שאלון בחינה: גיאומטריה דיפרנציאלית ואנליטית (88-201)
שם המרצה: פרופ' מיכאל כץ
סמסטר ב', מועד א' : 28.07.17

<u>יש לנמק ולהצדיק את כל התשובות. שאלון סגור.</u>

<u>משך הבחינה: שלוש שעות.</u> כל אחת מ-5 שאלות הבאות שווה 20 נקודות. שאלת בונוס שווה 8 נקודות.

1. הוכח את משפט egregium של Gauss : תהי K עקמומיות של Gauss של משטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ המוגדרת כדטרמיננטה של העתקת Weingarten W_p בנקודה $p \in M$. אזי ניתן לבטא K באמצעות מקדמי התבנית היסודית הראשונה ונגזרותיה לסדר המתאים.

2. נתונה תבנית ריבועית $Q(x,y) = -3x^2 + 4xy - 6y^2$
   א. עקומה מישורית מוגדרת ע"י המשוואה $Q(x,y) = -1$. לאפיין את העקומה.
   ב. לאפיין את המשטח המתקבל כ-גרף של התבנית הריבועית $z = Q(x,y)$ ולמצא את עקמומיות גאוס של הגרף בראשית.

3. מצא נקודה או נקודות (אם קיימות) של עקמומיות מקסימלית על העקומה הבאה במישור (x,y):
   א. עקומה $x + y^2 = 1$.
   ב. עקומה $xy + 1 = 0,\ x > 0$.
   ג. עקומה $x + \ln y = 0$.

4. יהי M משטח עם פרמטריזציה $x(u,v)$.
   א. הוכיחו שאם הקואורדינאטות הן איזותרמיות עם פונקציה f, אז מתקיים $\Delta x = -2f^2 H\vec{n}$, כאשר Δ הוא האופרטור הלפלסיאן, H היא העקמומיות הממוצעת של המשטח ו-$\vec{n}$ הוא וקטור הנורמל למשטח.

ב. הוכיחו שמשטח הסיבוב של העקומה $x=\cosh z$ הוא משטח מינימלי.

ג. הוכיחו שהמשטח הבא הוא משטח מינימלי:

$X(u,v)=\left(u,v,\ln\left(\frac{\cos u}{\cos v}\right)\right)$.

5. הביטוים הבאים משתמשים בסימון סכימה של Einstein . עבור כל אחד מהביטוים, לקבוע איזה אינדקסים הם אינדקסים חופשיים ואיזה מהם הם אינדקסי סכימה, ולבטא באמצעות מקדמים L_{ij}, Γ_{ij}^{ℓ}, וכו' ולפשט ככל האפשר את הביטויים הבאים:

א. $\langle x_j, x_{pq}\rangle g^{jp}$.

ב. $\langle x_{pq}, n_s\rangle \delta_m^q$.

ג. $g_{pq}\,\delta_s^q\, g^{st}\,\delta_t^p$.

6. (שאלת בונוס) תהי $C\subseteq\mathbb{R}^2$ עקומת Jordan שעבורה קיימת פרמטריזציה רגולרית בסביבה של כל נקודה. הוכח שבנקודה של C הקרובה ביותר לראשית, הרדיוס-וקטור הוא מאונך לוקטור המשיק.

בהצלחה!