ש.ב. תרגיל #5.

שאלה 1: דיון בקובץ המצורף לצד התמונות.

בכל הסעיפים, פרט לסעיף (ג) (חרוט אליפטי),
מדובר במשטח 2-מימדי ב $\mathbb{R}^3$,
והוכחה עם אותו נימוק: הקבוצה מוגדרת
כקבוצת אפסים של פונקציה גזירה ברציפות f
מ $\mathbb{R}^3$ ל $\mathbb{R}$, ו $\nabla f\neq 0$ לכל $\bar{x}\in\mathbb{R}^3$ המקיים
$f(\bar{x})=0$, ולכן זה משטח.

לגבי סעיף (3) זה לא משטח, והטיעון
עבור שאר הסעיפים לא תופס, שכן
עבור
$$f(x) = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z^2$$

$$\left(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},2z\right)\Big|_{0,0,0} = \nabla f(0,0,0)=(0,0,0), \quad f(0,0,0)=0$$

כמובן, שזה לא מספיק על מנת לשלול
ש $\{x|f(x)=0\}$ איננה משטח,
כי ייתכן שיש פונקציה אחרת, שמקיימת את
הדרוש לה.

על מנת להראות שהקבוצה איננה משטח,
נשים לב שכל כדור פתוח
במשטח הנ"ל שמכיל את $(0,0,0)$,
הופך לא קשיר ברגע שמוציאים את הנק' $(0,0,0)$
מהקבוצה. מצד שני אם הכדור
הפתוח הנ"ל היה תמונה של פונקציה רציפה
גזירה (בעלת דיפרנציאל מדרגה 2) ותחייב
הוצאת נק' אחת לא תהפוך אותו ללא קשיר.

שאלה 2:

ניקח $\{(x,y) \mid x^2=0\}$.

קל לראות שמדובר בציר y ב $\mathbb{R}^2$ והוא משטח.

(למשל אם נחל. x^2 ב x ונשתמש בגרעינה של $\ker$).

מצד שני $f(x)=x^2$ בעלת גרדיאנט שמתאפס ב$(0,0)$ ולכן

$$Z_{x^2} = \{(x,y) \mid x^2=0\}.$$

קיבלנו הפרכה ע"י דוגמא נגדית.

שאלה 3:

סעיף א: נניח בשלילה שהטענה נכונה.

נשים לב ש $\varphi_3(u,v)=\sqrt{\varphi_1^2(x,y)+\varphi_2^2(x,y)}$.

נשים לב, בנוסף, שכל סביבה U של $(0,0,0)$ מכילה נק' מהצורה (x,y,z), $(-x,-y,z)$,

מכיוון שהיא מכילה כדור פתוח בעל רדיוס קטן מספיק, וכל כדור פתוח בעל רדיוס מספיק קטן $B(\bar{0},r)$ מכיל את נק' מהצורה הנ"ל.

אזי $(x,y,z)=(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v),\varphi_3(u,v))$ נק'

$(-x,-y,z)=(\varphi_1(t,s),\varphi_2(t,s),\varphi_3(t,s))$,

נקבל $\varphi_3(t,s)=\varphi_3(u,v)$ בסתירה לחח"ע.

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$(x,y,z)=(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v),\varphi_3(u,v))$$

$$\varphi_3(u,v)=\sqrt{\varphi_1^2(u,v)+\varphi_2^2(u,v)}.$$

שאלה 3, סעיף ב.

קל לראות שאם

אזי אם

אז

שאלה 3, סעיף ②

נניח ש φ רגולרית ועל $\varphi:\mathbb{R}^2\rightarrow U$.

אזי φ דיפרנציאבילית בכל ~~נקודה~~ ~~לא מתאפסת~~,

דיפרנציאל מ $rank=2$ בכל נק'.

אם φ דיפרנציאבילית מתקיים $\frac{\partial\varphi}{\partial v},\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ קיימים. תהי p נק' כך ש $\varphi(p)=(0,0,0)$.

אזי φ דיפרנציאבילית ב p ולכן $\frac{\partial\varphi}{\partial u}(p)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial v}(p)$ קיימים.

בפרט, $\frac{\partial\varphi_3}{\partial u}$, $\frac{\partial\varphi_3}{\partial v}$ קיימים.

נחשב את $\frac{\partial\varphi_3}{\partial u}$, $\frac{\partial\varphi_3}{\partial v}$ לפי הגדרה.

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial u}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{\varphi_1^2(p_1+h,p_2)+\varphi_2^2(p_1+h,p_2)}-\varphi_3(p)}{h}$$

(מהסעיף הקודם).

מניוון φ_1, φ_2 דיפרנציאביליות $\varphi_1(p)=\varphi_2(p)$, $\varphi_3(p)=0$

(ככה בחרנו את p) ניתן לרשום את המשוואה על ידי

~~$\varphi_1(p_1+h,p_2)=\varphi_1(p)+$~~

ש.ב שאלה 3, סעיף 2 - המשך

$$\varphi_1(p_1+h, p_2) = \varphi_1(p) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(p)h + o(h) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(p)h + o(h)$$

$$\varphi_2(p_1+h, p_2) = \varphi_2(p) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(p)h + o(h) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(p)h + o(h)$$

נציב במשוואה ונקבל

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial u} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(\varphi_1(p)h+o(h))^2+(\varphi_2(p)h+o(h))^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\right)^2(p) + \frac{o(h)}{h} + \frac{o(h)^2}{h^2} + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\right)^2(p) + \frac{o(h)}{h} + \frac{o(h)^2}{h^2}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \sqrt{\varphi_1^2(p)+\varphi_2^2(p)}$$

~~$\varphi_2(p$~~ הגבול קיים אם ורק אם

$$\varphi_1^2(p)+\varphi_2^2(p)=0$$

באותו אופן מראים ש $\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\right)^2(p)+\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\right)^2(p)=0$

(על ידי אותן פעולות במשתנה השני).

אבל מכאן נובע

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\right)^2(p)+\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}\right)^2(p)=0$$

אבל מכאן נובע ש $\frac{\partial \varphi_2}{\partial v} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} = 0$,

~~בסתירה לכך ש rank הדרגה~~

שאלה 3 - סעיף ב - המשך.

אבל

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(p) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(p) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(p) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(p) = 0$$

סותר את ההנחה ש

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(p) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(p) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(p) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(p) \end{pmatrix} = 2$$

③ כי יש שתי שורות 0 - מכיוון שאין פונקציה φ שמקיימת את התנאים, S אינה משטח.

נתון $S \setminus \{(0,0,0)\}$ יהי משוואה

$$x^2+y^2-z^2=0 \quad , \quad D(x^2+y^2-z^2) \neq 0$$

בכל נק' ב $S \setminus \{(0,0,0)\}$ ולכן משטח

שאלה 4

נוכ

$S=\{(x,y)\mid x=|y|\}$ היא משטח,

תהיה ~~קיימת~~ קיימת פונקציה $\varphi:(a,b)\longrightarrow S$

כך ש $\varphi(a,b)$ פתוחה ב S,

$0\in\varphi(a,b)$ ו φ חח"ע ורגולרית.

אבל במקרה הנ"ל $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$

ומתקיים $\varphi_1(t)=\varphi_2(t)$.

שוב, ניקח נק' p כך ש $\varphi(p)=0$

ונקבל ש φ אינה דיפרנציאבילית ב p.

נשים לב ש $\varphi_1(t)=|\varphi_2(t)|$ ~~$\partial\varphi$~~

$\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ קיימת $\Leftarrow$ $\frac{\partial\varphi_1}{\partial t},\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}$ קיימות $\Leftarrow$ $\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}(p),\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}(p)$

~~φ~~ קיימות $\Leftarrow$

$$\frac{\partial\varphi_1(p)}{\partial t}=\lim_{t\to0}\left|\frac{\varphi_2(p+t)-\varphi_2(p)}{t}\right|=$$

$$\lim_{t\to0}\frac{\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}(p)t+o(t)\right|}{t}=\lim_{t\to0}\frac{|t|}{t}\left|\frac{\partial\varphi_2(p)}{\partial t}\right|$$

ולכן $\frac{\partial\varphi_2(p)}{\partial t}=0$ $\Leftarrow$ $\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}=0$

בסתירה לכך ש $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ בעלת rank.

שאלה 5:

סעיף (א): נשים לב ש $det: M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ היא פונקציה רציפה, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ היא קבוצה פתוחה ולכן

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \mid det(A) \neq 0\}$$

היא תמונה הפוכה של קבוצה פתוחה ולכן פתוחה. תת קבוצה פתוחה ש $\mathbb{R}^{n^2}$ היא משטח.

סעיף (ב): נניח ש $A \in GL_n(\mathbb{R})$, נראה ~~שקיימת~~ שקיים מינור A_{ij} כך שהמינור היא תת-מטריצה המתקבלת על ידי מחיקת ~~השורה~~ השורה i והעמודה j) הפיכה.

נניח בשלילה שלא.

אם נחשב דטרמיננטה של A על ידי פיתוח שורה ראשונה, נקבל

$$det\,A = \sum (-1)^{j+1} a_{1j}\, det(A_{1j}) = 0$$

$$\sum (-1)^{j+1} \cdot 0 = 0$$

כי על פי ההנחה, אין ל A מינורים הפיכים וזאת סתירה.

ש.ב תרגיל #5
שאלה ב, סעיף (2)

מכיוון שמטריצה היא פונקציה ליניארית בכל שורה נקבל:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} \dots & a_{ij} & \dots a_{1n} \\ \vdots & a_{ij}+t & \vdots \\ a_{n1} & a_{nj} & a_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} \dots & a_{1n} \\ \vdots & \\ a_{n1} \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} \dots & a_{ij} & \dots a_{1n} \\ \vdots & & \\ 0 & t \dots & 0 \\ a_{1n} & a_{nj} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

כאשר ~~המטריצה~~ השורה ה i במטריצה, השנייה היא 0 בכל למקום a_{ij} ששווה ל t.

נעשה פיתוח לפי השורה ה i של המטריצה השנייה ונקבל

$(-1)^{i+j} t A_{ij}$.

נחבר ונקבל את הדרוש.

נחשב את הנגזרת החלקית

$$\frac{\partial \det(A)}{\partial x_{ij}} = \lim_{t \to 0} \frac{\det(A + t e_{ij}) - \det(A)}{t} =$$

$$\frac{(-1) t \det A_{ij}}{t} = (-1)^{ij} A_{ij}$$

לפי הסעיף הקודם.

שאלה 5 - סעיף 3

כפי שראינו דטרמיננטה היא פונקציה גזירה ברציפות כמו כן, קיים רכיב שבו $\frac{\partial \det}{\partial x_{ij}}(A) \neq 0$

לכל מטריצה הפיכה, על פי הסעיף הקודם.

ולכן $\nabla(\det A - 1) = \nabla \det(A) \neq 0$,

דטרמיננטה גזירה ברציפות כי היא פשוט פולינום ברכיבים שלה, ופולינום הוא תמיד גזיר ברציפות.

שאלה 6:

מכיוון ש C משטח 1 מימדי, לכל $(x,y) \in C$ קיימת סביבה U של (x,y) ב $\mathbb{R}^2$

כך ש $U \cap C = \{(x,y) \in U \mid f(x,y)=0\}$ עבור

$f: U \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות

כך ש $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ או $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$,

שים לב, שסיבוב סביב ציר y של הנק' $(x,y,0)$ נתן

על ידי $(x\cos\theta, y, x\sin\theta)$.

שאלה 6 – המשך

נשים לב, שהמשטח המסובב ניתן ע"י

$$D=\left\{(x\cos\theta,\ y,\ x\sin\theta)\ \middle|\ \begin{matrix}(x,y)\in C\\ \theta\in\mathbb{R}\end{matrix}\right\}$$

~~תהי U קבוצה פתוחה ב~~

נשים לב שאם $f(x,y)=0$

אזי $f((x\cos\theta)^2+(x\sin\theta)^2,y)=0=f(x,y)=0$.

ע"מ למנוע בלבול, ניתן למשתנים ב $\mathbb{R}^3$ שמות חדשים s,t,u

ונסמן

$$D=\{(s,t,u)\in\mathbb{R}^3: s=x\cos\theta,\ t=y,\ u=x\sin\theta,\ (x,y)\in C,\ \theta\in\mathbb{R}\}.$$

~~תהי U קבוצה פתוחה ב $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y)\}$~~

תהי U קבוצה פתוחה $\{(x,y)\mid x>0\}$.

נשים לב שסיבוב של U סביב ציר y, הוא קבוצה פתוחה ב $\mathbb{R}^3$, נסמנה ב W.

תהי $(s,t,u)\in D$.

קיים $(x,y)\in C$ כך ש $s=x\cos\theta$, $t=y$.

שאלה 6 - המשך:

ל-f (x,y) קיימת סביבה פתוחה $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ופונקציה f גזירה ברציפות בעלת גרדיאנט שונה מ-$\bar{0}$, f כך ש

$$U \cap C = \{(x,y)\in U \mid f(x,y)=0\}.$$

נשים לב ש-W כמו קודם, מקיימת

$$\cancel{W\cap D = \{(s,t,u) \mid f(\sqrt{s^2+u^2},t)\}} \neq$$

$$W\cap D = \{(s,t,u) \mid f(\sqrt{s^2+u^2},t)=0\}$$

נראה ש $g(s,t,u) = f(\sqrt{s^2+u^2},t)$ גזירה ברציפות ובעלת נגזרת לא מתאפסת).

נסמן $x=\sqrt{s^2+u^2}$, $y=t$

מכלל השרשרת:

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{s}{\sqrt{s^2+u^2}}\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{u}{\sqrt{s^2+u^2}}\frac{\partial f}{\partial x}$$

מכיוון ש $\frac{\partial f}{\partial y}\neq 0$ או $\frac{\partial f}{\partial x}\neq 0$

ו' $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ רציפות, ו $(s,u)\neq(0,0)$

$x>0$ / $(s,u)=(x\cos\theta, x\sin\theta)$

משמאל, הנגזרות רציפות ולפחות אחת מהן שונה מ0.