

קומבינטוריקה להנדסה - תרגול 4

9 בנובמבר 2020

יום פתוח מרכז הסייבר: 12/11/2020, קיבלתם במייל הזמנה.

1 פונקציות

1. תהי $f : A \rightarrow B$ פונקציה הפיכה. הוכיחו: f חח"ע ועל.
פתרון: העובדה ש- f הפיכה אומרת: יש פונקציה $g : B \rightarrow A$ כך ש-:

$$g \circ f = id_A$$

$$f \circ g = id_B$$

כאשר id_X היא הפונקציה $id_X : X \rightarrow X$ המקיימת: $\forall x \in X : id_X(x) = x$.
כעת נזכר שראינו בהרצאה (או באיזשהו קובץ שהועלה אחרי ההרצאה) שמתקיים:
אם $g \circ f$ חח"ע אז f חח"ע. אם $f \circ g$ על אז f על. כיון שפונקציות הזהות id_A, id_B הן חח"ע ועל (קל להוכיח, מוזמנים לנסות לבד) נקבל ש- f חח"ע ועל.

2. דוגמא: הפונקציה $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$$

הפיכה: חח"ע: נניח $f(s) = f(t)$, צ"ל: $s = t$. אפשר במקום: נניח $s \neq t$ ונוכיח $f(s) \neq f(t)$. נחלק למקרים:

אם $s > t \geq 0$: אז נקבל $f(s) = \sqrt{s} > \sqrt{t} = f(t)$, ולכן $f(s) \neq f(t)$.

אם $s < t < 0$: אז נקבל $f(s) = s < t = f(t)$, ולכן $f(s) \neq f(t)$.

אם $s < 0 \leq t$: אז נקבל $f(s) = s < \sqrt{t} = f(t)$, ולכן $f(s) \neq f(t)$.

עד כאן הוכחת חח"ע.

על: יהי $x \in \mathbb{R}$, צריך למצוא לו מקור. נחלק למקרים:

אם $x \geq 0$ אז $x = \sqrt{x^2} = f(x^2)$.

אם $x < 0$ אז $f(x) = x$. בכל מקרה מצאנו מקור.
הפונקציה ההופכית היא: $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$$

וצריך להראות:

$$\forall x : f \circ f^{-1}(x) = x, f^{-1} \circ f(x) = x$$

2 אינדוקציה

מטרה: להוכיח שטענה מסויימת נכונה לכל $n \in \mathbb{N}$ (נקרא לטענה P ואנחנו רוצים להוכיח: $\forall n : P(n)$). אנחנו עושים זאת בשני שלבים:

1. בסיס האינדוקציה: מוכיחים את הטענה עבור $n = 0$, כלומר, מוכיחים את $P(0)$.
2. צעד האינדוקציה: מוכיחים שלכל n אם הטענה נכונה עבורו אז היא נכונה גם עבור $n + 1$. כלומר, מוכיחים:

$$\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n + 1)$$

הכללה: לא חייבים שהבסיס יהיה 0, אלא המספר הקטן ביותר עבורו הטענה נכונה, כפי שנראה בהמשך.
תרגילים:

1. הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים: $0 + 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$ (או בכתיב מקוצר: $(\sum_{k=0}^n 2k = n(n + 1))$).
פתרון: בסיס: עבור $n = 0$ אכן נקבל $0 = 0 \cdot 1$.
צעד: יהי n טבעי, ונניח נכונות עבור n , כלומר: נניח שמתקיים: $\sum_{k=0}^n 2k = n(n + 1)$.
צריך להוכיח: $\sum_{k=0}^{n+1} 2k = (n + 1)(n + 2)$. הוכחה:

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2k = \underbrace{\sum_{k=0}^n 2k}_{n(n+1)} + 2(n+1) = n(n+1) + 2(n+1) = (n+1)(n+2)$$

2. הוכיחו שלכל $n \geq 2$ מתקיים: אם $x > 0$ אז: $(1+x)^n > 1+nx$.
 פתרון: בסיס: עבור $n = 2$ נקבל $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x$.
 צעד: נניח נכונות עבור n (כלומר, נניח $(1+x)^n > 1+nx$), ונראה עבור $n+1$ שמתקיים: $(1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \underset{i.a.}{>} (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x + \underbrace{nx^2}_{>0} > 1+(n+1)x$$