

פתרון תרגיל בית 1 במבנים אלגבריים 89-214 סמסטר א' תש"ף

שאלה 1 (חימום). תהי G חבורה עם איבר יחידה e . יהי $a \in G$ איבר. הוכיחו:

א. אם $aa = a$ אז $a = e$.

ב. אם יש $b \in G$ כך ש- $ab = e$ אז $ba = e$ ו- $b = a^{-1}$.

פתרון.

א. מפני ש- $a \in G$ איבר בחבורה, אזי קיים לו הופכי a^{-1} . נכפול את שני אגפי המשוואה ב- a^{-1} מימין (אותה תוצאה תתקבל בכפל משמאל) ונקבל

$$\begin{aligned}aaa^{-1} &= aa^{-1} \\ a &= e\end{aligned}$$

ב. בחבורה כל איבר הוא הפיך. אם $ab = e$ אזי b הופכי ימני של a . אם c הוא הופכי שמאלי כלשהו של a , אזי

$$b = e \cdot b = (ca)b = c(ab) = c \cdot e = c$$

כלומר $b = c$. לכן $b = a^{-1}$ הוא ההופכי של a ו- $ba = e$.

שאלה 2. בכל סעיף, ענו עבור המערכת האלגברית המופיעה בו:

האם היא אגודה?

האם היא מונואיד? אם כן, מי הוא איבר היחידה?

האם היא חבורה?

האם הפעולה היא חילופית?

א. $(\mathbb{N}, \cdot)$, המספרים הטבעיים עם פעולת הכפל הרגילה.

ב. $(\mathbb{Z}, \max)$, המספרים השלמים עם הפעולה של בחירת המקסימום.

ג. $(2\mathbb{N}, *)$, המספרים הטבעיים הזוגיים עם הפעולה $a * b = a + b - 2$.

ד. תהי X קבוצה. $(P(X), \Delta)$, כאשר $P(X)$ היא קבוצת החזקה של X . הפעולה היא ההפרש הסימטרי המוגדר לכל $A, B \in P(X)$ לפי $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

ה. הקבוצה הבאה ביחס לחיבור מטריצות

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0 \right\}$$

ו. $(A, \cdot)$, הקבוצה מן הסעיף הקודם ביחס לכפל מטריצות.

ז. $(\mathbb{Q} \setminus \{-1\}, *)$, המספרים הרציונלים בלי -1 עם הפעולה $a * b = a + b + ab$.

פתרון. לא נציין מפורשות בכל סעיף שאם מבנה אלגברי הוא חבורה, אז הוא גם מונואיד, ולכן גם אגודה. ולהפך, אם הוא לא אגודה, אז ודאי שהוא גם לא מונואיד וכו'.

א. מבנה זה הוא מונואיד חילופי. מכפלה של מספרים טבעיים היא מספר טבעי, ולכן הפעולה סגורה. איבר היחידה הוא 1. הפעולה חילופית וקיבוצית עקב חילופיות וקיבוציות הכפל בטבעיים.

ב. מבנה זה הוא אגודה חילופית. הסגירות של הפעולה נובעת מכך שהמקסימום בין שני מספרים שלמים הוא מספר שלם. הפעולה קיבוצית כי

$$\max(\max(a, b), c) = \max\{a, b, c\} = \max(a, \max(b, c))$$

אין איבר יחידה, מפני שאין בקבוצה זהו איבר מינימלי (אילו בחרנו להסתכל על $(\mathbb{N}, \max)$, אז איבר היחידה היה 1). הפעולה חילופית כי $\max(a, b) = \max(b, a)$.

ג. מבנה זה הוא מונואיד חילופי. ישנה סגירות כי $a, b \geq 2$ ולכן $a + b - 2 \in \mathbb{N}$ והוא עדין טבעי וזוגי. הפעולה קיבוצית כי מתקיים $(a * b) * c = a + b + c - 4 = a * (b * c)$. הפעולה חילופית עקב חילופיות החיבור הרגיל בטבעיים. איבר היחידה הוא 2 כי לכל $a \in 2\mathbb{N}$ מתקיים $2 * a = a * 2 = a + 2 - 2 = a$.

ד. מבנה זה הוא חבורה. סגירות נובעת מכך שאם $A, B \in P(X)$, אז גם $A \Delta B$ היא תת-קבוצה של X . קיבוציות הפעולה ידועה ממתמטיקה בדידה. איבר היחידה הוא הקבוצה הריקה. קל לבדוק שכל איבר הוא ההופכי של עצמו. הפעולה (כפי ששמה רומז) היא חילופית.

ה. הפעולה לא סגורה, למשל

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin A$$

ולכן לא מדובר באגודה. הפעולה חילופית.

ו. מבנה זה הוא חבורה. הסגירות לא מיידידת, שכן לא מספיק להראות שמכפלת שני איברים היא מטריצה, אלא מטריצה ששייכת ל- A :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & bc + ad \\ -(bc + ad) & ac - bd \end{pmatrix}$$

ולשים לב כי $(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2$ שהיא הדטרמיננטה של המכפלה היא מכפלה של דטרמיננטות חיוביות, ולכן חיובית בעצמה. הפעולה קיבוצית כי כפל מטריצות הוא קיבוצי. איבר היחידה הוא מטריצת היחידה I_2 . כל מטריצה במבנה זה היא הפיכה מפני שמתקיים $a^2 + b^2 > 0$ שהיא הדטרמיננטה, כשהאיבר ההופכי הוא

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ודאו למה מטריצה זו שייכת למבנה. בדיקה ישירה תראה שהפעולה חילופית.

ז. מבנה זה הוא חבורה חילופית. הפעולה קיבוצית כי

$$(a * b) * c = (a + b + ab) * c = a + b + ab + c + ac + bc + abc \\ = a + b + c + bc + ab + ac + abc = a * (b + c + bc) = a * (b * c)$$

כאשר אנחנו נעזרים בחילופיות של החיבור בשיויון בין השורות. בעזרת החילופיות גם של כפל רגיל נראה שהפעולה חילופית:

$$a * b = a + b + ab = b + a + ba = b * a$$

לכל $a \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ מתקיים $a * 0 = a + 0 + a \cdot 0 = a$ ולכן איבר היחידה הוא $e = 0$. נמצא שכל איבר הפיך כי $a * b = a + b + ab = 0$ אם ורק אם $b(1 + a) = -a$, כלומר $b = \frac{-a}{1+a}$ והקבוצה לא כוללת את -1 , ולכן אין חלוקה באפס ובנוסף ברור כי $b \neq -1$ (אחרת $-1 = \frac{-a}{1+a}$ ונסיק $1 = 0$).

שאלה 3. תהינה $(G, *)$ ו- $(H, \bullet)$ חבורות. נגדיר על המכפלה הקרטזית $G \times H$ פעולה "רכיב-רכיב":

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 * g_2, h_1 \bullet h_2)$$

$$\text{לכל } g_1, g_2 \in G, h_1, h_2 \in H$$

א. הוכיחו כי $G \times H$ עם הפעולה לעיל היא חבורה. היא נקראת המכפלה הישרה (החיצונית) של G ו- H .

ב. הוכיחו או הפריכו: החבורה $G \times H$ אבלית אם ורק אם G ו- H אבליות.

פתרון.

א. ההוכחה לכל אחד מהתנאים בהגדרת חבורה (קיבוציות הפעולה, קיום איבר יחידה וקיום הפיך לכל איבר) נובעת מהתנאי המקביל שמתקיים עבור G ו- H שהן חבורות. יהיו $(g_1, h_1), (g_2, h_2), (g_3, h_3) \in G \times H$ אזי

$$((g_1, h_1)(g_2, h_2))(g_3, h_3) = (g_1 g_2, h_1 h_2)(g_3, h_3) = (g_1 g_2 g_3, h_1 h_2 h_3) \\ = (g_1, h_1)(g_2 g_3, h_2 h_3) = (g_1, h_1)((g_2, h_2)(g_3, h_3))$$

כי הפעולות ב- G וב- H הן קיבוציות. איבר היחידה הוא (e_G, e_H) ואכן

$$(g, h)(e_G, e_H) = (ge_G, he_H) = (g, h) = (e_G g, e_H h) = (e_G, e_H)(g, h)$$

לכל איבר $(g, h) \in G \times H$. ההופכי שלו הוא (g^{-1}, h^{-1}) מפני ש-

$$(g, h)(g^{-1}, h^{-1}) = (gg^{-1}, hh^{-1}) = (e_G, e_H) = (g^{-1}g, h^{-1}h) = (g^{-1}, h^{-1})(g, h)$$

ב. הוכחה. אם $G \times H$ אבלית, אזי לכל $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \times H$ מתקיים

$$(g_1 g_2, h_1 h_2) = (g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_2, h_2)(g_1, h_1) = (g_2 g_1, h_2 h_1)$$

ובפרט לכל $g_1, g_2 \in G$ ולכל $h_1, h_2 \in H$ מתקיים $g_1 g_2 = g_2 g_1$ ו- $h_1 h_2 = h_2 h_1$. שזו בדיוק ההגדרה לכך ש- G, H אבליות. אם G, H אבליות, אז נחזור על הטיעון בכיוון השני.

שאלה 4. תהי G חבורה. הוכיחו כי G אבלית אם ורק אם לכל $a, b \in G$ מתקיים כי $(ab)^2 = a^2 b^2$.

פתרון. לכל זוג איברים $a, b \in G$ מתקיים $(ab)^2 = abab = aabb = a^2b^2$. נכפיל משמאל ב- a^{-1} ומימין ב- b^{-1} ונקבל

$$a^{-1}ababb^{-1} = ba = ab = a^{-1}aabb^{-1}$$

כלומר $ba = ab$.

שאלה 5 (רשות). הוכיחו שאם באגודה S לכל משוואה מן הצורה $ax = b$ או $xa = b$ יש פתרון במשתנה x , אז S היא חבורה.

רמז: לפי ההנחה יש איבר $e \in S$ (התלוי ב- a) כך ש- $ae = a$. לכל $c \in S$ קיים x כך ש- $c = xa$, ואז $ce = xae = xa = c$ ולכן e הוא איבר יחידה מימין. באופן דומה יש איבר יחידה משמאל.

בהצלחה!