אלגברה לינארית 1- תרגיל 11

הערות:

$R(\text{A}) = Rspan(A) =$ מרחב השורות של מטריצה A.

לוקטורים ב-$Rspan(A)$ אנו מתייחסים כ-**וקטורי עמודה**.

$C(\text{A}) = Cspan(A) =$ מרחב העמודות של מטריצה A.

$N(\text{A}) = Null(A) =$ מרחב האפס של מטריצה A.

1) מצא מטריצות A, B עבורן:

א. $rank(AB) = rank(A) = rank(B)$.

ב. $rank(AB) = rank(A) < rank(B)$.

ג. $rank(AB) < rank(A)$ ו- $rank(AB) < rank(B)$.

פתרון:

א. $A = B = I_n \Leftarrow rank(A) = rank(B) = rank(AB) = n$.

ב. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = I_2 \Leftarrow 1 = rank(AB) = rank(A) < rank(B) = 2$.

ג. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftarrow 0 = rank(AB) < rank(A), rank(B) = 1$.

2) יהי $n \geq 2$. הוכח שלכל $0 \leq k \leq n$ קיימות מטריצות $\text{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש:

$rank(A) = rank(B) = n$, ו- $rank(A + B) = k$.

פתרון:

נגדיר: $\text{A} = I_n, R_i(B) = \begin{cases} e_i & 1 \leq i \leq k \\ -e_i & \text{אחרת} \end{cases}$ (e_i איברי הבסיס הסטנדרטי).

אזי $R_i(A + B) = \begin{cases} 2e_i & 1 \leq i \leq k \\ \bar{0} & \text{אחרת} \end{cases}$, מטריצה מדורגת עם k שורות לא מאופסות

ולכן $rank(A + B) = k$.

3) תהיינה $\text{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $\text{B} \in \mathbb{F}^{n \times m}$. הוכח:

א. $\text{AB} = 0 \Leftarrow$ קיים $x \in \mathbb{F}^n$ כך ש: $\text{BA}x = 0$.

ב. $\text{AB} = I_m$ וגם $\text{BA} = I_n \Leftarrow m = n$.

(I_n היא מטריצת היחידה מסדר $n \times n$)

פתרון:

א. נניח $A, B \neq 0$ (אחרת טריוויאלי).

$AB = 0 \Leftarrow$ יש צירוף ליניארי לא טריוויאלי של עמודות A שנותן 0 (לפי כפל עמודה-עמודה)

$\Leftarrow$ עמודות A ת"ל, ולכן $\operatorname{rank}(A) = \dim(\operatorname{Cspan}(A)) < n \Leftarrow rank(BA) \leq rank(A) < n$

$\Leftarrow \dim\left(Null(BA)\right) > 0 \Leftarrow$ קיים $x \in \mathbb{F}^n$ כך ש: $BAx = 0$.

ב. $rank(A) \geq rank(AB) = rank(I_m) = m$, אבל ב-A יש m שורות ולכן:

$rank(A) = \dim(Rspan(A)) \leq m$, אזי $rank(A) = m$.

$rank(A) \geq rank(BA) = rank(I_n) = n$, אבל ב-A יש n עמודות ולכן:

$rank(A) = \dim(Cspan(A)) \leq n$, אזי $rank(A) = n$.

בסה"כ: $m = \operatorname{rank}(A) = n$.

4) תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$. הוכח:

א. $rank(A+B) \leq rank(A) + rank(B)$.

ב. אם מתקיים שוויון בסעיף א' אזי:

$\operatorname{Rspan}(A) \cap \operatorname{Rspan}(B) = \{0\}$ ו- $\operatorname{Cspan}(A) \cap \operatorname{Cspan}(B) = \{0\}$.

פתרון:

א. לכל i: $R_i(A+B) = R_i(A) + R_i(B) \Leftarrow R_i(A+B) \in Rspan(A) + Rspan(B)$

(סכום של מרחבים וקטורים), ולכן: $\operatorname{Rspan}(A+B) \subseteq Rspan(A) + Rspan(B)$.

לפי משפט הממדים:

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(A+B) = \dim\left(\operatorname{Rspan}(A+B)\right) &\leq \dim\left(Rspan(A) + Rsapn(B)\right) \\ &= \dim\left(Rspan(A)\right) + \dim\left(Rspan(B)\right) - \dim\left(Rspan(A) \cap Rspan(B)\right) \\ &\leq \dim\left(Rspan(A)\right) + \dim\left(Rspan(B)\right) = rank(A) + rank(B)\end{aligned}$$

ב. נציב את השוויון $rank(A+B) = rank(A) + rank(B)$ במשוואה מסעיף א', ונקבל:

$$rank(A) + rank(B) \leq rank(A) + rank(B) - \dim\left(Rspan(A) \cap Rspan(B)\right)$$

אזי: $\dim\left(Rspan(A) \cap Rspan(B)\right) = 0 \Leftarrow \operatorname{Rspan}(A) \cap \operatorname{Rspan}(B) = \{0\}$.

באופן דומה, או ע"י שימוש ב-transpose, נקבל: $\operatorname{Cspan}(A) \cap \operatorname{Cspan}(B) = \{0\}$.

5) תהי $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$.

א. הוכח: $\mathbb{R}^n = Rspan(A)\oplus Null(A)$.

ב. מצא שדה $\mathbb{F}$ עבורו סעיף א' לא מתקיים.

פתרון:

א. $x \in Rspan(A) \Leftarrow$ יש $b\epsilon\mathbb{R}^m$ כך ש- $b^tA = x^t$.

$x \in Null(A) \Leftarrow$ $Ax = \bar{0}$.

כעת: $0 = b^t(Ax) = (b^tA)x = x^tx = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \Leftarrow x_i = 0$ לכל $i \leftarrow x = \bar{0}$.

אזי $Rspan(A) \cap Null(A) = \{0\}$.

לפי משפט הממדים ומשפט הדרגה:

$$\dim(Rspan(A) + Null(A)) = dimRspan(A) + dimNull(A) - dim(Rspan(A) \cap Null(A)) \\ = dimRspan(A) + dimNull(A) = rank(A) + dimNull(A) = n$$

אבל $Rspan(A) + Null(A) \subseteq \mathbb{R}^n$, תת-מרחב ממדד n $\Leftarrow$ $\mathbb{R}^n = Rspan(A) + Null(A)$.

אזי לפי הגדרה $\mathbb{R}^n = Rspan(A)\oplus Null(A)$.

ב. $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $A = (1 \quad i)$.