרה $A^t = -A$. לפי משפט $|A^t| = |A|$, ולכן נקבל:

$$|A| = |A^t| = |-A| = (-1)^{5781} |A| = -|A|$$

ולכן

$$2|A| = 0 \Rightarrow |A| = 0$$

ולכן A לא הפיכה.

3. תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ הפיכה המקיימת:

$$\forall i, j : A_{i,j} \in \mathbb{Z} \wedge A_{i,j}^{-1} \in \mathbb{Z}$$

כלומר כל רכיבי המטריצה וההופכית שלמים. הוכיחו:

$$|A^{10}| = 1$$

פתרון: שלב ראשון: $\det A, \det A^{-1} \in \mathbb{Z}$: כי בפיתוח לפי שורה נקבל סכום של כפל של רכיבי המטריצה (עד כדי סימן) שזה סכום של כפל של שלמים ולכן שלם. כעת:

$$1 = \det I = \det AA^{-1} = \det A \det A^{-1}$$

קיבלנו מכפלה של שני שלמים שנותנת 1, ולכן:

$$\det A = \det A^{-1} = \pm 1$$

ולכן:

$$|A^{10}| = |A|^{10} = (\pm 1)^{10} = 1$$

4. תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ המוגדרת ע"י:

$$A_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ 1 & i \neq j \end{cases}$$

כלומר:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix}$$

חשבו את $|A|$ וקבעו עבור אילו ערכי a היא הפיכה.

פתרון: נחשב לפי פעולות שורה כדלהלן:

$$A \xrightarrow{R_1 + \sum_{i=2}^n R_i \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} a+n-1 & a+n-1 & \cdots & a+n-1 \\ 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a+n-1 & a+n-1 & \cdots & a+n-1 \\ 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix} = (a+n-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix}$$

כעת נחסר מכל שורה את השורה הראשונה ונקבל מטריצה משולשית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_i - R_1 \rightarrow R_i} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

ולכן נקבל:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & a-1 \end{pmatrix} = (a-1)^{n-1}$$

כי דטרמיננטה של משולשית זה מכפלת איברי האלכסון. בסה"כ:

$$\det A = (a+n-1)(a-1)^{n-1}$$

ולכן לכל $a \neq 1, 1-n$ נקבל A הפיכה.

5.

(א) תהינה $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכיחו:

$$|AB| = |BA|$$

פתרון: לפי כפליות הדטרמיננטה:

$$|AB| = |A| \cdot |B| = |B| \cdot |A| = |BA|$$

(ב) תהינה $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{n \times m}$. הוכיחו או הפריכו:

$$|AB| = |BA|$$

פתרון: הפתרון הקודם לא קביל, כי לא הגדרנו $|A|, |B|$ כי אינן ריבועיות בהכרח. הפרכה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אז נקבל:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |AB| = 1$$

$$BA = \begin{pmatrix} * & & \\ & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |BA| = 0$$

כאשר מעבר $*$ נובע מכפל שורה: $R_3(BA) = R_3(B)A$. הערה: תוכיחו לעצמכם שאם $m < n$ אז בהכרח BA לא הפיכה (רמז: תשתמשו בדרגת מטריצה).

(ג) יהי n אי-זוגי. תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש- $AB + BA = 0$. הוכיחו: A לא הפיכה או B לא הפיכה. פתרון: נקבל $AB = -BA$, ואז לפי סעיף ראשון:

$$|BA| = |AB| = |-BA| = (-1)^n |BA| = -|BA|$$

ולכן

$$|BA| = 0$$

ולכן BA לא הפיכה. אם מכפלה אז לסחות אחת מהן לא הפיכה.

2 ערכים ווקטורים עצמיים

תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, נאמר ש- $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא ע"ע של A אם קיים $v \neq 0$ כך ש-

$$Av = \lambda v$$

איך מוצאים את הוקטורים? מחשבים את השורשים של הפולינום האופייני:

$$f_\lambda(A) = |\lambda I - A|$$

לדוג: עבור

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

נחשב פולינום אופייני:

$$f_\lambda(A) = |\lambda I - A| = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 4 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 4) - 6 =$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda - 2 = \left(\lambda - \frac{5 + \sqrt{33}}{2}\right) \left(\lambda - \frac{5 - \sqrt{33}}{2}\right)$$

קיבלנו: $\frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$ הם הערכים העצמיים.

איך נמצא להם וקטורים עצמיים? רוצים

$$Av = \lambda v = \lambda(Iv) = (\lambda I)v$$

$$(A - \lambda I)v = 0$$

$$v \in N(A - \lambda I)$$

כלומר, אצלנו נצטרך למצוא וקטור שמאפס את

$$\begin{pmatrix} \frac{-3-\sqrt{33}}{2} & 2 \\ 3 & \frac{3-\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + 3 \cdot \frac{2}{3+\sqrt{33}} R_1 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} \frac{-3-\sqrt{33}}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3-\sqrt{33}}{2} + 3 \cdot \frac{2}{3+\sqrt{33}} \cdot 2 = 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{3+\sqrt{33}} \end{pmatrix}$$

שימו לב: אם $\lambda = 0$ הוא ע"ע, אז יש $v \neq 0$ המקיים $v \in N(A)$ ולכן A לא הפיכה.