

אלגברה לינארית 2

תיכוניםטים חורף תשפ"ה
יונתן סמידוברסקי

תוכן העניינים

3	1 תרגול 1	1
3	1.1 דטרמיננטה - משמעות גיאומטרית	
5	1.2 דטרמיננטה - פיתוח לפי מינורים	
6	1.3 החבורה הסימטרית (חבורת התמורות) על קצה המזלג	
7	1.4 דטרמיננטה	
7	2 תרגול 2	2
7	2.1 תכונות הדטרמיננטה	
9	2.2 דטרמיננטה לפי שיטת הדירוג	
12	3 תרגול 3	3
12	3.1 המטריצה המצורפת	
15	3.2 וקטורים עצמיים וערכים עצמיים	
17	4 תרגול 4	4
17	4.1 מציאת וקטורים וערכים עצמיים	
20	4.2 דמיון מטריצות	
21	4.3 מוטיבציה ללכסון - העלאת מטריצה בחזקה	
22	5 תרגול 5	5
22	5.1 אלגוריתם ללכסון	
25	5.2 ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים ולכסון של העתקות	
26	5.3 תת-מרחב שמור (אינווריאנטי)	
27	5.4 מטריצת בלוקים	
30	6 תרגול 6	6
30	6.1 משפט קיילי-המילטון והפולינום המינימלי	
32	6.2 מרחבים עצמיים מוכללים	
34	6.3 משפט ז'ורדן	
34	6.3.1 ז'ורדן מטריצה נילפוטנטית	
37	6.3.2 ז'ורדן מטריצה עם ערך עצמי יחיד	
38	6.3.3 ז'ורדן מטריצה עם יותר מערך עצמי יחיד	
39	7 תרגול 7	7
39	7.1 מציאת צורת ז'ורדן	

42	8 תרגול 8	
42	8.1	מרחב מכפלה פנימית
47	8.2	נורמה
48	8.3	אי-שיוויון קושי-שוורץ
50	9 תרגול 9	
50	9.1	המרחב הניצב
51	9.2	אורתוגונליות ואורתונורמליות, משפט פיתגורס
54	9.3	היטל של וקטור על תת-מרחב
55	9.4	תהליך גרם-שמידט
58	10 תרגול 10	
58	10.1	אופרטורים לינאריים והאופרטור הצמוד
60	10.2	אופרטורים נורמליים
64	11 תרגול 11	
64	11.1	לכסון אוניטרי (ואורתוגונלי)
69	12 תרגול 12	
69	12.1	מטריצות סיבוב ושיקוף
71	12.2	תבניות בילנאריות וריבועיות
72	12.3	חתכי חרוט ותבניות ריבועיות
81	12.4	משטחים ריבועיים
89	12.5	קריטריון סילבסטר

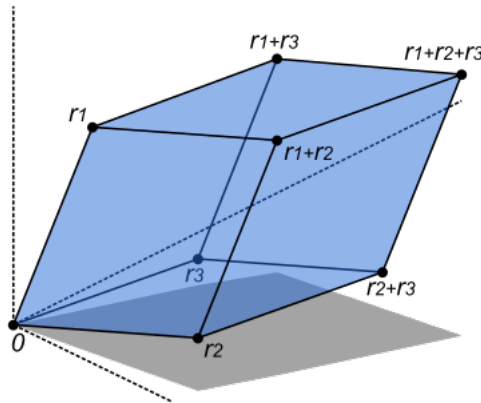
1 תרגול 1

1.1 דטרמיננטה - משמעות גיאומטרית

הגדרה 1.1. הדטרמיננטה של מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מוגדרת על פי הנוסחה

$$\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

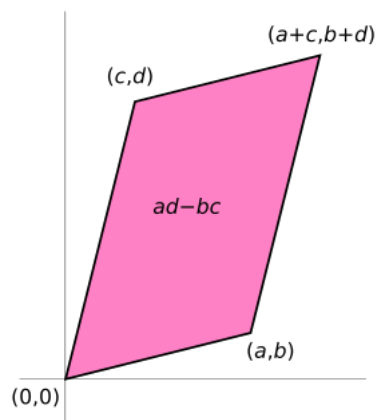
הגדרה זאת דורשת היכרות עם החבורה הסימטרית, נגיע אליה בהמשך.
 לדטרמיננטה משמעות גיאומטרית - אם A מטריצה ריבועית מממית, הדטרמיננטה שלה שווה לנפחו (המכוון) של המקבילון (במרחב האוקלידי ה- n -ממדי), שקודקודיו הם עמודות המטריצה.
 ניתן להגדיר אותה גם באופן אקסיומטי שתקיים זאת (בהרצאה).



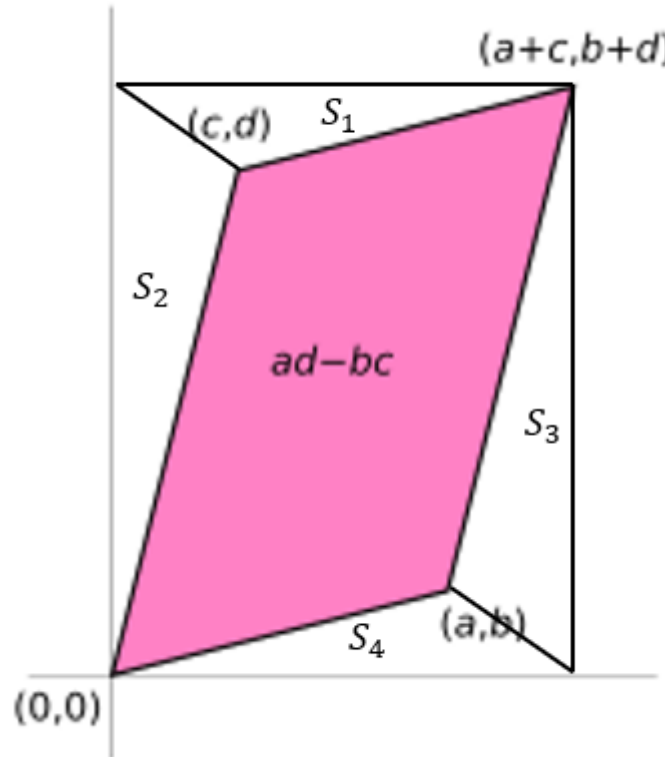
דוגמה 1.2. במקרה של מטריצה 2×2 , נוסחת הדטרמיננטה היא

$$\left| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| = ad - bc$$

נרצה להראות שהשטח (עד כדי סימן) של המקבילית הדו-ממדית הוא זה שמתקבל על ידי הדטרמיננטה.
 ראיתם בהרצאה שאפשר להתחיל מאקסיומות (מנרמלת, לינארית בכל המשתנים, מתחלפת...) ולהגיע לפונקציה המתאימה. אנחנו נראה את זה באופן גיאומטרי:



הקודקודים שלנו הם $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$
 נתבונן במלבן שקובעת הנקודה $\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ ונחלק את השטח למקבילית וארבעה משולשים כפי שמוצג באיור:



עכשיו, נסמן S - שטח המקבילית.
 שטח המלבן הוא סכום שטחי המשולשים והמקבילית

$$(a+c) \cdot (b+d) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S$$

$$S = (a+c) \cdot (b+d) - S_1 - S_2 - S_3 - S_4$$

$$S = (a+c)(b+d) - \frac{(a+c)b}{2} - \frac{(b+d)c}{2} - \frac{(b+d)c}{2} - \frac{(a+c)b}{2}$$

$$= (a+c)d - (b+d)c = ad + cd - bc - dc$$

$$\boxed{S = ad - bc}$$

ניתן לחשב את הדטרמיננטה

1. על פי הנוסחה עם תמורות (בהמשך)

2. פיתוח לפי מינורים (נוסחת לפלס)

3. לפי דירוג (השפעת פעולות דירוג על הדטרמיננטה, בהמשך)

1.2 דטרמיננטה - פיתוח לפי מינורים

הגדרה 1.3. ניתן לחשב את הדטרמיננטה בצורה רקורסיבית - פיתוח לפי מינורים. הדטרמיננטה של מטריצה בגודל 1×1 הוא האיבר היחיד שלה. כעת, נראה כיצד לחשב דטרמיננטה מסדר $n \times n$ (עבור $n \geq 2$). המינור של איבר במטריצה A הוא הדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת על ידי מחיקת השורה והעמודה של אותו איבר מהמטריצה, כך שמתקבלת מטריצה בגודל $(n-1) \times (n-1)$ (את הדטרמיננטה הזו, אנחנו כבר יודעים לחשב ברקורסיה). נסמן את המינור המתקבל ממחיקת הרכיב (i, j) לפי A_{ij} . פיתוח לפי השורה ה- i :

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}$$

פיתוח לפי העמודה ה- j

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}$$

דוגמה 1.4. נחשב את הדטרמיננטה של מטריצה 3×3

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$$

טענה 1.5. הדטרמיננטה של מטריצה משולשית היא מכפלת איברי האלכסון. הוכחה. אפשר לראות זאת גם מההגדרה באמצעות תמורות, כל המחברים מתאפסים פרט לתמורת הזהות שהיא מסימן זוגי. נראה זאת באמצעות לפלס: נניח שהמטריצה משולשית עליונה (כלומר, לכל $i > j$ מתקיים $A_{ij} = 0$). נוכיח באינדוקציה על n כאשר $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. בסיס $n = 1$ - ברור. צעד נניח שלכל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מתקיים

$$\det A = \prod_{k=1}^n a_{kk}$$

נרצה להראות כי עבור מטריצה $B \in \mathbb{F}^{(n+1) \times (n+1)}$ מתקיים

$$\det B = \prod_{k=1}^{n+1} b_{kk}$$

נשים לב שפיתוח לפלס עוזר לנו לרדת מימד ברקורסיה, נפתח לפי העמודה הראשונה

$$\det B = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} A_{i1} = (-1)^{1+1} a_{11} A_{11} \\ = (-1)^{1+1} a_{11} A_{11} = a_{11} \cdot A_{11}$$

אבל $A_{11} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ומהנחת האינדוקציה נקבל

$$\det B = a_{11} \cdot \prod_{k=2}^{n+1} a_{kk} = \prod_{k=1}^{n+1} a_{kk}$$

□

כנדרש.

1.3 החבורה הסימטרית (חבורת התמורות) על קצה המזלג

הגדרה 1.6. החבורה הסימטרית מדרגה n היא

$$S_n = \left\{ \sigma \in \{1, 2, \dots, n\}^{\{1, 2, \dots, n\}} : \text{ועל חח"ע} \right\}$$

אוסף כל ההעתקות החח"ע ועל מהקבוצה $\{1, 2, \dots, n\}$ לעצמה, במילים אחרות - אוסף כל שינויי הסדר של המספרים $\{1, 2, \dots, n\}$.

הערה 1.7. $|S_n| = n!$ - מספר האפשרויות לבחור את $\sigma(1)$ הוא n . אחר כך, מספר האפשרויות לבחור את $\sigma(2)$ הוא $n-1$. כך ממשיכים עד שמספר האפשרויות לבחור את $\sigma(n)$ הוא 1, האיבר האחרון של בחרנו. סה"כ מקבלים

$$|S_n| = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$$

דוגמה 1.8. ניקח לדוגמה את S_3 , נכתוב את האיברים ב- S_3 :

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

הגדרה 1.9. מחזור (או עגיל) ב- S_n הוא תמורה המציינת מעגל אחד של החלפות של מספרים שונים: $a_1 \mapsto a_2 \mapsto a_3 \mapsto \dots \mapsto a_k \mapsto a_1$ (ושאר המספרים נשלחים לעצמם). כותבים את התמורה הזו בקיצור $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_k)$. חילוף הוא מחזור באורך 2.

משפט 1.10. כל תמורה ניתנת לכתיבה באופן יחיד כהרכבת מחזורים זרים.

דוגמה 1.11. נסתכל על התמורה הבאה ב- S_7

$$\sigma = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 3 & 1 & 5 & 2 & 6 \end{array} \right)$$

כדי לכתוב אתה כמכפלת מחזורים זרים, לוקחים מספר, ומתחילים לעבור על המחזור המתחיל בו. למשל:

$$1 \mapsto 4 \mapsto 1$$

אז בכתיבה על ידי מחזורים יהיה לנו את המחזור $(1 \ 4)$. כעת ממשיכים כך ומתחילים ממספר אחר:

$$2 \mapsto 7 \mapsto 6 \mapsto 2$$

אז נקבל את המחזור $(2 \ 7 \ 6)$ בכתיבה. נשים לב ששאר המספרים הולכים לעצמם, $3 \mapsto 3, 5 \mapsto 5$ ולכן

$$\sigma = (1 \ 4) (2 \ 7 \ 6)$$

הגדרה 1.12. יהי σ מחזור מאורך k , אזי הסימן שלו מוגדר להיות:

$$\text{sign}(\sigma) = (-1)^{k-1}$$

ועבור תמורות $\tau, \sigma \in S_n$ נרחיב את ההגדרה

$$\text{sign}(\sigma\tau) = \text{sign}(\sigma) \text{sign}(\tau)$$

וזה מאפשר לחשב את הסימן של כל תמורה ב- S_n .

תמורה שסימנה 1 תקרא תמורה זוגית ותמורה שסימנה -1 תקרא תמורה אי-זוגית. באופן שקול, תמורה תקרא זוגית אם היא מתפרקת למספר זוגי של חילופים ואי-זוגית אחרת.

דוגמה 1.13

- (א) החילוף $(1 \ 4)$ הוא אי-זוגי.
- (ב) תמורת הזהות היא תמורה זוגית.
- (ג) $(1 \ 4) (2 \ 3)$ היא תמורה זוגית.
- (ד) $(1 \ 2 \ 3 \ 5 \ 4)$ היא תמורה זוגית.

1.4 דטרמיננטה

דוגמה 1.14. נחשב $\left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right|$ לפי תמורות.

ב- S_3 יש 3 סוגי תמורות:

id - תמורה זוגית

חילוף - תמורה אי-זוגית, $(1\ 2)$, $(1\ 3)$, $(2\ 3)$
 מחזור מאורך 3 - תמורה זוגית, $(1\ 2\ 3)$, $(1\ 3\ 2)$
 נקבל

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right| = (1 \cdot 0 \cdot 2) - (2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1) + (2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 1) = -2$$

תרגיל 1.15. נמקו את הבאים כמסקנות ישירות מפיתוח לפלס או הגדרה לפי תמורות:

- (1) במטריצה משולשית, הדטרמיננטה היא מכפלת איברי האלכסון.
- (2) החלפת שורות או עמודות משנה את סימן הדטרמיננטה.
- (3) מטריצה בעלת שתי שורות או עמודות זהות היא בעלת דטרמיננטה אפס (מה המשמעות הגיאומטרית?).
- (4) כפל שורה או עמודה בסקלר כופל את הדטרמיננטה בסקלר המתאים.
- (5) עבור $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $|\alpha A| = \alpha^n |A|$.

פתרון.

- (1) ראינו לפי לפלס. לפי תמורות, נשים לב שהמכפלה היחידה שאפס לא משתתף בה היא תמורת הזהות שהיא זוגית.
- (2) לפי ההגדרה עם התמורות: נשים לב כי כאשר מחשבים את הדטרמיננטה של המטריצה החדשה, כל המכפלות נשארות זהות וניתן "לשלם" על ההחלפה בשורות כהוספת חילוף בתמורה שהופך את הסימן.
- (3) אם נבצע החלפת שורות או עמודות מתאימה נקבל

$$|A| = -|A| \Rightarrow |A| = 0$$

- (4) לפי פיתוח לפלס, כאשר מפתחים לפי השורה המתאימה ניתן להוציא סקלר החוצה. בהגדרה לפי תמורות, בסכום יש מכפלות ובכל מכפלה מופיע איבר מכל שורה - ניתן להוציא את הסקלר מהסכום.
- (5) ניתן לבצע כפל בסקלר n פעמים.

2 תרגול 2

2.1 תכונות הדטרמיננטה

משפט 2.1. (תכונות הדטרמיננטה)

(1) הדטרמיננטה היא כפלית, כלומר,

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

- (2) מסקנה - $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$. יתרה מכך, A הפיכה אם ורק אם $|A| \neq 0$.
- (3) מסקנה (באמצעות מטריצות פעולה) - השפעת פעולות שורה אלמנטריות על הדטרמיננטה. תהי B מטריצה המתקבלת ממטריצה A על ידי פעולות שורה, אזי:
 א. אם B התקבלה על ידי כפל של אחת השורות ב- α אזי $\alpha |A| = |B|$.

ג. אם B התקבלה על ידי החלפת שתי שורות אזי $|A| = -|B|$.
 ג. אם B התקבלה על ידי הוספת כפולה של שורה אחת לשורה אחרת אזי $|A| = |B|$.
 4) $|A| = |A^t|$.

תרגיל 2.2. תהינה מטריצות ריבועיות מסדר 4×4 כך ש $\det A = -2, \det B = 3$.
 חשבו את $\det \left(3A^t B^2 A^{-1} \cdot (2A)^{-1} \right)$

פתרון. מהתכונות לעיל,

$$\begin{aligned} \det \left(3A^t B^2 A^{-1} \cdot (2A)^{-1} \right) &= 3^4 \det A^t \cdot (\det B)^2 \cdot \frac{1}{\det A} \cdot \frac{1}{\det 2A} \\ &= 3^4 \det A \cdot (\det B)^2 \cdot \frac{1}{\det A} \cdot \frac{1}{2^4 \det B} = 1.5^4 \cdot 3 = 15.1875 \end{aligned}$$

תרגיל 2.3. תהי A מטריצה מסדר 3×3 המקיימת

$$A^t (A - I) = - (A - I)^t$$

נתון כי $|A| \neq -1$, הוכיחו כי $A - I$ אינה הפיכה.

פתרון. בהפעלת דטרמיננטה נקבל

$$|A| \cdot |A - I| = (-1)^3 |A - I| = -|A - I|$$

$$|A - I| \cdot (|A| + 1) = 0$$

אבל $|A| \neq -1$, לכן $|A| + 1 = 0$ וחייב להתקיים $|A - I| = 0$.
 כלומר, $A - I$ אינה הפיכה.

תרגיל 2.4.

א) תהינה A, B מטריצות ריבועיות מסדר אי-זוגי כך ש $AB + BA = 0$.
 הוכיחו כי אחת מהמטריצות אינה הפיכה.
 ב) הפריכו בסדר זוגי.

פתרון.

א) בהעברת אגפים נקבל $AB = -BA$. נפעיל דטרמיננטה ונקבל

$$\det (AB) = (-1)^{2k-1} \det (BA)$$

$$\det A \cdot \det B = -\det B \cdot \det A = -\det A \cdot \det B$$

וקיבלנו $\det A \cdot \det B = 0$, כנדרש.

ב) ניקח $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

שתי המטריצות הפיכות כי הדטרמיננטה שלהן שונה מאפס אבל

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

תרגיל 2.5. הוכיחו או הפריכו: אם A הפיכה אזי AA^t הפיכה.

פתרון. הוכחה - $\det (AA^t) = \det A \cdot \det A^t = (\det A)^2 \neq 0$

2.2 דטרמיננטה לפי שיטת הדירוג

מסקנה 2.6. ממשפט 2.1, ניתן לחשב דטרמיננטה על ידי דירוג המטריצה עד לצורה משולשית עליונה (שבה קל לחשב דטרמיננטה) ולעקוב אחר השינויים בדטרמיננטה.

דוגמה 2.7. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 4R_1} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_1} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot 6 = -18$$

תרגיל 2.8. יהי $b \in \mathbb{R}$ ונגדיר את המטריצה $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ באופן הבא:

$$(A)_{ij} = \begin{cases} b & i = j \\ 1 & i \neq j \end{cases}$$

כלומר המטריצה נראית כך:

$$\begin{pmatrix} b & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & b & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}$$

חשבו את הדטרמיננטה שלה.

פתרון.

$$\det \begin{pmatrix} b & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & b & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 + R_2 + \cdots + R_n} \det \begin{pmatrix} (b+n-1) & (b+n-1) & (b+n-1) & \cdots \\ 1 & b & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & b \end{pmatrix} \\ = (b+n-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & b & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & b & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & b \end{pmatrix} \xrightarrow{R_i \leftarrow R_i - R_1} (b+n-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 0 & b-1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & b-1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b-1 \end{pmatrix} \\ = (b+n-1)(b-1)^{n-1}$$

תרגיל 2.9. נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, עבורה מתקיים $|A| = \frac{1}{6}$. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה:

$$B = \begin{pmatrix} -2a_3 & -2a_2 & -2a_1 \\ a_3 - b_3 & a_2 - b_2 & a_1 - b_1 \\ 3a_3 + 5c_3 & 3a_2 + 5c_2 & 3a_1 + 5c_1 \end{pmatrix}$$

פתרון. המטרה היא להגיע מ A ל B על ידי פעולות דירוג.

$$\det A = \det A^t = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{C_1 \leftrightarrow C_3}{=} -\det \begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{pmatrix} \stackrel{R_2 \leftarrow R_2 - R_1}{=} -\det \begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 - a_3 & b_2 - a_2 & b_1 - a_2 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{-2R_1}{=} -1 \cdot \left(\frac{-1}{2} \right) \det \begin{pmatrix} -2a_3 & -2a_2 & -2a_1 \\ b_3 - a_3 & b_2 - a_2 & b_1 - a_2 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} -2a_3 & -2a_2 & -2a_1 \\ b_3 - a_3 & b_2 - a_2 & b_1 - a_2 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{5R_3}{=} \frac{1}{10} \det \begin{pmatrix} -2a_3 & -2a_2 & -2a_1 \\ b_3 - a_3 & b_2 - a_2 & b_1 - a_2 \\ 5c_3 & 5c_2 & 5c_1 \end{pmatrix} \stackrel{R_3 \leftarrow R_3 - \frac{3}{2}R_1}{=} \frac{1}{10} \det \begin{pmatrix} -2a_3 & -2a_2 & -2a_1 \\ b_3 - a_3 & b_2 - a_2 & b_1 - a_2 \\ 5c_3 + 3a_3 & 5c_2 + 3a_2 & 5c_1 + 3a_1 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{-R_2}{=} -\frac{1}{10} \det \begin{pmatrix} -2a_3 & -2a_2 & -2a_1 \\ a_3 - b_3 & a_2 - b_2 & a_1 - b_1 \\ 3a_3 + 5c_3 & 3a_2 + 5c_2 & 3a_1 + 5c_1 \end{pmatrix}$$

ונקבל

$$\det A = -\frac{1}{10} \det B$$

$$\det B = -10 \det A = -\frac{10}{6}$$

משפט 2.10. n נקודות קובעות ביחידות פולינום פדרגה $n - 1$.

הוכחה. יש כמה דרכים להראות יחידות וקיום הפולינום, ביניהן גם כמה שיטות למציאת הפולינום במפורש (אינטרפולציה).

נראה באמצעות דטרמיננטה:

נניח יש לנו נקודות $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{i=1}^n$ (עם ערכי x שונים), נרצה להראות שקיים פולינום $p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$

נשים לב שצריכות להתקיים המשוואות הבאות:

$$\forall_{1 \leq i \leq n} p(\alpha_i) = \beta_i$$

$$\forall_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \alpha_i^k = \beta_i$$

נכתוב בצורה מטריציונית:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{\vec{p}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}}_{\vec{p(\alpha)}}$$

$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ נקראת מטריצת ונדרמונד.

אם נראה שהיא הפיכה נקבל כמסקנה שקיים ופתרון ואפילו נמצא את המקדמים: $\vec{p} = \vec{V^{-1}p(\alpha)}$

נותר להראות כי מטריצת ונדרמונד היא הפיכה, אפשר להראות כי הדטרמיננטה (בתרגיל הבית) היא

$$\det V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$$

לכן כאשר ערכי x שונים נקבל דטרמיננטה שונה מאפס, הפיכה. $\square$

משפט 2.11. (נוסחת קרמר) תהי מערכת משוואות ריבועית $Ax = b$, כאשר A מטריצה ריבועית b -וקטור עמודה.

ניח גם כי $\det A \neq 0$, כלומר, קיים פתרון יחיד למערכת. אזי הרכיב k של וקטור הפתרון x נתון על ידי

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A}$$

כאשר A_k היא המטריצה שמתקבלת על ידי החלפת העמודה ה- k שבמטריצה בוקטור b .

פתרון.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

כאשר $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ הוא וקטור הפתרון (היחיד) של המערכת. לחישוב האיבר k של x , נוסיף למערכת משוואה אחת באופן הבא:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} & b_n \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & x_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

שימו לב ש- n המשוואות הראשונות שקולות והמשוואה האחרונה היא $x_k - x_l = 0$. שימו לב למערכת ההומוגנית הזאת יש פתרון לא טריוויאלי, לכן היא אינה הפיכה והדטרמיננטה צריכה לצאת אפס.

$$\left| \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} & b_n \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & x_k \end{pmatrix} \right| = 0$$

נפתח את הדטרמיננטה לפי השורה האחרונה ונקבל

$$(-1)^{k+n+1} \left| \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \right| + (-1)^{(n+1)+(n+1)} x_k \det A = 0$$

עכשיו, נבצע $n - k$ החלפות עמודה על מנת להביא את העמודה האחרונה למקום k .

נקבל

$$(-1)^{(k+n+1)+(n-k)} \det A_k + (-1)^{(n+1)+(n+1)} x_k \det A = 0$$

$$-\det A_k + x_k \det A = 0$$

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A}$$

3 תרגול 3

3.1 המטריצה המצורפת

הגדרה 3.1. המטריצה המצורפת של מטריצה ריבועית מסומנת ב- $\text{adj}(A)$ וכל איבר בה מוגדר באופן הבא:

$$\text{adj}(A)_{i,j} = (-1)^{i+j} |A_{ji}|$$

כאשר $|A_{ji}|$ הוא המינור של האיבר במקום j, i במטריצה A .

דוגמה 3.2. עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

משפט 3.3. לכל מטריצה ריבועית A מסדר n מתקיים

$$A \cdot \text{adj}(A) = \text{adj}(A) \cdot A = \det A \cdot I_n$$

טענה 3.4. הוכיחו כי

$$\text{rank}(\text{adj}(A)) = \begin{cases} n & \text{rank}(A) = n \\ 1 & \text{rank}(A) = n - 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

הוכחה. אם $\text{rank}(A) = n$ היא הפיכה ולכן $A = \det A \cdot I_n \cdot \text{adj}(A)^{-1}$.
 $\text{adj}(A)$ הפיכה כמכפלת הפיכות ומאותה דרגה.

אם $\text{rank}(A) < n - 1$ אז כל $n - 1$ שורות ועמודות הן ת"ל.

בפרט, אם נסיר את השורה ה- i , הדרגה תשאר קטנה מ- $n - 1$.

עכשיו, נסמן A_i לאחר הסרת השורה ה- i , ונבחין כי $\dim C(A_i) = \dim R(A_i) < n - 1$.

בפרט, כל $n - 1$ עמודות הן בת"ל וניתן להסיר גם את העמודה ה- j ולקבל כי ב- A_{ij} יש

תלות.

סך הכל, לכל i, j מתקיים $|A_{ji}| = 0$. קיבלנו $\text{adj}(A) = 0$ ומדרגה 0.

נותר המקרה שבו $\text{rank}(A) = n - 1$.

ניקח את $n - 1$ השורות הבת"ל (נניח כל השורות פרט ל- R_j) ומקבלים מטריצה ששורותיה

בת"ל, נסמנה A_j .

יש שם $n - 1$ עמודות בת"ל (כי $\dim C(A_j) = \dim R(A_j) = n - 1$) וקיבלנו שיש

עמודה i שבהסרתה מקבלים תת-מטריצה ריבועית הפיכה. זהו בעצם מינור $M_{j,i}$ (עבור i, j

כלשהם) ושם יתקבל $(\text{adj}(A))_{ij} \neq 0$.

לכן, $\text{rank}(\text{adj}(A)) \geq 1$ (זו אינה מטריצת האפס).

מצד שני, $\text{adj}(A) \cdot A = 0$ גורר כי $C(A) \subseteq N(\text{adj}(A))$.

כלומר $n - 1 = \dim C(A) \leq \dim N(\text{adj}(A))$.

לכן, $\dim N(\text{adj}(A)) \geq n - 1$ ומכאן נובע ממשפט הדרגה $\text{rank}(\text{adj}(A)) \leq 1$.

כנדרש.

□

טענה 3.5. הוכיחו את הבאים:

(א) $\text{adj}(I) = I$

(ב) אם A מטריצה הפיכה אזי $A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det A}$

(ג) מטריצה ריבועית A היא הפיכה אם ורק אם $\text{adj}(A)$ הפיכה.

(ד) לכל שתי מטריצות ריבועיות A, B מאותו סדר מתקיים

$$\text{adj}(AB) = \text{adj}(B) \cdot \text{adj}(A)$$

(ה) לכל מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מתקיים $\det(\text{adj}(A)) = \det(A)^{n-1}$
 (ו) אם A מטריצה הפיכה אזי $\text{adj}(A^{-1}) = (\text{adj}(A))^{-1}$.

הוכחה.

(א) $\text{adj}(I) = I \cdot \text{adj}(I) = \det(I) \cdot I = I$

(ב) ישירות מהמשפט, מחלקים $\det A$.

(ג) $A \cdot \text{adj}(A) = \det A \cdot I$, אם אחת מהן הפיכה, כופלים בהופכית ומקבלים שהשנייה היא מכפלת הפיכות.

(ד) נחלק למקרים.

מקרה 1 - אם A, B הפיכות אזי

$$\text{adj}(A) = |A| A^{-1}, \text{adj}(B) = |B| B^{-1} \Rightarrow \text{adj}(B) \cdot \text{adj}(A) = |B| B^{-1} \cdot |A| A^{-1}$$

מצד שני,

$$\text{adj}(AB) = (AB)^{-1} |AB| = B^{-1} A^{-1} \cdot |A| \cdot |B|$$

וקיבלנו הדרוש.

מקרה 2 - עכשיו, אם A או B מדרגה קטנה או שווה ל-2.

מקבלים מטענת העזר כי אחת מבין $\text{adj}(A), \text{adj}(B)$ שווה לאפס. לכן, $\text{adj}(B) \cdot \text{adj}(A) = 0$.

מצד שני, $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A), \text{rank}(B)$, לכן גם הדרגה של המכפלה קטנה או שווה ל-2 ונקבל

$$\text{adj}(AB) = 0$$

מקרה 3 - אחרת, יהיו i, j .

ניתן להגדיר מטריצה A' שזוהי A פרט אולי לשורה i ו' B' שזוהי B פרט אולי לעמודה j שמקיימות כי A', B' הפיכות או שאחת מבין A', B' מדרגה קטנה או שווה ל-2.

ביתר פירוט, עבור המטריצה מביניהן (או עבור שתיהן) שהיא מדרגה $n-1$ נבצע את

התהליך הבא:

נראה עבור A (דומה ל- B , רק עם עמודות).

נסתכל על השורה i שלה, R_i .

אם כל קבוצה של $n-1$ שורות בת"ל כוללת את R_i , על ידי שינוי לשורות אפסים $(0 \dots \dots)$ הדרגה יורדת ל-2.

אם קיימת קבוצה של $n-1$ שורות בת"ל שלא כוללת את R_i , נשלים אותן לבסיס ונחליף את R_i בשורה המתאימה והגדלנו את הדרגה ל- n .

נראה שמתקיים מה שרצינו.

אם אחת מהן מדרגה $n-1$ והשנייה n , או שהצלחנו להפוך את שתיהן להפיכות (מקרה 1) או שזאת מדרגה $n-1$ ירדה לדרגה $n-2$ ולפחות אחת מהן מדרגה לכל היותר $n-2$ (מקרה 2).

אם שתיהן מדרגה $n-1$, שתיהן עלו לדרגה n והן הפיכות (מקרה 1) או שאחת מהן ירדה לדרגה נמוכה מ-2 (מקרה 2).

בכל אופן, מהמקרים הקודמים נסיק כי $\text{adj}(A'B') = \text{adj}(B') \cdot \text{adj}(A')$ לסיים, נרצה להראות

$$[\text{adj}(A'B')]_{ji} = [\text{adj}(AB)]_{ji}$$

$$[\text{adj}(B') \cdot \text{adj}(A')]_{ji} = [\text{adj}(B) \cdot \text{adj}(A)]_{ji}$$

הטענה הראשונה נובעת מכך ש $(-1)^{i+j} [A'B']_{ij} = (-1)^{i+j} [AB]_{ij}$ כי בכפל המטריצות המקומות היחידים שמושפעים מהשורה i והעמודה j הם השורה i והעמודה j בתוצאה. כאשר מסירים אותם (מינור), הכפלים זהים וכך הדטרמיננטות. הטענה השנייה נובעת מהעובדה

$$R_j(\operatorname{adj}(B')) \cdot C_i(\operatorname{adj}(A')) = R_j(\operatorname{adj}(B)) \cdot C_i(\operatorname{adj}(A))$$

זה נכון כי $(\operatorname{adj}(B'))_{jx} = (-1)^{j+x} (B')_{xj} = (-1)^{j+x} (B)_{xj} = (\operatorname{adj}(B))_{jx}$ כנ"ל ל' A .
כנדרש.

(ה) נניח $|A| \neq 0$ ונפעיל דטרמיננטה

$$|A| \cdot |\operatorname{adj}(A)| = |A \cdot \operatorname{adj}(A)| = ||A| \cdot I| = |A|^n$$

$$|\operatorname{adj}(A)| = |A|^{n-1}$$

עבור $|A| = 0$, גם $\operatorname{adj}(A)$ לא הפיכה ואז $|\operatorname{adj}(A)| = 0$.
(ו) מסעיף ד' היא הפיכה. עכשיו,

$$\operatorname{adj}(A^{-1}) \cdot \operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(I) = I$$

□

תרגיל 3.6. תהי $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ ונתון שהיא הפיכה ב $\mathbb{R}^{n \times n}$ (כלומר שיש מטריצה ממטית B כך $AB = BA = I$).
הוכיחו כי הפיכה ב $\mathbb{Q}^{n \times n}$.

פתרון. שימו לב, מטריצה הופכית היא יחידה. אז נראה להראות שאותה B היא בעצם מטריצה רציונאלית.
לפי המשפט, $B = \frac{\operatorname{adj}(A)}{|A|} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. עכשיו, נבחין כי $|A|, \operatorname{adj}(A)$ מורכבים מסכומים של מכפלות של איברי A שהם רציונאליים ונשאר רציונאלי. סך הכל $B \in \mathbb{Q}^{n \times n}$.

תרגיל 3.7. חשבו את $\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A))$.

פתרון. קודם כל, נניח A הפיכה (ומכאן $\operatorname{adj}(A)$ נשתמש במשפט עם $B = \operatorname{adj}(A)$ ונקבל

$$B \cdot \operatorname{adj}(B) = |B| \cdot I$$

$$\operatorname{adj}(A) \cdot \operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) = |\operatorname{adj}(A)| \cdot I$$

$$\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) = |A|^{n-1} \cdot I \cdot \operatorname{adj}(A)^{-1} = |A|^{n-1} \cdot \operatorname{adj}(A)^{-1}$$

$$\text{עכשיו, } \operatorname{adj}(A)^{-1} = \frac{A}{|A|} \text{ ונקבל}$$

$$\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) = |A|^{n-2} A$$

עכשיו, אם היא לא הפיכה - ניעזר בטענה לגבי הדרגה:

A לא הפיכה ולכן $\operatorname{rank}(A) < n$.

מהטענה מתקבל $\operatorname{rank}(\operatorname{adj}(A)) \leq 1$.

עכשיו אם $1 < n - 1$ (כלומר $n > 2$) מקבלים כי $\operatorname{rank}(\operatorname{adj}(A)) < n - 1$ ולפיכך

$$\operatorname{rank}(\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A))) = 0$$

כלומר, $\operatorname{adj}(A) = 0$.

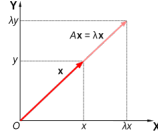
עבור $n = 2$ מתקבלים מקרי קצה, למשל עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ נקבל $\operatorname{adj}(A) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) = A \text{ ואז}$$

3.2 וקטורים עצמיים וערכים עצמיים

הגדרה 3.8. תהא מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

וקטור $v \in \mathbb{F}^n$, $v \neq 0$ יקרא וקטור עצמי אם קיים סקלר $\lambda \in \mathbb{F}$ כך שעבורו $Av = \lambda v$. במקרה כזה, λ ייקרא הערך העצמי.



וקטור עצמי של טרנספורמציה או מטריצה הוא וקטור שעבורו הטרנספורמציה או המטריצה מתנהגים כמו סקלר. אינטואיטיבית, השפעת הטרנספורמציה על וקטור עצמי היא "כיווץ" או "מתיחה" של הוקטור, מבלי ש"תזיז" או "תעקם" אותו.

הערה 3.9. שימו לב - למה וקטור האפס לא מורשה להיות וקטור עצמי אבל הסקלר אפס יכול להיות ערך עצמי? מה המשמעות של ערך עצמי אפס?

תרגיל 3.10. מצאו ו"ע וע"ע למטריצות הבאות:

(א) מטריצת האפס, מטריצת היחידה.

(ב) הכלילו למטריצה סקלרית αI .

פתרון.

(א) מטריצת האפס $0_{n \times n}$ מקיימת כי לכל $v \neq 0$

$$0_{n \times n} v = 0 \cdot v$$

כלומר כל וקטור (פרט לאפס) הוא וקטור עצמי יחד עם ערך עצמי 0.

במטריצת היחידה $I \cdot v = 1 \cdot v$, כל וקטור (פרט לאפס) הוא וקטור עצמי יחד עם ערך עצמי 1.

(ב) באותו אופן, $(\alpha I_n) v = \alpha v$.

סעיה 3.11. הוכיחו את הבאים:

(א) אם v ו"ע עם ע"ע λ אזי כל כפל שלו בסקלר αv הוא ו"ע עם ע"ע λ גם כן.

(ב) אם v_1, v_2 ו"ע של ע"ע λ , גם $v_1 + v_2$.

(מהטענות לעיל נובע שהמרחב עצמי הוא ת"מ, ישנו מקרה קצה שוקטור האפס הוא לא

ו"ע ולכן מוסיפים אותו כדי לקבל תת-מרחב).

(ג) אם λ ערך עצמי של A , אזי λ^n ערך עצמי של A^n .

פתרון.

(א)

$$A(\alpha v) = \alpha(Av) = \alpha \lambda v = \lambda(\alpha v)$$

(ב)

$$A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$$

(ג) קיים $v \neq 0$ כך ש $Av = \lambda v$.

$$A^n v = A^{n-1} Av = A^{n-1} \lambda v = \lambda A^{n-1} v$$

$$= \lambda A^{n-2} (Av) = \lambda^2 A^{n-2} v = \dots = \lambda^n v$$

פורמלית, באינדוקציה.

תרגיל 3.12

(א) תהי מטריצה שכל השורות שלה מסתכמות ל α , הראו כי α ערך עצמי.

(ב) תהי מטריצה שכל העמודות שלה מסתכמות ל α , הראו כי α ערך עצמי.

פתרון.

$$(א) \text{ נכפול בוקטור } \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ב) ניעזר בטענה (שנוכיח בהמשך) כי ל- A, A^t אותם ערכים עצמיים.

ראינו תכונות ודוגמאות בסיסיות של ערכים ווקטורים עצמיים. נשאלת השאלה כיצד מוצאים אותם?

ניסיון למצוא אותם ישירות (ראו בדוגמה הבאה) לא נוח...
נרצה לפתח (בתרגול הבא) דרך יעילה למצוא אותם.

$$דוגמה 3.13. \text{ מצאו ו"ע וע"ע עבור } A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{יהי } v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0, \text{ נדרוש}$$

$$Av = \lambda v$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x + 6y \\ 6x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x + 6y = \lambda x \\ 6x + 3y = \lambda y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6y = (\lambda - 3)x \\ 6x = (\lambda - 3)y \end{cases} \Rightarrow$$

מהמשוואה השנייה נקבל כי $x = \frac{(\lambda-3)}{6}y$, נציב במשוואה הראשונה:

$$6y = (\lambda - 3) \frac{(\lambda - 3)}{6} y$$

$$36y = (\lambda - 3)^2 y$$

אפשר לקבל באופן דומה גם

$$36x = (\lambda - 3)^2 x$$

בגלל שהוקטור $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ שונה מאפס, לפחות אחת הקואורדינטות שלו שונות מאפס.
באחת המשוואות חייב להתקיים:

$$36 = (\lambda - 3)^2$$

כלומר $\lambda = 9, -3$.

עבור $\lambda = -3$ נקבל

$$\begin{cases} 6y = (-3 - 3)x \\ 6x = (-3 - 3)y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6y = -6x \\ 6x = -6y \end{cases} \Rightarrow$$

כלומר בע"ע -3 , צריך $x = -y$.

במילים אחרות הו"ע עבור -3 הם $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

עבור $\lambda = 9$ נקבל

$$\begin{cases} 6y = (9-3)x \\ 6x = (9-3)y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6y = 6x \\ 6x = 6y \end{cases} \Rightarrow x = y$$

אז הו"ע המתאימים לע"ע 9 יהיו $\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

4 תרגול 4

4.1 מציאת וקטורים וערכים עצמיים

הגדרה 4.1. יהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי של המטריצה A , המרחב העצמי של λ הוא

$$V_\lambda = \{v \in \mathbb{F}^n : Av = \lambda v\}$$

כלומר, אנחנו מחפשים פתרונות למערכת

$$Av = \lambda v$$

$$(A - \lambda I)v = 0$$

$$V_\lambda = N(A - \lambda I)$$

המרחב העצמי הוא אוסף כל הוקטורים העצמיים המתאימים לערך העצמי, יחד עם וקטור האפס (שאינו וקטור עצמי לפי ההגדרה). מתכונות שראינו נובע שזהו תת-מרחב וקטורי.

נותר להבין כיצד מוצאים ערכים עצמיים...

נשים לב לאבחנה הבאה: λ הוא ערך עצמי $\Leftrightarrow$ קיים $v \neq 0$ כך ש $Av = \lambda v \Leftrightarrow$ קיים פתרון לא טריוויאלי למערכת $(A - \lambda I)v = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I) \Leftrightarrow$ לא הפיכה $\Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0$.

הגדרה 4.2. הפולינום האופייני של מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ היא הפולינום $p_A(\lambda) = |\lambda I - A|$ נובע כי השורשים שלו הם הערכים העצמיים.

הריבוי האלגברי של ע"ע λ הוא המעריך של $(x - \lambda)$ בפולינום האופייני, הריבוי הגיאומטרי הוא מימד המרחב העצמי $\dim V_\lambda$.

טענה 4.3. לכל ערך עצמי הריבוי האלגברי גדול או שווה לריבוי הגיאומטרי.

דוגמה 4.4. נסתכל על המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, נמצא לה וקטורים עצמיים וערכים עצמיים.

$$p_A(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 5 & -5 \\ 0 & 0 & \lambda - 6 \end{pmatrix} \right| = (\lambda - 1)(\lambda - 5)(\lambda - 6)$$

כלומר הע"ע הם 1, 5, 6.
עבור הע"ע 1 נקבל

$$V_1 = N(1 \cdot I - A) = N \begin{pmatrix} 1-1 & 1 & -1 \\ 0 & 1-5 & -5 \\ 0 & 0 & 1-6 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ מקבלים} \\ \text{עבור הע"ע 5 נקבל:}$$

$$V_5 = N(5 \cdot I - A) = N \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$V_5 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ \text{עבור הע"ע 6, נקבל}$$

$$N \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_6 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 25 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

תרגיל 4.5. הוכיחו כי ל- A, A^T אותם ערכים עצמיים וריבויים אלגבריים.

הוכחה. נראה שהפולינום האופייני שווה

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = |(\lambda I - A)^T| = |\lambda I^T - A^T| = |\lambda I - A^T| = p_{A^T}(\lambda)$$

□

תרגיל 4.6. הוכיחו כי מטריצה A היא הפיכה אם ורק אם 0 לא ערך עצמי.

פתרון. A הפיכה $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow |0 \cdot I - A| \neq 0 \Leftrightarrow 0$ לא שורש של הפולינום האופייני, כלומר ערך עצמי.

תרגיל 4.7. מטריצה A תקרא נילפוטנטית אם קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש- $A^k = 0$. מה הם הערכים העצמיים של מטריצה נילפוטנטית?

פתרון. יהי λ ערך עצמי של A אזי λ^k הוא ערך עצמי של A^k עם אותו הוקטור העצמי $v \neq 0$ (ראינו).

$$\lambda^k v = A^k v = 0 \cdot v$$

לכן, $\lambda^k = 0$ ולכן $\lambda = 0$.

הראינו שאם קיים ערך עצמי הוא חייב להיות אפס, נותר להראות שאפס הוא תמיד וקטור עצמי.

$$|0 \cdot I - A| = |-A| = -|A| = -\sqrt[k]{|A|^k} = -\sqrt[k]{|A^k|} = 0$$

כנדרש.

תרגיל 4.8. תהי A מטריצה מסדר 3×3 המקיימת

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -9 \end{pmatrix}$$

מצאו את ה"ע והע"ע של המטריצה.

פתרון.

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

כלומר,

$$\begin{aligned} & -3 \text{ הוא ע"ע יחד עם ה"ע } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \\ & 1 \text{ הוא ע"ע יחד עם ה"ע } \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

נשאלת השאלה - האם מצאנו את כל הע"ע? האם מצאנו את כל הו"ע?
מהנתונים נסיק:

$$\begin{aligned} V_{-3} &\supseteq \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \\ V_1 &\supseteq \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

נשים לב שלע"ע -3 יש ריבוי גיאומטרי לפחות 2, ולע"ע 1 יש ריבוי גיאומטרי לפחות 1.
לכן, הריבויים האלגבריים שלהם לפחות 2, 1, וסכומם 3 (שזו המעלה של הפולינום האופייני).

לכן, אין עוד ערכים עצמיים ועבור הערכים העצמיים שמצאנו, החסמים התחתונים על הריבויים הגיאומטריים הדוקים ויש שיוויון. כנדרש.

תרגיל 4.9. נתונה מטריצה A מסדר 3×3 ובנוסף נתון כי

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ -15 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

כמו כן, ידוע גם כי $\text{rank}(-3I - A) = 1$.
מצאו את הפולינום האופייני של A .

פתרון.

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ממשפט הדרגה, $\dim V_{-3} = \dim N(-3I - A) = 3 - 1 = 2$.

כלומר, הריבוי הגיאומטרי של -3 הוא 2.

הריבוי הגיאומטרי של -5 הוא לפחות 1, לכן בדיוק 1 (כי אז סכום הריבויים האלגבריים

היה עולה על 1).

ולכן הריבויים האלגבריים שווים לגיאומטריים והפולינום האופייני הוא בדיוק

$$(x+3)^2(x+5)$$

4.2 דמיון מטריצות

הגדרה 4.10. (דמיון מטריצות) מטריצות ריבועיות A, B מגודל $n \times n$ יקראו דומות אם קיימת מטריצה P ריבועית והפיכה כך ש $A = P^{-1}BP$.

תרגיל 4.11. הראו כי דמיון מטריצות הוא יחס שקילות. מהי מחלקת השקילות של αI לכל $\alpha \in \mathbb{R}$?

פתרון. נראה כי זהו יחס שקילות (רפלקסיביות, סימטריות, טרנזיטיביות)

$$A = I^{-1}AI$$

$$A = P^{-1}BP \Rightarrow B = PAP^{-1} = (P^{-1})^{-1}A(P^{-1})$$

$$A = P^{-1}BP, B = Q^{-1}CQ \Rightarrow A = (QP)^{-1}C(QP)$$

עכשיו, מטריצה A דומה ל αI אם ורק אם

$$P^{-1}(\alpha I)P = A$$

$$\alpha I = A$$

כלומר, מחלקת השקילות של αI זו היא בעצמה.

תרגיל 4.12. למטריצות דומות אותם ערכים עצמיים (כולל ריבוי אלגברי) וריבויים גיאומטריים. מה הקשר בין הוקטורים העצמיים?

פתרון. יהיו A, B דומות, לכן קיימת P כך ש $B = P^{-1}AP$. נראה קודם שהפולינום האופייני זהה:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= |A - \lambda I| = |P^{-1}| \cdot |A - \lambda I| \cdot |P| = |P^{-1}(A - \lambda I)P| \\ &= |P^{-1}AP - P^{-1}(\lambda I)P| = |P^{-1}AP - \lambda I| = p_B(\lambda) \end{aligned}$$

לכן, יש אותם ערכים עצמיים וריבויים אלגבריים.

נותר להראות שיש אותם ריבויים אלגבריים.

יהי λ ע"ע של A, B .

$$\dim N(\lambda I - A)$$

עכשיו כפל במטריצה הפיכה לא משנה את הדרגה

$$= \dim N(P^{-1}(\lambda I - A)P) = \dim N(\lambda I - P^{-1}AP) = \dim N(\lambda I - B)$$

כנדרש.

נעיר גם שהקשר בין הוקטורים העצמיים הוא כזה: v וקטור עצמי של A אם ורק אם $P^{-1}v$ הוא וקטור עצמי של B .

אכן, אם v וקטור עצמי של A יחד עם ערך עצמי λ נקבל

$$B(P^{-1}v) = P^{-1}BP^{-1}v = P^{-1}(PBP^{-1})v = P^{-1}Av = \lambda P^{-1}v$$

בכיוון השני, אם $P^{-1}v$ וקטור עצמי של B אזי

$$Av = (PBP^{-1})v = P(B(P^{-1}v)) = P(\lambda P^{-1}v) = \lambda PP^{-1}v = \lambda v$$

הגדרה 4.13. מטריצה A תקרא לכסינה אם היא דומה למטריצה אלכסונית, כלומר קיימת מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $D = P^{-1}AP$ או באופן שקול $A = PDP^{-1}$.

4.3 מוטיבציה ללכסון - העלאת מטריצה בחזקה

העלאת מטריצה בחזקה גבוהה היא פעולה יחסית קשה, מסורבלת ודורשת המון חישובים.

תהי A שנרצה להעלות בחזקת m ונניח כי היא לכסינה, כלומר, קיימת

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

וכן P כך ש $A = PDP^{-1}$ מקבלים

$$A^m = (PDP^{-1})^m = \cancel{PDP^{-1}} \cancel{PDP^{-1}} \dots \cancel{PDP^{-1}}$$

$$= PD^m P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^m \end{pmatrix} P^{-1}$$

דוגמה 4.14. (מציאת נוסחה סגורה לנוסחת פיבונאצ'י) סדרת פיבונאצ'י מוגדרת להיות

$$F_{n+1} = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ F_n + F_{n-1} & \text{otherwise} \end{cases}$$

אפשר לכתוב בכתוב מטריוני

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n + F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$$

אבל באופן דומה

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} \\ &= \dots = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

נקבל כי

$$F_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

נראה בהמשך כי A היא בעצם לכסינה (נראה איך למצוא את הצורה האלכסונית והמטריצה המלכסנת בהמשך) ונקבל

$$F_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left((PDP^{-1})^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

עבור

$$D = \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \sqrt{\phi} & -\sqrt{-\psi} \\ \sqrt{-\psi} & \sqrt{\phi} \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\phi} & \sqrt{-\psi} \\ -\sqrt{-\psi} & \sqrt{\phi} \end{pmatrix}$$

כאשר $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

לבסוף מקבלים

$$\begin{aligned} F_n &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left((PDP^{-1})^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} (PD^n P^{-1}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\phi} & -\sqrt{-\psi} \\ \sqrt{-\psi} & \sqrt{\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^n & 0 \\ 0 & \psi^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\phi} & \sqrt{-\psi} \\ -\sqrt{-\psi} & \sqrt{\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi^n - \psi^n) \end{aligned}$$

5 תרגול 5

5.1 אלגוריתם ללכסון

טענה 5.1. (קריטריון ללכסון)

- (1) $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ היא לכסינה אם ורק אם קיים $\mathbb{F}^n$ בסיס המורכב מוקטורים עצמיים של A .
- (2) נניח שהפולינום האופייני של $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מתפרק לגורמים לינאריים, אזי היא לכסינה אם ורק אם לכל ערך עצמי הריבוי הגיאומטרי והאלגברי שווים.
- בפרט, אם יש n ערכים עצמיים שונים אזי היא לכסינה.

5.2 אלגוריתם ללכסון מטריצות

- (1) נמצא ערכים עצמיים של המטריצה A (בעזרת הפולינום האופייני).
- (2) מוצאים בסיס לפרחבים העצמיים $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}$ (משווים ריבויים אלגבריים וגיאומטריים לזיוזא לכסינות).
- (3) המטריצה D מוגדרת להיות $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ של הערכים העצמיים כולל ריבויים.
- (4) מגדירים את עמודות P להיות הוקטורים העצמיים המתאימים.

תרגיל 5.3. מטריצה שיש לה ערך עצמי יחיד ואינה סקלרית אינה לכסינה.

פתרון. ראינו כי αI דומה רק לעצמה.

אילו הייתה A עם ערך עצמי יחיד α לכסינה, הייתה צריכה להיות דומה ל αI .
דרך נוספת - $\dim N(\alpha I - A) < n$ כי זו לא מטריצת האפס.

דוגמה 5.4. נלכסן את $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 2 \\ 11 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

הפולינום האופייני הוא

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det \begin{pmatrix} x+1 & 0 & 0 \\ -7 & x-3 & -2 \\ -11 & -2 & x-3 \end{pmatrix} = (x+1) \det \begin{pmatrix} x-3 & -2 \\ -2 & x-3 \end{pmatrix} \\ &= (x+1) \left((x-3)^2 - (-2 \cdot -2) \right) = (x+1) (x^2 - 6x + 5) = (x+1) (x-5) (x-1) \end{aligned}$$

יש 3 ע"ע $(-1, 1, 5)$ לכן בוודאות לכסינה.

$$V_{-1} = N(-1 \cdot I - A) = N \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -7 & -4 & -2 \\ -11 & -2 & -4 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 2 \\ 11 & 2 & 4 \end{pmatrix} \stackrel{R_3 - 2R_2}{=} N \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 2 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

הפתרון הוא $\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$
נעבור לע"ע 1,

$$V_1 = N \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -7 & -2 & -2 \\ -11 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

הפתרון הוא $\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$
נעבור לע"ע 5,

$$V_5 = N \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & -2 \\ -11 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

הפתרון הוא $\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
לכן

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

תרגיל 5.5. מצאו עבור אילו ערכי a המטריצה הבאה לכסינה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון. ההפולינום האופייני הוא

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det \begin{pmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ -1 & x & -a^2 \\ -1 & -4 & x \end{pmatrix} = (x-2) \det \begin{pmatrix} x & -a^2 \\ -4 & x \end{pmatrix} = (x-2)(x^2 - 4a^2) \\ &= (x-2)(x-2a)(x+2a) \end{aligned}$$

הערכים העצמיים הם $2, 2a, -2a$

נשים לב שאם $a \neq 1, -1, 0$ אזי יש שלושה ערכים עצמיים שונים ולכסינה.

אבל עבור $a = \pm 1$ המטריצה היא $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ יחד עם פולינום אופייני $(x-2)^2(x+2)$
רק צריך לבדוק שהריבוי הגיאומטרי של 2 הוא 2.

$$N(2I - A) = N \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{R_3 + 2R_2}{=} N \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הפתרון הוא $\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, אבל המימד הוא 1 ולא 2 לכן לא לכסינה במקרה $a = \pm 1$.

עבור $a = 0$ המטריצה היא $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ יחד עם פולינום אופייני $x^2(x-2)$.
צריך לבדוק שהריבוי הגיאומטרי של 0 הוא 2

$$N(0I - A) = N \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

מהמשוואה הראשונה $x_1 = 0$.
מהמשוואה השלישית $-x_1 - 4x_2 = 0$ אזי גם $x_2 = 0$ ורק x_3 חופשי.
לכן הריבוי הגיאומטרי הוא 1 ולא 2 והיא לא לכסינה במקרה הזה.
סך הכל לכסינה אם ורק אם $a \neq 0, -1, 1$.

תרגיל 5.6. תהא A מטריצה מעל המרוכבים עם פולינום אופייני $p_A(x) = x^3 - 2ix^2 + 3x$.
חשבו את $\text{rank}(A^k)$ לכל k .

פתרון. הפ"א של A הוא מדרגה 3, לכן $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$. בנוסף

$$p_A(x) = x(x^2 - 2ix + 3) = x(x - 3i)(x + i)$$

לכן, יש לה 3 ערכים עצמיים $0, 3i, -i$ והיא לכסינה.

$$\text{נכתוב } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (3i)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-i)^k \end{pmatrix} = (P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$$

עכשיו, $\text{rank}(P^{-1}A^kP) = 2$ וכפל בהופכית לא משנה דרגה, נקבל $\text{rank}(A^k) = 2$.

תרגיל 5.7. בעיר מסוימת יש מאה לקוחות פוטנציאלים, שתי מאפיות מתחרות: מאפית דנה ומאפית אנטולי.

כיום למאפית דנה יש 30 לקוחות, לאנטולי יש 70 לקוחות.
משרד פרסום מציע לפתוח בקמפיין פרסום בטיקטוק שמשפיע על הלקוחות באופן הבא (מסטיטיסטיקות קודמות ידועות):
90% מהלקוחות של מאפית דנה נשארים אצלה (10% מאוכזבים מהקמפיין ועוזבים למתחרים),
20% מהלקוחות של מאפית אנטולי עוברים אליה (80% נשארים נאמנים למתחרים).
כמה לקוחות יהיו למאפית דנה אחרי שבוע? אחרי n שבועות?

פתרון. אפשר לתאר באמצעות כפל מטריצות.
אחרי חודש אחד מקבלים

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ 59 \end{pmatrix}$$

אחרי n חודשים מקבלים

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 30 \\ 70 \end{pmatrix}$$

נסמן את המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$, נרצה להעלות בחזקה. בעזרת לכסון:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7/10 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

מקבלים

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 30 \\ 70 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7/10 \end{pmatrix}^n \left(\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 30 \\ 70 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (7/10)^n \end{pmatrix} \left(\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 30 \\ 70 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 200 - 110 \left(\frac{7}{10} \right)^n \\ 100 + 110 \left(\frac{7}{10} \right)^n \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} \frac{200}{3} \\ \frac{100}{3} \end{pmatrix} \text{ כאשר } n \rightarrow \infty \text{ מקבלים את הוקטור} \end{aligned}$$

5.2 ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים ולכסון של העתקות

באופן אנלוגי לוקטורים עצמיים, ערכים עצמיים, לכסון של מטריצות:

הגדרה 5.8. יהי V מרחב וקטורי ותהא $T : V \rightarrow V$ העתקה לינארית. אם קיים $v \in V$, $v \neq 0$ וסקלר λ כך שמתקיים $Tv = \lambda v$ אזי נקרא λ ערך עצמי של T וקטור עצמי של T השייך לערך העצמי λ .

טענה 5.9. שימו לב - הערכים העצמיים של $[T]_B$ (עבור בסיס B כלשהו) הם הע"ע של T .
כזכור מלינאריות 1, הוקטורים העצמיים של $[T]_B$ הם וקטורי הקואורדינטות לפי הבסיס B של T .

הגדרה 5.10. $T : V \rightarrow V$ היא לכסינה אם קיים בסיס $\{b_1, \dots, b_n\}$ של V כך ש T פועלת על רכיביו כמו כפל בסקלר.
כלומר, קיימים סקלרים $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ כך שמתקיים $Tb_i = \lambda_i b_i$.

טענה 5.11. העתקה לינארית היא לכסינה אם ורק אם קיימת לה מטריצה מייצגת לכסינה, במקרה כזה - כל מטריצה מייצגת שלה לכסינה.
כזכור, לכל שני בסיסים B, C

$$[T]_C^C = [I]_C^B [T]_B^B [I]_B^C$$

אז לכל בסיס B לבחירתנו (בדרך כלל, נבחר את הסטנדרטי), נמצא $[T]_B$.
נלכסן כמטריצה - כלומר נמצא ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים (לפי B ואז נכפול באיברי הבסיס).
אם המטריצה לכסינה, הבסיס המתאים (המורכב מהוקטורים העצמיים) הוא מלכסן.

דוגמה 5.12. נגדיר $B = \{1 + x, x, x^2\}$ בסיס למרחב $\mathbb{R}_2[x]$. נגדיר

$$T(1 + x) = -1 + x^2$$

$$T(x) = 1 + x^2$$

$$T(x^2) = 1 + 2x - x^2$$

נרצה ללכסן אותה.

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

הפולינום האופייני הוא $(\lambda + 2)^2(\lambda - 1)$.
 עכשיו $[V_{-2}]_B = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, $[V_1]_B = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
 כלומר,

$$V_1 = \text{span} \{1 + 2x + x^2\}, V_{-2} = \text{span} \{1 + x - x^2, x - x^2\}$$

הריבויים האלגבריים והגיאומטריים שווים.
 לכן, הבסיס המלכסן הוא $C = \{1 + 2x + x^2, 1 + x - x^2, x - x^2\}$ ונקבל

$$[T]_C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.3 תת-מרחב שמור (אינווריאנטי)

הגדרה 5.13. תת מרחב שמור של העתקה לינארית T הוא תת-מרחב וקטורי שההעתקה T שולחת את הוקטורים שלו בחזרה לעצמו $(T[W] \subseteq W)$.
 כלומר, $\forall w \in W, Tw \in W$.

אם W תת-מרחב שמור של T אזי ניתן לצמצם את T לתת-המרחב W ולקבל $T|_W : W \rightarrow W$.

דוגמה 5.14. בתרגיל הבית נתבקשתם להראות שאם קיים v עבורו $T^n v = v$ וכמו כן $\{v, Tv, \dots, T^{n-1}v\}$ בת"ל,
 אזי $W = \text{span} \{v, Tv, \dots, T^{n-1}v\}$ הוא T -אינווריאנטי, לכן אפשר לצמצם את ההעתקה אליו ולהראות תכונות של הערכים והוקטורים העצמיים (שקשורות בשורשי היחידה של השדה).

תרגיל 5.15. תהי $T : V \rightarrow V$ העתקה לינארית, U, W תתי-מרחבים אינווריאנטים. הוכיחו:
 (א) $\text{im} T$ הוא גם T -אינווריאנטי.
 (ב) $\ker T$ הוא גם T -אינווריאנטי.
 (ג) $U \cap W$ הוא גם T -אינווריאנטי.
 (ד) $U + W$ הוא גם T -אינווריאנטי.

פתרון.

(א) לכל $v \in \text{im} T$, מתקיים כי $Tv \in \text{im} T$.
 (ב) לכל $v \in \ker T$, מתקיים כי $Tv = 0_V \in \ker T$.
 (ג) לכל $v \in U \cap W$ מתקיים $Tv \in U, Tv \in W$ (כי שניהם T -אינווריאנטים) ולכן $Tv \in U \cap W$.
 (ד) לכל $v \in U + W$ אפשר לכתוב $v = u + w$ (עבור $u \in U, w \in W$) ונקבל

$$Tv = T(u + w) = T(u) + T(w)$$

אבל $Tu \in U, Tw \in W$ מאינווריאנטיות ולכן

$$Tv \in U + W$$

תרגיל 5.16. תהי $T : V \rightarrow V$ העתקה לינארית.

הוכיחו או הפריכו:

- (א) אם $U \leq V$ ת"מ T -אינווריאנטי אז כל ת"מ $W \leq U$ הוא T -אינווריאנטי.
 (ב) אם λ ע"ע של T , V_λ המרחב העצמי המתאים לו, אז כל ת"מ $W \leq V_\lambda$ הוא T -אינווריאנטי.

פתרון.

- (א) הטענה לא נכונה, נבחר $U = V$. ברור כי הוא אינווריאנטי, לא בהכרח כל תת-מרחב שלו אינווריאנטי.

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \text{ לפי המוגדרת לפי}$$

ברור כי $\mathbb{R}^2$ הוא אינווריאנטי אבל $\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ הוא לא אינווריאנטי כי

$$T \left[\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right] = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- (ב) הטענה נכונה, יהי ת"מ $W \leq V_\lambda$.

לכל $w \in W$ מתקיים כי $w \in V_\lambda$ ולפיכך $Tw = \lambda w$.
 עכשיו $Tw \in W$ כי יש סגירות לכפל בסקלר.

5.4 מטריצת בלוקים

מטריצת בלוקים היא מטריצה שחולקה למספר חלקים שגם הם מטריצות.

$$\begin{pmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{m1} & \cdots & X_{mn} \end{pmatrix}$$

חיבור, כפל בסקלר וכפל מטריצות בלוקים מתנהגים בצורה אנלוגית לחיבור, כפל בסקלר וכפל מטריצות כאשר הפעולות מתבצעות על הבלוקים. כלומר,

$$c \cdot \begin{pmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{m1} & \cdots & X_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cX_{11} & \cdots & cX_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cX_{m1} & \cdots & cX_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{m1} & \cdots & X_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{m1} & \cdots & Y_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} + Y_{11} & \cdots & X_{1n} + Y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{m1} + Y_{m1} & \cdots & X_{mn} + Y_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{m1} & \cdots & X_{mt} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{t1} & \cdots & Y_{tn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{s=1}^t X_{1s}Y_{sn} & \cdots & \sum_{s=1}^t X_{1s}Y_{sn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{s=1}^t X_{ms}Y_{s1} & \cdots & \sum_{s=1}^t X_{ms}Y_{sn} \end{pmatrix}$$

מטריצת בלוקים תקרא אלכסונית אם על האלכסון שלה מוצבים בלוקים, שהם גם מטריצות (מסדר נמוך יותר) וכל שאר ערכי המטריצה הם אפסים, למשל,

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

נשים לב כי העלאה בחזקה של מטריצת בלוקים אלכסונית היא העלאה בחזקה של מטריצות על האלכסון.

כלומר, ישנן הרבה מטריצות שאינן לכסיניות, אבל יש תקווה לפרק אותן לבלוקים אלכסוניים ולבצע העלאה בחזקה על בלוקים קטנים יותר. בזה נעסוק בחלק הבא של הקורס.

ספציפית, אנחנו נראה כי צורת ז'ורדן מכילה את המטריצות האלכסוניות והיתרון שלה הוא שמעל שדה סגור אלגברית (כמו $\mathbb{C}$) לכל מטריצה יש צורת ז'ורדן, בעוד שלא כל המטריצות לכסיניות.

נהוג לכתוב $A_1 \oplus \dots \oplus A_k$, כאשר מציבים את המטריצות $A_1, \dots, A_n$ באלכסון של מטריצה אלכסונית בלוקים (לפי הסדר).

טענה 5.17. חלק מן הפעולות הטבעיות על מטריצות ניתן לבצע בכל בלוק בנפרד:
(א) עקבה -

$$\text{tr}(A_1 \oplus \dots \oplus A_k) = \text{tr}(A_1) + \dots + \text{tr}(A_k)$$

(ב) דטרמיננטה -

$$\det(A_1 \oplus \dots \oplus A_k) = \det(A_1) \cdots \det(A_k)$$

(ג) מטריצה הופכית -

$$(A_1 \oplus \dots \oplus A_k)^{-1} = A_1^{-1} \oplus \dots \oplus A_k^{-1}$$

הוכחה.

(א) העקבה היא סכום איברי האלכסון, קל לראות שאלכסון מטריצה בלוקים הוא אלכסוני מטריצות הבלוקים ומאסוציאטיביות מסיימים.

(ב) בהינתן $A_1, \dots, A_k$, אפשר לכתוב מכפל בלוקים

$$(A_1 \oplus \dots \oplus A_k)$$

$$= (A_1 \oplus I_2 \oplus I_3 \oplus \dots \oplus I_k) (I_1 \oplus A_2 \oplus I_3 \oplus \dots \oplus I_k) \cdots (I_1 \oplus I_2 \oplus I_3 \oplus \dots \oplus A_k)$$

עכשיו מכפלות דטרמיננטה

$$\det[(A_1 \oplus \dots \oplus A_k)] = \det[(A_1 \oplus I_2 \oplus I_3 \oplus \dots \oplus I_k)] \cdots \det[(I_1 \oplus I_2 \oplus I_3 \oplus \dots \oplus A_k)]$$

קל לראות שהדטרמיננטה של כל אחת מהן היא הדטרמיננטה של A_i המתאימה לה (מבצעים לפלס על השורות שמתאימות ל I , מקבלים מינור שהוא בדיוק A_i מסימן חיובי).
(ג) קל לראות מכפל בלוקים

$$(A_1 \oplus \dots \oplus A_k) (A_1^{-1} \oplus \dots \oplus A_k^{-1}) = I$$

□

הערה 5.18. שימו לב - זה נכון גם להגיד שהדטרמיננטה של משולשית בלוקים היא מכפלת הדטרמיננטות.

נדגים עבור שני בלוקים (משם מכלילים באינדוקציה),

$$\left| \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right| \cdot \left| \begin{bmatrix} I & 0 \\ C & I \end{bmatrix} \right| \cdot \left| \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \right|$$

קל לראות כי $|A|$ (בפיתוח לפלס לפי השורות האחרונות)

כמו כן $|D| = \left| \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \right|$, ולבסוף $\left| \begin{bmatrix} I & 0 \\ C & I \end{bmatrix} \right| = 1$ כי היא משולשית (לכן מכפלת איברי האלכסון).

נובע גם כי הפולינום האופייני של משולשית בלוקים הוא מכפלת הפולינום האופייניים

$$\begin{aligned} \left| \lambda I - \begin{pmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & X_{nn} \end{pmatrix} \right| &= \left| \begin{pmatrix} \lambda I_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda I_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & X_{nn} \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} \lambda I_{11} - X_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda I_{nn} - X_{nn} \end{pmatrix} \right| = |\lambda I_{11} - X_{11}| \cdots |\lambda I_{nn} - X_{nn}| = p_{X_{11}}(\lambda) \cdots p_{X_{nn}}(\lambda) \end{aligned}$$

הגדרה 5.19. (תזכורת) יהי V מ"ו, $U_1, \dots, U_k \leq V$ תתי-מרחבים.

הסכום $W = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ הוא ישר אם לכל $1 \leq i \leq k-1$ מתקיים כי הסכום

$$(U_1 + \dots + U_i) \cap U_{i+1} = \{0\}$$

וגם $U_1 + \dots + U_k = W$.

טענה 5.20. יהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור.

יהי $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ סכום ישר של תתי-מרחבים שמורים ולכל $1 \leq i \leq k$ יהי B_i

בסיס של U_i . נסמן $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$ אזי

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T]_{B_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [T]_{B_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [T]_{B_k} \end{pmatrix}$$

מצד שני,

$$[T]_B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{pmatrix}$$

אם $[T]_B$ מטריצה אלכסונית בלוקים, אזי יש חלוקה של B לאיחוד זר

$U_i = \text{span} B_i$ תת-המרחב $1 \leq i \leq k$ של כל $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$ כך שלכל

אינווריאנטי וכן $[T]_{B_i} = A_i$.

הערה הסימון $[T]_{B_i}$ היא המטריצה המייצגת של $T|_{U_i}$.

הוכחה.

(1) באינדוקציה על k .

עבור $k = 1$ זה טריוויאלי.

עבור $k = 2$, נניח $V = U_1 \oplus U_2$ עבור U_1, U_2 אינווריאנטיים, B_1, B_2 בסיסים של

U_1, U_2 וכן $B = B_1 \cup B_2$.

לכל $v \in B_1 \subseteq U_1$ מאינווריאנטיות $Tv \in U_1$ ולכן ניתן להצגה כצירוף לינארי של איברי

B_1 .

$$[Tv]_B = \begin{pmatrix} [Tv]_{B_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ על כן,}$$

$$[Tv]_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ [Tv]_{B_2} \end{pmatrix} \quad \text{בדומה עבור } B_2, \text{ לכל } v \in B_2 \text{ מתקיים}$$

עכשיו

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T]_{B_1} & 0 \\ 0 & [T]_{B_2} \end{pmatrix}$$

כנדרש.

נעבור לצעד האינדוקציה, נניח נכונות עבור $k-1$ תתי-מרחבים ונוכיח עבור k .
אפשר לכתוב $V = (U_1 \oplus \dots \oplus U_{k-1}) \oplus U_k$ וכן $B = (B_1 \cup \dots \cup B_{k-1}) \cup B_k$ מהמקרה $k=2$ נובע

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T]_{B_1 \cup \dots \cup B_{k-1}} & 0 \\ 0 & [T]_{B_k} \end{pmatrix}$$

מהנחת האינדוקציה

$$[T]_{B_1 \cup \dots \cup B_{k-1}} = \begin{pmatrix} [T]_{B_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & [T]_{B_{k-1}} \end{pmatrix}$$

ולבסוף

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T]_{B_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [T]_{B_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & [T]_{B_k} \end{pmatrix}$$

כנדרש.

(2) שוב, $k=1$ טריוויאלי. נוכיח עבור $k=2$ (שוב נובע באינדוקציה)
נניח $[T]_B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, נחלק את הבסיס B לפי גדלי A_1, A_2 לבסיסים

$$B_1 = \{v_1, \dots, v_m\}, B_2 = \{v_{m+1}, \dots, v_n\}$$

נגדיר גם $U_1 = \text{span} B_1, U_2 = \text{span} B_2$

שאר ההוכחה מושארת כתרגיל.

□

6 תרגול 6

6.1 משפט קיילי-המילטון והפולינום המינימלי

הגדרה 6.1. (הצבת מטריצה בפולינום) יהי $p(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k$ פולינום. הצבת המטריצה A בפולינום היא מטריצה $f(A) = \sum_{k=0}^n \alpha_k A^k$.
פולינום $p(x) \neq 0$ נקרא מאפס של מטריצה ריבועית אם $p(A) = 0$ (מטריצת האפס).

דוגמה 6.2. המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ היא מטריצת פעולה של החלפת שורות $R_1 \leftrightarrow R_2$,

לכן היא ההופכית של עצמה ומתקיים $A^2 = I$.

לפיכך, $A^2 - I = 0$ ולכן $p(x) = x^2 - 1$ מאפס שלה.

משפט 6.3. (משפט קיילי-המילטון) הפולינום האופייני של A מאפס שלה: $p_A(A) = 0$.

דוגמה 6.4. בדוגמה 6.2, הפולינום האופייני הוא $x^2 - 1$ ואכן מאפס.

הגדרה 6.5. פולינום מינימלי $m_A(t)$ הוא הפולינום המתוקן בעל דרגה קטנה ביותר המאפס את A .

טענה 6.6. אם p מאפס את A אזי m_A מחלק אותו $(m_A|p)$.
כמסקנה, הפולינום המינימלי הוא יחיד והוא מחלק של הפולינום האופייני.
יתרה מכך, הפולינום המינימלי מכיל את כל הגורמים האי-פריקים של הפולינום האופייני.

הוכחה. יהי m_A פולינום מינימלי, כלומר לכל p מאפס של A מתקיים $\deg(m_A) \leq \deg(p)$.
עכשיו נרצה להראות כי $m_A|p$, נשים לב כי מחילוק פולינום עם שארית

$$p(x) = m_A(x) \cdot f(x) + r(x)$$

עבור r כך ש $\deg r < \deg m_A$. נקבל

$$r(x) = p(x) - m_A(x) \cdot f(x)$$

אבל

$$r(A) = p(A) - m_A(A) \cdot f(A) = 0$$

קיבלנו מאפס של A מדרגה קטנה משל הפולינום, לכן $r \equiv 0$, כנדרש.
כמסקנה, יהיו m_1, m_2 מינימליים, הם מתוקנים ולכן $m_1 - m_2$ מדרגה נמוכה מהן ומאפסת

$$m_1(A) - m_2(A) = 0 - 0 = 0$$

לכן $m_1 - m_2 = 0$.

לסיים, נראה כי כל שורש של p_A הוא שורש של m_A (הכיוון השני ברור כי הוא מחלק).
נבחין כי לכל v ו"ע יחד עם ו"ע λ מתקיים $p(A)v = p(\lambda)v$ $(A^k v = \lambda^k v)$.
עכשיו, נניח $p_A(\lambda) = 0$ אזי הוא ו"ע וקיים v כך שמתקיים $Av = \lambda v$, לכן $m_A(A)v = m_A(\lambda)v = 0$.
כלומר, $m_A(\lambda) = 0$, כנדרש. $\square$

דוגמה 6.7. נמצא את הפולינום המינימלי של $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

קודם כל, $p_A(x) = (x-1)^2(x-2)$ ולכן $m_A(x) \in \{(x-1)(x-2), (x-1)^2(x-2)\}$.
מהצבה מקבלים $m_A(x) = (x-1)(x-2)$.

טענה 6.8. (בהרצאה) מטריצות דומות בעלות פ"מ זהה.

תרגיל 6.9. תהי A מטריצה עם פ"מ $m_A(x) = (x-1)^2$, עבור הפולינום $f(x) = x^2 + 4x + 3$ הוכיחו כי $f(A)$ הפיכה.

פתרון. מתקיים $f(A) = (A+3I)(A+I)$, אם $f(A)$ לא הפיכה לפחות אחת מהן אינה הפיכה.

כלומר, -3 או -1 הם ע"ע. אבל $(x+3), (x+1)$ לא מופיעים ב m_A .

6.2 מרחבים עצמיים מוכללים

הגדרה 6.10. נסמן $n = \dim V$. לכל ערך עצמי λ של T נגדיר את המרחב העצמי המוכלל

$$K_\lambda = \ker (T - \lambda I)^n = \{v \in V : (T - \lambda I)^n v = 0\}$$

קבוצה מהצורה $E = \{v, Tv, \dots, T^{m-1}v\}$ כאשר $T^{m-1}v \neq 0$ וכן $T^m v = 0$ תקרא מסלול מאורך m .

דוגמה 6.11. עבור $T = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ והוקטור $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ מקבלים מסלול

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

טענה 6.12. (טענות בסיסיות)

(א) כל מסלול הוא קבוצה בת"ל.

(ב) $K_\lambda = \{v \in V : \exists k (T - \lambda I)^k v = 0\}$

(ג) $V_\lambda \subseteq K_\lambda$

(ד) K_λ אינווריאנטי תחת T .

(ה) אם $\lambda \neq \mu$ אזי $K_\lambda \cap K_\mu = \{0\}$.

הוכחה.

(א) נניח כי $\alpha_0 v + \alpha_1 T v + \dots + \alpha_m T^{m-1} v = 0$ נפעיל T^{m-1} על שני האגפים ונקבל

$$\begin{aligned} 0 &= T^{m-1}(0) = T^{m-1}(\alpha_0 v + \alpha_1 T v + \dots + \alpha_{m-1} T^{m-1} v) \\ &= \alpha_0 T^{m-1} v + \alpha_1 T^m v + \dots + \alpha_{m-1} T^{2m-2} v \\ &= \alpha_0 T^{m-1} v \end{aligned}$$

לכן, $\alpha_0 = 0$ כלומר

$$\alpha_1 T v + \dots + \alpha_{m-1} T^{m-1} v = 0$$

נפעיל T^{m-2} ונקבל $\alpha_1 = 0$

וכן הלאה...

(ב) קל לראות את ההכלה בכיוון $\subseteq$.

בכיוון השני, יהי k הקטן ביותר כך שעבורו $(T - \lambda I)^k v = 0$. אזי

$$(T - \lambda I)^{k-1} v, \dots, (T - \lambda I) v, v$$

הם מסלול ולכן בת"ל. לכן $n = \dim V \geq k$, לכן $n - k \geq 0$ ונקבל

$$(T - \lambda I)^n v = (T - \lambda I)^{n-k} (T - \lambda I)^k v = (T - \lambda I)^{n-k} 0 = 0$$

(ג) נובע מסעיף ב', $k = 1$.

(ד) מתקיים כי

$$T(T - \lambda I) = TT - T \cdot \lambda I = TT - \lambda IT = (T - \lambda I)T$$

ובפרט T מתחלף עם כל חזקה של $(T - \lambda I)$.
עכשיו, לכל $v \in K_\lambda$

$$(T - \lambda I)^n (Tv) = T (T - \lambda I)^n v = T0 = 0$$

לכן, $Tv \in K_\lambda$.
(ה) נתחיל בטענת עזר, נראה כי לכל $0 \neq v \in K_\lambda$ מתקיים כי $0 \neq (T - \mu I)v \in K_\lambda$.
קודם כל, $v \in K_\lambda$ אינוריאנטי לכן $Tv \in K_\lambda$ וגם מסגירות $\mu v \in K_\lambda$, לכן גם ההפרש שלהם.

עכשיו, נניח בשלילה $(T - \mu I)v = 0$ ולכן $Tv = \mu v$

$$(T - \lambda I)^n v = (\mu - \lambda)^n v \neq 0$$

בסתירה לכך ש $v \in V_\lambda$.
עכשיו, נניח כי יש $0 \neq v \in K_\lambda \cap K_\mu$ ונקבל כי הוקטורים הבאים שייכים ל K_λ ושונים מאפס

$$v, (T - \mu I)v, (T - \mu I)^2 v, \dots, (T - \mu I)^n v$$

בפרט, $(T - \mu I)^n v \neq 0$ בסתירה לכך ש $v \in K_\mu$. $\square$

טענה 6.13. יהי λ ע"ע של אופרטור $T: V \rightarrow V$, נסמן $I_\lambda = \text{im}(T - \lambda I)^n$: אזי:
(א) I_λ אינוריאנטי.
(ב) $V = K_\lambda \oplus I_\lambda$.

הוכחה.

(א) לכל $v \in I_\lambda$,

$$Tv = T(T - \lambda I)^n u = (T - \lambda I)^n (Tu)$$

לכן $Tv \in I_\lambda$.
(ב) לכל $v \in K_\lambda \cap I_\lambda$ מתקיים

$$(T - \lambda I)^n v = 0$$

אבל $v = (T - \lambda I)^n u$ ולכן

$$(T - \lambda I)^{2n} u = 0$$

לכן, $(T - \lambda I)^n u = 0$ וכן $v = 0$.
לסיום, ממשפט המימדים ומשפט הדרגה

$$\dim(K_\lambda \oplus I_\lambda) = \dim K_\lambda + \dim I_\lambda = \dim V$$

$\square$

דוגמה 6.14. עבור המטריצה $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ נמצא את המרחבים העצמיים המוכללים.

הפ"א הוא $(\lambda + 2)^2 (\lambda - 4)$,
עבור $\lambda = 4$ המרחב העצמי הוא

$$N \begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix}^3 = N \begin{pmatrix} -324 & 108 & -108 \\ -324 & 108 & -108 \\ -216 & 216 & -216 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

עבור $\lambda = -2$ המרכב העצמי הוא

$$N \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}^3 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

למה 6.15. $\dim K_\lambda$ שווה לריבוי האלגברי של λ .

משפט 6.16. (פירוק למרחבים עצמיים מוכללים) נניח שהפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים לינאריים, יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ הע"ע השונים של T אזי ניתן לפרק את V לסכום ישר של תתי-מרחבים אינווריאנטיים

$$V = K_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda_k}$$

6.3 משפט ז'ורדן

הגדרה 6.17. בלוק ז'ורדן מסדר k המתאים ל λ הוא מהצורה

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

משפט 6.18. (משפט ז'ורדן) תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה שהפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לינאריים. אזי A דומה למטריצה אלכסונית-בלוקים שכל בלוקיה הם בלוקי ז'ורדן $J_m(\lambda)$

$$\begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & \\ & J_{m_2}(\lambda_2) & \\ & & \ddots \\ & & & J_{m_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

שימו לב כי $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ אינם בהכרח שונים.

ועבור $T: V \rightarrow V$ אופרטור כך שהפולינום האופייני של T מ"ל אזי T ניתן להצגה כמטריצה כ"ל.

יתרה מכך, הצגות המטריצה או האופרטור בעזרת בלוקי ז'ורדן כ"ל הן יחידות, כך כדי שינוי סדר הבלוקים.

6.3.1 ז'ורדן מטריצה נילפוטנטית

מטרה למצוא בסיס מהצורה $B = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k$ כאשר כל E_i הוא מסלול. אם $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה נילפוטנטית שהפ"א שלה מ"ל אזי $p_A(x) = x^n$ וגם $m_A(x) = x^k$ (עבור $k \leq n$).

נבחין כי $C(A^{k-1}) \subseteq V_0$.

נבנה בסיס ל V_0 על ידי התחלה מבסיס לתת-המרחב הקטן ביותר ברשימה הבאה, השלמתו לבסיס למרחב הבא בתור וכו' עד להשלמה לבסיס למרחב כולו

$$C(A^{k-1}) \subseteq V_0 \cap C(A^{k-2}) \subseteq V_0 \cap C(A^{k-3}) \subseteq \dots \subseteq V_0 \cap C(A) \subseteq V_0$$

הערה כדי למצוא בסיס ל $V_0 \cap C(A^m)$ אפשר לבצע את השלבים הבאים:

א. לחשב את A^m ולקחת בסיס $u_1, \dots, u_r$ של מרחב העמודות שלה.

ב. עבור משתנים $x_1, \dots, x_r$ נפתור את מערכת המשוואות $A(x_1 u_1 + \dots + x_r u_r) = 0$.

כל וקטור בבסיס זה הוא מהצורה $A^j v$ כך ש $A^{j+1} v = 0$. משלימים כל וקטור כזה

למסלול השלם $v, A^j v, A^{j-1} v, \dots, A v$. אוסף כל המסלולים הוא הבסיס המז'ורדן וכל מסלול

תורם בלוק ז'ורדן אחד שגודלו שווה לאורך המסלול.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{דוגמה 6.19}$$

$$A^3 = 0 \text{ וכן } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ עכשיו,}$$

$$p_A(x) = x^3, m_A(x) = x^3 \text{ וכן מסדר } 3 \text{ נלפטנטית מסדר } 3 \text{ וכן } p_A(x) = x^3, m_A(x) = x^3.$$

$$C(A^2) \subseteq V_0 \cap C(A) \subseteq V_0$$

$$V_0 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ אבל } C(A^2) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ נבחין כי}$$

את התהליך.

$$A^2 v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (קיים כזה כי } C(A^2) \text{)} \in C(A^2) \text{, צריך למצוא } v \text{ שעבורו}$$

$$\left\{ A^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ מקבלים את המסלול ונשים את המסלול בעמודות}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ומתקיים מטריצה}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{דוגמה 6.20}$$

$$A^2 = 0 \text{ מתקיים}$$

$$p_A(x) = x^3 \text{ אבל } m_A(x) = x^2 \text{ ומתקיים מסדר } 2 \text{ ומתקיים מסדר } 2 \text{ ומתקיים מסדר } 2 \text{ ומתקיים מסדר } 2$$

$$C(A) \subseteq V_0 \text{ עכשיו}$$

$$\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ נמצא בסיס ל-} C(A) \text{ הוא}$$

$$V_0 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ עכשיו, וקיבלנו בסיס מתאים.}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ נבחין כי } Av = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ נראה למצוא } v \text{ שעבורו}$$

מסלולים

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

לכן,

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

נשים בעמודות מטריצה $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ומתקיים

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{דוגמה 6.21.}$$

הפולינום האופייני $p_A(x) = x^5$ והמינימלי $m_A(x) = x^3$ (נילפוטנטית מסדר 3).

$$C(A^2) \subseteq V_0 \cap C(A) \subseteq V_0$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{עכשיו, וכן}$$

$$C(A^2) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

עכשיו, נשלים לבסיס של $V_0 \cap C(A)$. מתקיים כי

$$V_0 \cap C(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{ולסיום הבסיס של } V_0 \text{ הוא}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{לכן הבסיס שלנו הוא}$$

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{מקבלים } A^2v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ נרצה לצצוא } v \text{ כך ש}$$

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ מקבלים } Av = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ נרצה למצוא } v \text{ כך ש}$$

מאחדים את שני המסלולים לבסיס

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

שמים בעמודות מטריצה P ומקבלים

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6.3.2 ז'רדון מטריצה עם ערך עצמי יחיד

מטרה מציאת בסיס מהצורה $B = E_1 \cup \dots \cup E_t$ כאשר כל E_i הוא מסלול. אם A בעלת ערך עצמי יחיד λ אזי $A - \lambda I$ מטריצה נילפוטנטית. אם הפולינום האופייני שלה מל"א אזי $p_A(x) = (x - \lambda)^n$ וכן $m_A(x) = (x - \lambda)^k$ (עבור $k \leq n$) נבחין כי $C(A - \lambda I)^{k-1} \subseteq V_\lambda$. נבנה בסיס V_λ על ידי התחלה מבסיס לתת-המרחב הקטן ביותר ברשימה הבאה, השלמתו לבסיס למרחב הבא בתור וכן הלאה עד להשלמה לבסיס למרחב כולו

$$C(A - \lambda I)^{k-1} \subseteq V_\lambda \cap C(A - \lambda I)^{k-2} \subseteq \dots \subseteq V_\lambda \cap C(A - \lambda I) \subseteq V_\lambda$$

הערה כדי למצוא בסיס ל $V_\lambda \cap C(A - \lambda I)^M$ נבצע את הבאים:
 א. נחשב $(A - \lambda I)^m$ וניקח בסיס $u_1, \dots, u_r$ של מרחב העמודות שלה.
 ב. עבור משתנים $x_1, \dots, x_r$ נפתור את מערכת המשוואות $(A - \lambda I)(x_1 u_1 + \dots + x_r u_r) = 0$ וניקח בסיס למרחב הפתרונות.
 כל וקטור בבסיס זה הוא מהצורה $(A - \lambda I)^j v$ כך ש $(A - \lambda I)^{j+1} v = 0$. משלימים כל וקטור כזה למסלול השלם $(A - \lambda I)^j v, (A - \lambda I)^{j-1} v, \dots, (A - \lambda I) v, v$.
 אוסף כל המסלולים הוא הבסיס המז'רדן וכל מסלול תורם בלוק ג'ורדן אחד שגודלו שווה לאורך המסלול.
 המטריצה המז'רדנת P היא המטריצה שעמודותיה הן איברי כל המסלולים לעיל, מסודרים כך שכותבים את סוף המסלול עד להתחלת המסלול ואז $P^{-1}AP$ צורת ז'ורדן של A .

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 4 & -9 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -6 & 3 & 5 & -6 \\ 7 & -2 & -3 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{דוגמה 6.22}$$

$$(A - 2I)^2 = 0$$

לכן, $A - 2I$ נילפוטנטית מסדר 2 וכן $p_A(x) = (x - 2)^4$, $m_A(x) = (x - 2)^2$

עכשיו $C(A - 2I) \subseteq V_2$
נמצא בסיס ל- $C(A - 2I)$,

$$C(A - 2I) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{נשים לב כי } V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \text{ וסיימנו.}$$

$$\text{עכשיו, נרצה למצוא } v \text{ כך ש } (A - 2I)v = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}, \text{ מקבלים מסלול}$$

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{ונרצה למצוא } v \text{ כך ש } (A - 2I)v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ מקבלים מסלול}$$

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{לסיום, } P = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ ונקבל}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ 0 & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6.3.3 ז'רדון מטריצה עם יותר מערך עצמי יחיד

מטרה מציאת בסיס מהצורה $B = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_l$ כאשר כל E_i הוא מסלול.
אם λ ערך עצמי של המטריצה A והפ"א שלה מ"ל אזי $p_A(x) = (x - \lambda)^\ell f(x)$ וכן $m_A(x) = (x - \lambda)^k g(x)$ (עבור $k \leq \ell \leq n$).
נמצא בסיס ל- V_λ על ידי התחלה מבסיס לתת-המרחב הקטן ביותר ברשימה הבאה, השלמתו לבסיס למרחב הבא בתור וכו' עד להשלמה לבסיס למרחב כולו.

$$V_\lambda \cap C(A - \lambda I)^{k-1} \subseteq V_\lambda \cap C(A - \lambda I)^{k-2} \subseteq \dots \subseteq V_\lambda \cap C(A - \lambda I) \subseteq V_\lambda$$

הערה כדי למצוא בסיס ל- $V_\lambda \cap C(A - \lambda I)^m$:
 א. נחשב $(A - \lambda I)^m$ וניקח בסיס למרחב העמודות $u_1, \dots, u_r$.
 ב. עבור משתנים $x_1, \dots, x_r$ נפתור את מערכת המשוואות $(A - \lambda I)(x_1 u_1 + \dots + x_r u_r) = 0$ וניקח בסיס למרחב הפתרונות.
 כל וקטור בבסיס זה הוא מהצורה $(A - \lambda I)^j v$ (כאשר $(A - \lambda I)^{j+1} v = 0$).
 משלימים כל וקטור כזה למסלול השלם $(A - \lambda I)^j v, \dots, (A - \lambda I)v, v$.
 חוזרים על התהליך עבור כל אחד מהערכים העצמיים.
 אוסף כל המסלולים המתקבלים נותן את הבסיס המז'רדן וכל מסלול תורם בלוק ז'ורדן אחד שגודלו שווה לאורך המסלול.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{דוגמה 6.23}$$

נקבל $p_A(x) = (x+2)^2(x-4)$, $m_A(x) = (x+2)^2(x-4)$.
 נמצא מסלול עבור -2 .

מתקיים $V_{-2} \cap C(A + 2I) \subseteq V_{-2}$,
 הבסיס ל- $V_{-2} \cap C(A + 2I)$ הוא $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
 ובנוסף זהו בסיס ל- V_{-2} , לכן סיימנו.

צריך למצוא v כך ש- $(A + 2I)v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, מקבלים מסלול $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.
 לבסוף, הפ"מ הוא $(x+2)^2(x-4)$ לכן מספיק למצוא בסיס ל- V_4 ונקבל מסלול באורך

1

$$V_4 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

זהו גם המסלול.
 קיבלנו, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ומתקיים

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

7 תרגול 7

7.1 מציאת צורת ז'ורדן

טענה 7.1. ראינו שלמצוא במפורש את צורת ז'ורדן והמז'רדנט היא משימה קשה (בלשון המעטה).
 על ידי הפולינום האופייני, המינימלי והריבויים הגיאומטריים אפשר לצמצם את האפשרויות (לפעמים זה מאפשר למצוא את הצורה במפורש).
 א) סכום כל הסדרים של כל הבלוקים הוא גודל המטריצה. יתרה מכך, הריבוי האלגברי של λ הוא סך הגדלים של כל הבלוקים שמתאימים לו.
 ב) לכל ערך עצמי מתאימים מספר בלוקי ז'ורדן, מספר הבלוקים הוא כריבוי הגיאומטרי של הע"ע.
 ג) הגודל של הבלוק הכי גדול שמתאים לע"ע היא המעלה שלו בפולינום המינימלי.

מסקנה 7.2. מטריצה היא לכסינה אם ורק אם הפ"מ מתפרק לגורמים לינאריים שונים.

דוגמה 7.3. נניח שהפ"א של אופרטור הוא

$$(x-2)^4(x-3)^3$$

והפ"מ הוא

$$(x-2)^2(x-3)^2$$

אז הצורה הקנונית של ז'ורדן היא אחת מהבאות (עד כדי סדר בלוקים)

$$J_2(2) \oplus J_2(2) \oplus J_2(3) \oplus J_1(3)$$

$$J_2(2) \oplus J_1(2) \oplus J_1(2) \oplus J_2(3) \oplus J_1(3)$$

תרגיל 7.4. (ממבחן) מהן צורות ז'ורדן האפשריות (עד כדי סדר בלוקים) של מטריצות עם פולינום אופייני

$$p_A(x) = (x-2)^3(x+1)^3(x+2)^3$$

$$m_A(x) = (x-2)^2(x+1)(x+2)^3$$

פתרון. יש 3 ע"ע $-2, -1, 2$.

המעלה של כל גורם בפ"א היא 3, לכן סכום הגדלים הוא 3.

המעלה בפ"מ היא הגודל של הבלוק הכי גדול.

לכן, ל-2 יש בלוק מגדלים 1, 2, ל-1 יש בלוקים מגודל 1, 1, 1 ול-2 בלוק מגודל 3. נקבל

$$J_3(-2) \oplus J_1(-1) \oplus J_1(-1) \oplus J_1(-1) \oplus J_1(2) \oplus J_2(2)$$

תרגיל 7.5. (ממבחן) מצא את צורת ז'ורדן של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ \vdots & n & n-1 & \cdots & 2 \\ \vdots & & n & \cdots & 3 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix}$$

פתרון. נבחין כי $p_A(x) = (x-n)^n$, עכשיו נמצא ר"ג

$$N(A - nI) = N \begin{pmatrix} 0 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & n-1 & \cdots & 2 \\ \vdots & & 0 & \cdots & 3 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

יש משתנה חופשי יחיד ולכן הר"ג 1.

$$J = \begin{pmatrix} n & 1 & & & 0 \\ & n & 1 & & \\ & & n & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & & n & 1 \\ & & & & & n \end{pmatrix}$$

מספר בלוקי ז'ורדן הוא 1 ולכן המטריצה היא

תרגיל 7.6. הוכיחו או הפריכו: שתי מטריצות מרוכבות בעלות אותו פ"א, פ"מ ולכל ע"ע הר"ג זהה, הן דומות.

פתרון. נפריך. נסתכל על

$$(J_3(0) \oplus J_3(0) \oplus J_1(0))$$

$$(J_3(0) \oplus J_2(0) \oplus J_2(0))$$

מסקנה 7.7. (משפט ז'ורדן) לכל מטריצה A מתקיים כי:

(א) $\text{tr}(A)$ הוא סכום הע"ע (כולל ריבוי)

(ב) $\det(A)$ הוא מכפלת הע"ע (כולל ריבוי)

הוכחה. לכל מטריצה קיימת צורת ז'ורדן (מעל הסגור האלגברי), העקבה והדטרמיננטה שלה היא בדיוק הסכום והמכפלה בהתאמה, והם נשמרים תחת דמיון מטריצות. $\square$

תרגיל 7.8. תהא $A \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ הפיכה כך שמתקיים

$$(A^3 + A)(A - 2I) = 0$$

וגם $\text{tr}(A) = 2$. מצאו את הפ"מ והפ"א, מהן צורות ז'ורדן האפשריות?

פתרון. מתקיים כי $m_A(x) \mid x(x^2 + 1)(x - 2)$

מכך ש A הפיכה, 0 אינו ע"ע שלה ולכן $m_A(x) \mid (x^2 + 1)(x - 2)$

האפשרויות הן $\{x - 2, x^2 + 1, (x - 2)(x^2 + 1)\}$

עכשיו העקבה היא 2 ולכן סכום הע"ע צריך לצאת 2.

נבחין כי אם $m_A(x) = (x - 2)$ אזי $p_A(x) = (x - 2)^7$ והסכום 14.

בנוסף אם $m_A(x) = x^2 + 1$ אזי $p_A(x) = (x^2 + 1)^k$ אבל המעלה יוצאת זוגית בסתירה.

לכן, $m_A(x) = (x - 2)(x^2 + 1) = (x - 2)(x + i)(x - i)$ הפ"מ.

הפ"א מהצורה $(x - 2)^k (x + i)^m (x - i)^m$

עכשיו $2 = im - im + 2k$ לכן $k = 1$ וכן $m = 3$.

הפ"א הוא $p_A(x) = (x - 2)(x^2 + 1)^3$.

עכשיו, צורת ז'ורדן היא למעשה אלכסונית (בפ"מ החזקות הם 1) ומקבלים

$$\begin{pmatrix} 2 & & & & & & 0 \\ & -i & & & & & \\ & & -i & & & & \\ & & & -i & & & \\ & & & & i & & \\ & & & & & i & \\ 0 & & & & & & i \end{pmatrix}$$

המטריצה לכסינה מעל $\mathbb{C}$.

תרגיל 7.9. מטריצה תקרא אידמפוטנטית אם $A^2 = A$.

(א) הוכיחו כי מטריצה אידמפוטנטית לכסינה.

(ב) מה האפשרויות עבור $\text{tr}(A)$?

פתרון.

(א) מהנתון $A(A - I) = 0$, לכן $x(x - 1)$ מאפס. לכן $m_A(x) \in \{x, x - 1, x(x - 1)\}$

בכל אופן היא מתפרקת לגורמים לינאריים שונים ולכן לכסינה.

(ב) נבחין כי הפ"א הוא מהצורה $x^{n-k}(x - 1)^k$, כיוון שהעקבה היא סכום הע"ע כל

$0 \leq k \leq n$ אפשרי.

תרגיל 7.10. תהי A הפיכה שעבורה A^2 לכסינה. הוכיחו/הפריכו ש A לכסינה עבור:

(א) A מטריצה מרוכבת

(ב) A מטריצה ממשית

פתרון.

(א) נוכיח. הפ"מ מ"ל שונים

$$m_{A^2}(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_k)$$

עבור α_i שונים.

עכשיו זה מאפס של A^2 , לכן

$$(A^2 - \alpha_1 I) \cdots (A^2 - \alpha_k I) = 0$$

מעל $\mathbb{C}$ אפשר לכתוב

$$(A - \sqrt{\alpha_1} I)(A + \sqrt{\alpha_1} I) \cdots (A - \sqrt{\alpha_k} I)(A + \sqrt{\alpha_k} I) = 0$$

זה מאפס של A , כאשר כל הגורמים הם לינאריים, לכן הפ"מ מחלק של זה והוא מכיל רק גורמים לינאריים, כנדרש.

(ב) נפריד. ניקח $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, קל לראות שהיא הפיכה (מינוס השורה השנייה והחלפה),

עכשיו היא לכסינה מעל $\mathbb{C}$ (ע"ע $\pm i$) אבל לא מעל $\mathbb{R}$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ כמובן לכסינה.}$$

תרגיל 7.11. תהא $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ כך ש $A^k = I$.

(א) הוכיחו כי היא לכסינה.

(ב) נניח כי $k = n$, מהם tr ו $\det$?

פתרון.

(א) הפולינום $x^k - 1$ הוא מאפס שלה.

והוא ניתן לכתיבה בצורה $\prod_{\ell=0}^{k-1} (x - \omega_k^\ell)$ הם שורשי היחידה מסדר k . משיקולים דומים, הפ"מ מחלק של זה ולכן מכיל רק גורמים לינאריים, כנדרש.

(ב) זה אומר שכל שורשי היחידה מסדר n הם בדיוק הערכים העצמיים.

הסכום שלהם (ניתן לזיכור באמצעות סכום הנדסי) הוא 0,

המכפלה היא $(-1)^{n-1}$ (ראינו בלינארית 1).

8 תרגול 8

8.1 מרחב מכפלה פנימית

בין היתר, בעזרת המכפלה הפנימית אפשר להכליל את המושגים אורך, מרחק בין שני וקטורים, זווית בין שני וקטורים וניצבות (אותם אנחנו מכירים מהמרחב האוקלידי).

הגדרה 8.1. יהי V מ"ז מעל $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$). פונקציה $\langle \cdot, \cdot \rangle$ תקרא מכפלה פנימית על המרחב אם היא מקיימת את התכונות הבאות:

(א) אדטיביות ברכיב הראשון

$$\forall x, y, z \in V \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

(ב) הומוגניות ברכיב הראשון

$$\forall x, y \in V, \lambda \in \mathbb{F} \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

(ג) הרמיטיות (מעל הממשיים - סימטריות)

$$\forall x, y \in V \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

(ד) חיוביות לחלוטין (אי-שליליות וממשיות)

$$\forall x \in V \langle x, x \rangle \geq 0$$

ושיוויון אם ורק אם $x = 0$.

מרחב מכפלה פנימית הוא מרחב וקטורי, עבורו מוגדרת מכפלה פנימית.

שימו לב שמההגדרה נובעת אדטיביות גם ברכיב השני

$$\begin{aligned} \langle x, y + z \rangle &= \overline{\langle y + z, x \rangle} = \overline{\langle y, x \rangle + \langle z, x \rangle} \\ &= \overline{\langle y, x \rangle} + \overline{\langle z, x \rangle} = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \end{aligned}$$

ויש הומוגניות עד כדי צמוד, כלומר

$$\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\langle \lambda y, x \rangle} = \overline{\lambda \langle y, x \rangle} = \bar{\lambda} \cdot \overline{\langle y, x \rangle} = \bar{\lambda} \cdot \langle x, y \rangle$$

לפעמים מגדירים לפי לינאריות ברכיב הראשון

$$\langle x + \alpha y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \alpha \langle y, z \rangle$$

וסמי-לינאריות ברכיב השני

$$\langle z, x + \alpha y \rangle = \langle z, x \rangle + \bar{\alpha} \langle z, y \rangle$$

סך הכל

$$\langle \sum \alpha_i u_i, \sum \beta_j v_j \rangle = \sum_i \sum_j \alpha_i \bar{\beta}_j \langle u_i, v_j \rangle$$

נעיר גם כי לכל x המ"פ עם וקטור האפס היא אפס

$$\langle 0, x \rangle = \langle 0 \cdot x, x \rangle = 0 \cdot \langle x, x \rangle = 0$$

דוגמה 8.2. המכפלה הסקלרית הסטנדרטית במרחב האוקלידי $\mathbb{R}^3$ נתונה על ידי $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta$ (כאשר θ הזווית בין הווקטורים) היא מ"פ.

דוגמה 8.3. המ"פ הסטנדרטית על $\mathbb{R}^n$ מוגדרת לפי

$$\langle u, v \rangle = u^t v$$

כלומר,

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum x_i y_i$$

אבל מעל $\mathbb{C}$ היא לא מ"פ, אין חיוביות לחלוטין

$$\left\langle \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -1 < 0$$

מעל $\mathbb{C}^n$ המ"פ הסטנדרטית היא

$$\langle u, v \rangle = u^t \bar{v}$$

כלומר,

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum x_i \bar{y}_i$$

תרגיל 8.4. יהי V מ"פ, יהי $u \in V$. הוכיחו כי $u = 0$ אם ורק אם $\langle u, v \rangle = 0$ לכל v .

פתרון. כיוון אחד כבר ראינו מהרמיטיות.

נראה כי אם $\langle u, v \rangle = 0$ לכל v אזי $u = 0$.

ניקח $u = v$ ונקבל $\langle u, u \rangle = 0$ ולכן $u = 0$.

תרגיל 8.5. יהי V מ"פ, יהי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V .

יהיו $u, w \in V$ כך שעבורם $\langle u, v_i \rangle = \langle w, v_i \rangle$ לכל $1 \leq i \leq n$, הוכיחו כי $u = w$.

פתרון. נבחין כי $\langle u - w, v_i \rangle = 0$ לכל $1 \leq i \leq n$.

ניעזר בתרגיל הקודם, נראה כי לכל $v \in V$ מתקיים $\langle u - w, v \rangle = 0$.

$$\langle u - w, v \rangle = \langle u - w, \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k \rangle = \sum_{k=1}^n \bar{\alpha}_k \langle u - w, v_k \rangle = 0$$

כנדרש.

תרגיל 8.6. יהא $V = \mathbb{R}^n$ אזי $Au^t Av$ היא מכפלה פנימית אם ורק אם A הפיכה.

פתרון. קודם כל, נניח A לא הפיכה אזי יש $u \neq 0$ כך שעבורו $Au = 0$.

$$\langle u, u \rangle = (Au)^t (Au) = 0$$

עכשיו, נראה בקצרה את התנאים

$$\langle \alpha v_1 + v_2, v \rangle = (A(\alpha v_1 + v_2))^t Av = \alpha (Av_1)^t (Av) + (Av_2)^t (Av) = \alpha \langle v_1, v \rangle + \langle v_2, v \rangle$$

$$\langle u, v \rangle = (Au)^t (Av) = \left((Au)^t (Av) \right)^t = (Av)^t (Au) = \langle v, u \rangle$$

שימו לב כי זה סקלר לכן השחלוף זהה.
לסיום, אי-שלילות

$$\langle v, v \rangle = (Av)^t (Av) = \sum_{k=1}^n (Av)_k^2 \geq 0$$

ונשים לב כי מתקיים שיוויון אם ורק אם $(Av)_k = 0$ לכל k אם ורק אם $Av = 0$, צריך $v = 0$ אם ורק אם $Av = 0$ וזה נובע מהפיכות.

תרגיל 8.7.

(א) תהי $T : V \rightarrow V$ הע"ל שמקיימת לכל u, v כי

$$\langle Tv, u \rangle = 0$$

הוכיחו או הפריכו: $T = 0$.

(ב) תהי $T : V \rightarrow V$ הע"ל שמקיימת לכל v כי

$$\langle Tv, v \rangle = 0$$

הוכיחו או הפריכו: $T = 0$.

פתרון.

א) נוכיח. יהי $v \in V$, נגדיר $u = Tv$ ונקבל

$$\langle Tv, Tv \rangle = 0$$

לכן $Tv = 0$ לכל v וזוהי העתקת האפס.

ב) נפריך. נגדיר $T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ ואכן לכל

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right\rangle = -ab + ab = 0$$

תרגיל 8.8. הראו כי לכל בסיס B מתקיים כי אם $\langle u, v \rangle$ מ"פ (מעל $\mathbb{R}^n$) אזי גם $\langle [u]_B, [v]_B \rangle$.

פתרון. ניעזר בכך ש $\langle, \rangle$ מ"פ, נתחיל מאדטיביות

$$\langle [u+v]_B, [w]_B \rangle = \langle [u]_B + [v]_B, [w]_B \rangle = \langle [u]_B, [w]_B \rangle + \langle [v]_B, [w]_B \rangle$$

הומוגניות

$$\langle [\lambda u]_B, [v]_B \rangle = \langle \lambda [u]_B, [v]_B \rangle = \lambda \langle [u]_B, [v]_B \rangle$$

הרמיטיות

$$\langle [v]_B, [u]_B \rangle = \overline{\langle [u]_B, [v]_B \rangle}$$

חיוביות לחלוטין

$$\langle [u]_B, [u]_B \rangle \geq 0$$

וגם שווה לאפס אם ורק אם $[u]_B = 0$ אם ורק אם $u = 0$.

תרגיל 8.9. הראו כי על מרחב המטריצות הריבועיות מסדר כלשהו $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^\dagger)$ (כאשר $B^\dagger = \overline{(B^T)}$) היא מ"פ.

פתרון. עבור $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$\text{tr}(AB^\dagger) = \sum_{k=1}^n (AB^\dagger)_{kk} = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n A_{km} B_{mk}^\dagger = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n A_{km} \overline{B_{km}}$$

קל לראות אדטיביות, הומוגניות, הרמיטיות. לגבי חיוביות לחלוטין

$$\text{tr}(AA^\dagger) = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n A_{km} \overline{A_{km}}$$

$$z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 \geq 0$$

עכשיו $z\bar{z}$ והם שווים לאפס אם ורק אם כל הביטויים A_{km} שווים לאפס, כלומר $A = 0$.

תרגיל 8.10. (בשעיורי הבית) הראו כי $\langle v, u \rangle = v^t A u$ היא מ"פ אם ורק אם A מטריצה סימטרית שכל הערכים העצמיים שלה גדולים ממש מאפס.

תרגיל 8.11. (מטריצת גראם) יהיו $v_1, \dots, v_n$ וקטורים במ"פ, נגדיר את מטריצת גראם $A_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix}$$

מתקיימות כמה תכונות:

(א) נשים לב כי $A = A^\dagger$.

(ב) הראו כי $v_1, \dots, v_n$ ת"ל אם ורק אם $|A| = 0$.

כמסקנה, אם הם בת"ל המטריצה הפיכה.

(ג) יהי V מממ"פ ובסיס $\{v_i\}_{i=1}^n$ וסקלרים $\{c_i\}_{i=1}^n$, הראו כי קיים v יחיד עבורו לכל i

$$\langle v, v_i \rangle = c_i$$

פתרון.

(א) נובע מהרמיטיות.

(ב) אם הם ת"ל, יש וקטור שהוא צירוף של השאר (בה"כ v_n)

$$v_n = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k v_k$$

לכן, לכל $1 \leq i \leq n$

$$\langle v_n, v_i \rangle = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \langle v_k, v_i \rangle$$

כלומר כל איבר בשורה n הוא צירוף לינארי קבוע של העמודות העליונות,

לכן השורה n תלויה בקודמות ויש תלות בשורות לכן $|A| = 0$.

בכיוון השני, אם $|A| = 0$, יש תלות בשורות ונניח

$$R_n = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k R_k$$

כלומר לכל m מתקיים $\langle v_n, v_m \rangle = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \langle v_k, v_m \rangle$

ולכן לכל m מתקיים $\langle v_n - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k v_k, v_m \rangle = 0$

נרצה להראות $v_n = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k v_k$ באופן שקול

$$\langle v_n - \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k, v_n - \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k \rangle = 0$$

מסמי-לינאריות ברכיב השני

$$\langle v_n - \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k, v_n - \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k \rangle = \langle v_n - \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k, v_n \rangle - \sum_{m=1}^n \alpha_m \langle v_n - \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k, v_m \rangle$$

אבל הנחנו שהם מתאפסים, כנדרש.

(ג) יש לנו n משוואות

$$\begin{cases} \langle v, v_1 \rangle = c_1 \\ \vdots \\ \langle v, v_n \rangle = c_n \end{cases}$$

כל וקטור הוא צירוף לינארי של איברי הבסיס $v = \sum \alpha_m v_m$, אנחנו מחפשים את

הסקלרים α_m

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^n \alpha_m \langle v_m, v_1 \rangle = c_1 \\ \vdots \\ \sum_{m=1}^n \alpha_m \langle v_m, v_n \rangle = c_n \end{cases}$$

באופן שקול

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^n \alpha_m \langle v_1, v_m \rangle = \overline{c_1} \\ \vdots \\ \sum_{m=1}^n \alpha_m \langle v_n, v_m \rangle = \overline{c_n} \end{cases}$$

בכתיב מטריציוני

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{c_1} \\ \vdots \\ \overline{c_n} \end{pmatrix}$$

אלו איברי בסיס, לכן בת"ל ומטריצת גראם הפיכה. לכן, יש פתרון יחיד. כנדרש.

8.2 נורמה

הכללה של אורך במרחב האוקלידי, מקיים שאורך הוא תמיד חיובי (פרט לוקטור האפס מאורך אפס), מתיחה של הוקטור בסקלר מכפילה גם את האורך בערכו המוחלט של אותו סקלר ומתקיים אי-שיוויון המשולש. בשל תכונות אלה מגדירים נורמה:

הגדרה 8.12. נורמה היא פונקציה ממרחב וקטורי V מעל $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$) אל המספרים הממשיים $\mathbb{R} : V \rightarrow \mathbb{R}$ המקיים הבאים:

(1) חיוביות - $\|x\| \geq 0$ וכן $\|x\| = 0$ אם ורק אם $x = 0$.

(2) הומוגניות - $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

(3) אי-שיוויון המשולש $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

מרחב וקטורי שמוגדרת עליו נורמה נקרא מרחב נורמי.

8.13 דוגמה

(א) ערך מוחלט $|\cdot|$ הסטנדרטי הוא נורמה על $\mathbb{R}$.

(ב) בכל ממ"פ מוגדרת הנורמה המושרית על ידי המ"פ לפי $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

(ג) נורמת L^p ב $\mathbb{R}^n$ היא

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

לכל $p \geq 1$ ממשי קבוע.

את אי-שיוויון המשולש מוכיחים באמצעות אי-שיוויון הלדר.

נשים לב שעבור $p = 2$ זו הנורמה האוקלידית.

עבור $p = 1$ זו גיאומטרית מנהטן (גיאומטרית נהגי המוניות, נדבר עליה בהמשך).

(ד) הנורמה הסטנדרטית במרחב האוקלידי $\mathbb{C}^n$ היא

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

למעשה זו L^2 .

(ה) נורמת המקסימום של וקטור

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$$

היא בעצם הגבול של הנורמות L_p עבור $p \rightarrow \infty$

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p$$

מכונה גם L^∞ .

למיטיבי לכת, זה נובע מסנדוויץ'. נסמן $m = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$

$$m = \sqrt[p]{m^p} \leq \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p} \leq \sqrt[p]{n \cdot m^p} = \sqrt[p]{n} \cdot m \xrightarrow{p \rightarrow \infty} m$$

הגדרה 8.14. הזווית בין וקטורים u, v בממ"פ מוגדרת להיות $\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$.
אכן הביטוי הזה ב $[-1, 1]$ לפי קושי שורץ.

דוגמה 8.15. בין הוקטורים $(1, 0)$, $(0, 1)$ הזווית היא θ שעבורה

$$\cos \theta = 1$$

לכן $\theta = \frac{\pi}{2}$.

הגדרה 8.16. וקטור $v \in V$ יקרא מנורמל אם מתקיים $\|v\| = 1$, ניתן לנרמל כל וקטור על ידי חלוקה בנורמה שלו $\frac{v}{\|v\|}$

$$\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \frac{1}{\|v\|} \|v\| = 1$$

תרגיל 8.17. בממ"פ מעל $\mathbb{R}$ הוכיחו כי $\|v\| = \|w\|$ אם ורק אם $\langle v - w, v + w \rangle = 0$

פתרון. נכתוב באופן שקול

$$\langle v - w, v + w \rangle = 0$$

$$\langle v, v + w \rangle - \langle w, v + w \rangle = 0$$

$$\langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle - \langle w, v \rangle - \langle w, w \rangle = 0$$

$$\|v\|^2 - \|w\|^2 = 0$$

$$\|w\|^2 = \|v\|^2$$

$$\|w\| = \|v\|$$

נעזרנו בכך שהנורמה חיובית ומעל $\mathbb{R}$ יש סימטריות של המ"פ.

8.3 אי-שיוויון קושי-שורץ

אי-שיוויון קושי שורץ הוא אי-שיוויון הקושר את המ"פ והנורמה בממ"פ.
מבחינה היסטורית, הגרסה הראשונה של אי-השיוויון שגילה קושי קובעת כי

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}$$

(לאי-שיוויון יסודי זה ידועות היום עשרות רבות של הוכחות)
מאוחר יותר הוצגה גרסה אינטגרלית על ידי בוניקובסקי

$$\int_a^b f(x) g(x) \leq \sqrt{\int_a^b f(x)^2} \cdot \sqrt{\int_a^b g(x)^2} dx$$

בוניקובסקי לא ראה צורך בהוכחה נפרדת של אי-השיוויון החדש והסתפק בציטוט אי-שיוויון של קושי.

מאוחר יותר, הזדקק הרמן שורץ לאי-שיוויון דומה (המשווה בין אינטגרלים כפולים)

$$\iint f \cdot g \leq \sqrt{\iint f^2} \cdot \sqrt{\iint g^2}$$

ומאוחר יותר הובנו שלושת אי-שיוויונות אלה כמקרים פרטיים של הגרסה הכללית יותר, התקפה בכל ממ"פ.

שורץ לא הכיר את ניסוחו של בונקובסקי וההוכחה שהציג לאי-שיוויון שלו מתאימה לכל ממ"פ.

משפט 8.18. יהי V מע"פ (מעל הממשיים או המרוכבים) אז לכל $x, y \in V$ מתקיים

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

כאשר $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ הנורמה המושרית מן המ"פ. שיוויון מתקיים אם ורק אם x, y ת"ל.

תרגיל 8.19. הוכיחו כי לכל $a, b, \theta \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$(a \cos \theta + b \sin \theta)^2 \leq a^2 + b^2$$

פתרון. מאי-שיוויון קושי שורץ

$$\begin{aligned} |a \cos \theta + b \sin \theta| &= \left| \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right\rangle \right| \leq \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

תרגיל 8.20. הראו כי לכל $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)^2 \leq n(\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2)$$

פתרון. נתבונן ב- $V = \mathbb{R}^n$ עם המכפלה הסקלרית, נגדיר $x = (\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n)$, $y = (1 \ \dots \ 1)$ ונקבל

$$|\langle x, y \rangle|^2 = |\alpha_1 + \dots + \alpha_n|^2 = (\alpha_1 + \dots + \alpha_n)^2$$

ובכיוון השני

$$\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 = (\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2) (1^2 + \dots + 1^2) = n(\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2)$$

ומקושי-שורץ

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$$

תרגיל 8.21. הראו כי הנקודה הכי קרובה ל- v על מעגל היחידה היא $\frac{v}{\|v\|}$.

כלומר, יהי V ממ"פ ויהי $v \in V$, $v \neq 0$. נסמן את מעגל היחידה $S = \{u \in V : \|u\| = 1\}$ עבור הנורמה המושרית מהמ"פ.

הוכיחו כי

$$\left\| v - \frac{v}{\|v\|} \right\| = \min \{ \|v - u\| : u \in S \}$$

פתרון. מתקיים

$$\|v - u\|^2 = \langle v - u, v - u \rangle = \langle v, v \rangle - \langle v, u \rangle - \langle u, v \rangle + \langle u, u \rangle$$

$$\text{עכשיו } -z - \bar{z} = -(z + \bar{z}) = -2\operatorname{Re}(z) \text{ ולכן}$$

$$\|v\|^2 + \|u\|^2 - 2\operatorname{Re}(\langle u, v \rangle)$$

אם $u \in S$ נקבל

$$\|v - u\|^2 = 1 + \|v\|^2 - 2\operatorname{Re}(\langle u, v \rangle)$$

עכשיו,

$$\left\| v - \frac{v}{\|v\|} \right\|^2 = 1 + \|v\|^2 - 2\operatorname{Re} \left(\left\langle v, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \right)$$

$$= 1 + \|v\|^2 - 2 \frac{1}{\|v\|} \operatorname{Re}(\langle v, v \rangle) = 1 + \|v\|^2 - 2 \frac{\|v\|^2}{\|v\|} = \|v\|^2 - 2\|v\| + 1 = (\|v\| - 1)^2$$

בעצם רוצים להראות

$$(\|v\| - 1)^2 \leq 1 + \|v\|^2 - 2\operatorname{Re}(\langle u, v \rangle)$$

באופן שקול

$$-2\|v\| \leq -2\operatorname{Re}(\langle u, v \rangle)$$

$$\operatorname{Re}(\langle u, v \rangle) \leq \|v\|$$

אבל מאי-שוויון קושי-שוורץ

$$\operatorname{Re}(\langle u, v \rangle) \leq |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| = 1 \cdot \|v\|$$

כנדרש.

9 תרגול 9

9.1 המרחב הניצב

הגדרה 9.1. יהי V מ"פ, $S \subseteq V$ אזי המרחב הניצב של S הוא

$$S^\perp = \{v \in V : \forall s \in S \langle v, s \rangle = 0\}$$

טענה 9.2. לכל קבוצה S , $S^\perp$ הוא תת-מרחב וקטורי.

משפט 9.3. (משפט הפירוק הניצב) יהי V מ"פ ויהי $U \leq V$ תת-מרחב אזי

$$U \oplus U^\perp = V$$

תרגיל 9.4. הוכיחו או הפריכו: יהי V מ"פ ותהי $S \subseteq V$ אזי $S = (S^\perp)^\perp$.

פתרון. זה לא נכון, $(S^\perp)^\perp$ הוא תת-מרחב וקטורי ו- S לא מוכרחת להיות כזאת.

תרגיל 9.5. הוכיחו את הבאים

$$\text{א) } \{0\}^\perp = V$$

$$\text{ב) } V^\perp = \{0\}$$

$$\text{ג) אם } S_1 \subseteq S_2 \subseteq V \text{ אזי } S_2^\perp \subseteq S_1^\perp$$

$$\text{ד) לכל } S \subseteq V \text{ מתקיים } (\operatorname{span}(S))^\perp = S^\perp$$

כמסקנה, כדי למצוא בסיס למרחב הניצב של מרחב וקטורי, מספיק לבחור בסיס למרחב ולפתור מערכת סופית של משוואות שמוצאת וקטורים שמאונכים לכל הוקטורים בבסיס.

פתרון.

(א) לכל $v \in V$ מתקיים $\langle v, 0 \rangle = 0$. ההכלה השנייה ברורה.
 (ב) יהי $v \in V^\perp$, כלומר לכל $u \in V$ מתקיים $\langle u, v \rangle = 0$. עבור $u = v$ נקבל $\langle v, v \rangle = 0$ ולכן $v = 0$. ההכלה השנייה ברורה.
 (ג) יהי $v \in S_2^\perp$ אזי לכל $s \in S_2$ מתקיים $\langle s, v \rangle = 0$ ובפרט זה נכון לכל $s \in S_1$, לכן $v \in S_1^\perp$.
 (ד) מסעיף קודם $S \subseteq \text{span } S$ ולכן $(\text{span } S)^\perp \subseteq S^\perp$. יהי $\alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n \in \text{span } S$ כעת, יהי $v \in S^\perp$, כלומר לכל $s \in S$ מתקיים $\langle s, v \rangle = 0$. יהי $\alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n \in \text{span } S$ ומתקיים

$$\langle \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n, v \rangle = \sum \alpha_i \langle s_i, v \rangle = 0$$

תרגיל 9.6. יהי V מ"פ ויהיו $U, W \subseteq V$ תתי-מרחבים. הוכיחו או הפריכו:

(א) $(U + W)^\perp = U^\perp + W^\perp$

(ב) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$

(ג) $(U + W)^\perp = (U \cap W)^\perp$

פתרון.

(א) הפרכה - $U = \{0\}, W = V$

(ב) נוכיח.

$\subseteq$ יהי $v \in (U + W)^\perp$.

כלומר לכל $u + w \in U + W$ מתקיים $\langle v, u + w \rangle = 0$.

בפרט לכל $u \in U$ (וכן $w = 0$) $\langle v, u \rangle = 0$.

באופן דומה לכל $u \in V$ מתקיים $\langle v, u \rangle = 0$.

לכן, $v \in U^\perp \cap W^\perp$.

$\supseteq$ יהי $v \in U^\perp \cap W^\perp$,

עכשיו יהי $u + w \in U + W$ ולכן

$$\langle v, u + w \rangle = \langle v, u \rangle + \langle v, w \rangle = 0$$

לכן, $v \in (U + W)^\perp$.

(ג) $U = \{0\}, W = V$

תרגיל 9.7. יהי V מ"פ ויהיו $U, W \subseteq V$ תתי-מרחבים כך ש $U \oplus W = V$. הוכיחו או הפריכו $U^\perp = W$.

פתרון. הפרכה

$$U = \text{span} \{(1, 0)\}, W = \text{span} \{(1, 1)\}$$

9.2 אורתוגונליות ואורתונורמליות, משפט פיתגורס

הגדרה 9.8. בממ"פ V , וקטורים $u, v \in V$ נקראים אורתוגונליים אם המ"פ שלהם שווה לאפס, במקרה כזה נסמן $u \perp v$.

הקבוצה $\{u_1, \dots, u_k\}$ תקרא אורתוגונלית אם לכל i, j מתקיים כי u_i, u_j אורתוגונליים. אם מדובר בבסיס, נאמר כי הבסיס אורתוגונלי.

אם כל איברי הקבוצה אורתוגונליים ובעלי אורך 1, נאמר כי הוא אורתונורמלי.

דוגמה 9.9. במרחב הוקטורי $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ יחד עם מ"פ $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A)$ הקבוצה הבאה אורתוגונלית:

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

משפט 9.10. (משפט פיתגורס) יהיו $u, v \in V$ אז אם u, v אורתוגוניים אזי

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

באינדוקציה מקבלים:

יהיו $v_1, \dots, v_n$ במ"פ שכל שניים מאונכים זה לזה, כלומר $\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$ אזי

$$\left\| \sum_{k=1}^n v_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|v_k\|^2$$

תרגיל 9.11

(א) האם זה תנאי שקול מעל הממשיים?
(ב) האם זה תנאי שקול מעל המרוכבים?

פתרון.

(א) כן.

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle$$

מסימטריה

$$= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle$$

לכן, אם יש שיוויון מקבלים $\langle u, v \rangle = 0$.
(ב) לא. למשל, $i, 1$ אינם מאונכים אבל

$$\|1 + i\|^2 = (1 + i)(1 - i) = 2 = \|1\|^2 + \|i\|^2$$

תרגיל 9.12. יהי V ממ"פ ויהא $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ בסיס אורתונורמלי. יהיו $v_1, \dots, v_n$ וקטורים המקיימים

$$\forall 1 \leq i \leq n \quad \|e_i - v_i\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

הראו כי $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל- V .

פתרון. מהשלישי חינם, מספר להראות שהם בת".
נניח בשלילה שהם ת"ל ויהי צירוף מתאפס

$$\sum \alpha_i v_i = 0$$

כך שקיים i שעבורו $\alpha_i \neq 0$.
נסמן $d_i = v_i - e_i$ ונקבל

$$\sum_i \alpha_i (e_i + d_i) = 0$$

לכן

$$\sum_i \alpha_i e_i = - \sum_i \alpha_i d_i$$

נפעיל נורמה ונקבל

$$\left\| \sum_i \alpha_i e_i \right\| = \left\| \sum_i \alpha_i d_i \right\|$$

עכשיו, לפי פיתגורס ואורתונורמליות

$$\left\| \sum_i \alpha_i e_i \right\|^2 = \sum_i \|\alpha_i e_i\|^2 = \sum_i |\alpha_i|^2 \|e_i\|^2 = \sum_i |\alpha_i|^2$$

לכן,

$$\sum_i |\alpha_i|^2 = \left\| \sum_i \alpha_i e_i \right\|^2 = \left\| \sum_i \alpha_i d_i \right\|^2$$

לפי אי-שיוויון המשולש

$$\leq \left(\sum_i \|\alpha_i d_i\| \right)^2 = \left(\sum_i |\alpha_i| \cdot \|d_i\| \right)^2$$

עכשיו $d_i = v_i - e_i$, לכן $\|d_i\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$ ונקבל

$$< \left(\sum_i |\alpha_i| \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_i |\alpha_i| \right)^2$$

ראינו באי-שיוויון קושי-שוורץ (תרגיל 8.20)

$$\leq \frac{1}{n} \cdot n \cdot \sum_i |\alpha_i|^2 = \sum_i |\alpha_i|^2$$

קיבלנו $\sum_i |\alpha_i|^2 < \sum_i |\alpha_i|^2$, בסתירה.

נראה כעת מוטיבציה לעבודה עם בסיס אורתונורמלי.

טענה 9.13. מציאת וקטור קואורדינטות בבסיס אורתוגונלי (ואורתונורמלי)

יהי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס אורתוגונלי, אזי קיים צירוף לינארי יחיד של איברי הבסיס שווה ל

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

נרצה למצוא את וקטור הקואורדינטות

נבצע מכפלה פנימית של v עם v_k

$$\langle v, v_k \rangle = \left\langle \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell v_\ell, v_k \right\rangle = \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell \langle v_\ell, v_k \rangle$$

לכל $\ell \neq k$ נקבל מ"פ אפס ולכן

$$\langle v, v_k \rangle = \alpha_k \langle v_k, v_k \rangle$$

כלומר,

$$\alpha_k = \frac{\langle v, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle}$$

כלומר אפשר למצוא את המקדמים ממ"פ המורכבות מהוקטור המקורי ווקטורים ידועים מהבסיס.

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \\ \vdots \\ \frac{\langle v, v_n \rangle}{\langle v_n, v_n \rangle} \end{pmatrix}$$

אם הבסיס אורתונורמלי $\|v_k\|^2 = \langle v_k, v_k \rangle = 1$ ומקבלים

$$\alpha_k = \langle v, v_k \rangle$$

דוגמה 9.14. נתון הבסיס האורתונורמלי

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

ונרצה להציג את $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ לפי הבסיס. נקבל

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} &= \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

זה אחד היתרונות בעבודה בסיס אורתונורמלי. לכן, נרצה להבין איך לבנות בסיס אורתונורמלי, או ליתר דיוק - להפוך בסיס נתון לבסיס אורתונורמלי. לשם כך, ניעזר בתהליך גרם-שמידט.

9.3 היטל של וקטור על תת-מרחב

כהקדמה לתהליך גרם-שמידט, נדבר על הטלה על וקטור (תחילה) ואז על תת-מרחב כללי. נתחיל מהטלה של וקטור v על u היא וקטור $\pi_u(v)$ והיינו רוצים שיתקיימו שתי תכונות:

א) $\pi_u(v) \in \text{span}\{u\}$

ב) $v - \pi_u(v) \perp u$

מהתכונות האלו, אפשר למצוא מפורשות את ההיטל.

ידוע כי $\pi_u(v) = \alpha u$.

$$\langle v - \alpha u, u \rangle = 0$$

$$\langle v, u \rangle - \alpha \langle u, u \rangle = 0$$

$$\alpha = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} = \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2}$$

דוגמה 9.15. ההיטל של $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ על $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא

$$\pi_u(v) = \frac{\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{6}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

באופן כללי, היינו רוצים הטלה על תת-מרחב. יהי $v \in V$ וכן $W \leq V$, ההיטל של v על W הוא וקטור $\pi_W(v)$ שמקיים:
 א) $\pi_W(v) \in W$
 ב) $v - \pi_W(v) \in W^\perp$
 כדי לחשב את ההיטל, נניח נתון בסיס אורתוגונלי $\{w_1, \dots, w_n\}$, צריך להתקיים

$$\pi_W(v) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$$

וגם לכל i

$$\langle v - (\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n), w_i \rangle = 0$$

$$\langle v - w_i \rangle - \sum \alpha_j \langle w_j, w_i \rangle = \langle v, w_i \rangle - \alpha_i \langle w_i, w_i \rangle$$

ונקבל

$$\alpha_i = \frac{\langle v, w_i \rangle}{\|w_i\|^2}$$

דוגמה 9.16. מה ההיטל של $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ על $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\}$

אזי

$$\pi_W(v) = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1.5}{1.5} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9.4 תהליך גרם-שמידט

תהליך גרם-שמידט הוא תהליך המקבל בסיס סדור של מ"פ ומחזיר בסיס אורתונורמלי (אפשר לבצע את התהליך באופן חלקי כדי לקבל בסיס אורתוגונלי).
 תהי קבוצת הוקטורים $\{v_1, \dots, v_n\}$, התוצאה של התהליך תהיה הקבוצה $\{e_1, \dots, e_n\}$ שפורשת את אותו מרחב כמו הקבוצה המקורית ואורתונורמלית (קבוצה זו תייצג את קבוצת הוקטורים האורתונורמליים שהתקבלה עד כה, יתווסף בכל שלב באופן איטרטיבי וקטור נוסף עד לקבלת הקבלה במלואה).

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$e'_{n+1} = v_{n+1} - \sum_{k=1}^n \langle v_{n+1}, e_k \rangle e_k$$

$$e_{n+1} = \frac{e'_{n+1}}{\|e'_{n+1}\|}$$

נעיר כי אם הקבוצה תלויה לינארית, בשלבים מסוימים הוקטורים יתאפסו, נתעלם מהם ונמשיך באלגוריתם. אם רוצים קבוצה אורתוגונלית בלבד שאינה בהכרח אורתונורמלית אזי

$$e_{n+1} = v_{n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{\langle v_{n+1}, e_k \rangle}{\|e_k\|^2} e_k$$

אינטואיטיבית, לתהליך שני מרכיבים: נרמול והטלה. נרמול מחליף וקטור נתון בוקטור באותו כיוון שאורכו 1. הטלה היא פירוק של וקטור נתון לשני מרכיבים: אחד נפרש על ידי הוקטורים הקודמים בבסיס והשני ניצב להם. התהליך פועל על ידי נרמול הראשון, פירוק הוקטור השני לרכיבים, כאשר הרכיב הראשון בכיוון הוקטור הראשון והשני בכיוון הניצב לו. מחליפים את הוקטור השני ברכיב הניצב לוקטור הראשון ומנרמלים את התוצאה. מסתכלים על המרחב שהוקטור הראשון והשני פורשים (הוא שווה לזה שפרשו שני הוקטורים המקוריים), התהליך ממשיך כאשר בכל שלב מפרקים את הוקטור לשני רכיבים - האחד במרחב שנפרש על ידי הוקטורים שכבר עברו את התהליך והשני שניצב למרחב זה. מנרמלים את הוקטור הניצב ומוסיפים אותו גם לבסיס.

דוגמה 9.17. נבצע גראם-שמידט עבור הקבוצה

$$\{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 2, -1), (1, 0, 0, 3)\}$$

$$e_1 = \frac{(1, 1, 1, 1)}{\|(1, 1, 1, 1)\|} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} e'_2 &= (1, 2, 2, 1) - \frac{\langle (1, 2, 2, -1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rangle}{\|(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\|} \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ &= (0, 1, 1, -2) \\ e_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}} (0, 1, 1, -2) \end{aligned}$$

לבסוף,

$$\begin{aligned} e'_3 &= (1, 0, 0, 3) - \langle (1, 0, 0, 3), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \rangle \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ &\quad - \langle (1, 0, 0, 3), \frac{1}{\sqrt{6}} (0, 1, 1, -2) \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} (0, 1, 1, -2) \\ &= (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

כלומר שהיא תלויה לינארית בשתיים האחרות, נישאר עם $\{e_1, e_2\}$.

דוגמה 9.18. דוגמה מפורסמת למציאת בסיס אורתונורמלי למרחב הפולינומים $\mathbb{R}[x]$ בקטע $[-1, 1]$ מתוך הבסיס הסטנדרטי $\{1, x, x^2, \dots\}$, כאשר המכפלה הפנימית היא

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \cdot g(x) dx$$

נבנה את פולינומי לז'נדר. ראשית כל,

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$e'_1 = x - \langle x, e_0 \rangle e_0 = x - \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{2}} dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = x$$

בנרמול נקבל

$$e_1 = \frac{x}{\sqrt{\int_{-1}^1 x^2 dx}} = \sqrt{\frac{3}{2}} x$$

באופן דומה נחשב את e_2

$$\begin{aligned} e'_2 &= x^2 - \langle x^2, e_0 \rangle e_0 - \langle x^2, e_1 \rangle e_1 \\ &= x^2 - \left(\int_{-1}^1 x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dx \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 = x^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

כי $\langle x^2, e_1 \rangle e_1 = 0$ כי זה אינטגרל של פונקציה אי-זוגית על פני תחום סימטרי ביחס לראשית. לאחר נרמול

$$e_2 = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\int_{-1}^1 (x^2 - \frac{1}{3})^2 dx}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} (3x^2 - 1)$$

וכן

$$e_3 = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} (5x^3 - 3x)$$

וכך הלאה...

הקבוצה האורתוגונלית היא

$$\left\{ 1, x, \frac{1}{2} (3x^2 - 1), \frac{1}{2} (5x^3 - 3x), \dots \right\}$$

דוגמה 9.19. הפוך את הקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ לקבוצה אורתונורמלית

$$e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן,

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{3/2}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לבסוף,

$$e'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3/2}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3/2}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \sqrt{3} \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

סך הכל

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3/2}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \sqrt{3} \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right\}$$

10 תרגול 10

10.1 אופרטורים לינאריים והאופרטור הצמוד

כזכור, העתקה לינארית ממרחב לעצמו $T : V \rightarrow V$ נקראת אופרטור לינארי. אנחנו נניח גם ש V מרחב מכפלה פנימית.

משפט 10.1. יהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור לינארי אזי קיים אופרטור לינארי יחיד $T^* : V \rightarrow V$ (הצמוד ל T) שעבור

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle \quad \text{לכל } u, v \in V \text{ מתקיים}$$

בהינתן מטריצה A , מגזירים את הצמוד שלה לפי $A^* = \overline{A}^t$.

עבור בסיס אורתונורמלי B של V מתקיים כי $[T^*]_B = \overline{[T]_B}^t = [T]_B^*$.

הגדרה 10.2. נעיר כי עבור $T : V \rightarrow W$ העתקה לינארית בין שני מרחבי מכפלה פנימית כלליים, העתקה הצמודה היא העתקה $T^* : W \rightarrow V$ המקיימת

$$\langle v, T^*w \rangle_V = \langle Tv, w \rangle_W$$

טענה 10.3. (תכונות של האופרטור הצמוד)

$$(T^*)^* = T \quad \text{א)}$$

$$(S + T)^* = S^* + T^* \quad \text{ב)}$$

$$(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^* \quad \text{ג)}$$

$$T \text{ הפיכה אם ורק אם } T^* \text{ הפיכה.} \quad \text{ד)}$$

$$(ST)^* = T^* S^* \quad \text{ה)}$$

תרגיל 10.4. יהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור לינארי וכן $U \leq V$ תת מרחב T -אינווריאנטי, אזי $U^\perp$ T^* -אינווריאנטי.

פתרון. יהי $v \in U^\perp$, נרצה להראות כי $T^*v \in U^\perp$. כלומר, יהי $u \in U$ ונרצה להראות

$$\langle T^*v, u \rangle = 0$$

אבל

$$\langle T^*v, u \rangle = \langle v, Tu \rangle$$

ומ $Tu \in U$ וידוע $v \in U^\perp$ סך הכל $\langle T^*v, u \rangle = 0$. לכן $T^*v \in U^\perp$ כנדרש.

תרגיל 10.5. תהי $T : V \rightarrow W$ העתקה לינארית, הראו כי $\text{im } T^\perp = \ker T^*$.

פתרון. בהכלה דו-כיוונית.

יהי $v \in \text{im } T^\perp$, נרצה להראות כי $T^*v = 0$. באופן שקול $\subseteq$

$$\langle T^*v, T^*v \rangle = 0$$

עכשיו $T(T^*v) \in \text{im} T$ וגם $v \in (\text{im} T)^\perp$, לכן $\langle v, T(T^*v) \rangle = 0$ ונקבל

$$\langle T^*v, T^*v \rangle = \langle v, T(T^*v) \rangle = 0$$

יהי $v \in \ker T^*$ אזי $T^*v = 0$. נרצה להראות $v \in \text{im} T^\perp$.
יהי $Tv' \in \text{im} T$, $\square$

$$\langle Tv', v \rangle = \langle v', T^*v \rangle = \langle v', 0 \rangle = 0$$

לכן $v \in \text{im} T^\perp$ כנדרש.

מסקנה 10.6. $\text{im} T = (\ker T^*)^\perp$ וגם $(\text{im} T^*)^\perp = \ker T$.

מסקנה 10.7.

א) T על אס ורק אס T^* חח"ע $(\text{im} T = V)$ אס ורק אס $(\ker T^*)^\perp = V$, כלומר $(\ker T^* = \{0\})$
ב) T חח"ע אס ורק אס T^* על $(\ker T = \{0\})$ אס ורק אס $(\text{im} T^*)^\perp = \{0\}$, כלומר $(\text{im} T^* = V)$

תרגיל 10.8. תהי $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, הוכיחו כי

$$N(A) = N(A^*A) \quad \text{א)}$$

$$\text{rank}(AA^*) = \text{rank}(A^*A) \quad \text{ב)}$$

הוכחה.

א) קודם כל, ברור כי $N(A) \subseteq N(A^*A)$ (אם $Av = 0$ ברור $A^*Av = 0$). מצד שני, יהי $v \in N(A^*A)$, כלומר $A^*Av = 0$. נראה כי $Av = 0$.

$$\langle Av, Av \rangle = \langle v, A^*Av \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0$$

כאשר עובדים עם העתקה המטריצה, כנדרש.

$$\dim N(A) = \dim N(A^*A)$$

כמו כן, ל A^*A ול A אותו מספר עמודות, ממשפט הדרגה

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A^*A)$$

ובאותו אופן

$$\text{rank}(A^*) = \text{rank}(AA^*)$$

בנוסף ידוע כי $\text{rank} = \dim R = \dim C$, לכן שחלוף לא משפיעה על הדרגה. כמו כן, צמוד לא משנה דרגה (נוכח), לכן

$$\text{rank}(A^*A) = \text{rank}(A) = \text{rank}(A^*) = \text{rank}(AA^*)$$

טענת עזר $\text{rank} A = \text{rank} \bar{A}$

נסמן $\text{rank} A = r$ ויהיו $\{C_{i_1}, \dots, C_{i_r}\}$ העמודות.

נסמן את הפירוק $\{C_{i_1}^1 + iC_{i_1}^2, \dots, C_{i_r}^1 + iC_{i_r}^2\}$, הקבוצה הזו היא בת"ל, לכן לכל צירוף

לינארי מתאפס המקדמים מתאפסים.

עכשיו נתבונן בצמוד של הבסיס $(\bar{A})$

$$\{C_{i_1}^1 - iC_{i_1}^2, \dots, C_{i_r}^1 - iC_{i_r}^2\}$$

נראה שהקבוצה בת"ל, יהי צירוף לינארי מתאפס

$$\alpha_1 (C_{i_1}^1 - iC_{i_1}^2) + \dots + \alpha_r (C_{i_r}^1 - iC_{i_r}^2) = 0$$

נפעיל צמוד

$$\overline{\alpha_1} (C_{i_1}^1 + iC_{i_1}^2) + \dots + \overline{\alpha_r} (C_{i_r}^1 + iC_{i_r}^2) = 0$$

מאי-תלות של $C_{i_1}, \dots, C_{i_r}$ נקבל $\overline{\alpha_1} = \dots = \overline{\alpha_r} = 0$
 כך גם $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$.
 כלומר, היא בת"ל לכן

$$\dim C(\overline{A}) \geq r = \dim C(A)$$

אם נפעיל את הטיעון עם $\overline{A}$ נקבל

$$\dim C(A) = \dim C(\overline{\overline{A}}) \geq \dim C(\overline{A})$$

□

ומקבלים שיוויון בדרגות.

10.2 אופרטורים נורמליים

הגדרה 10.9. אופרטור לינארי $T : V \rightarrow V$ של ממ"פ נקרא:

- נורמלי אם $TT^* = T^*T$.

- אוניטרי אם $TT^* = T^*T = I$ (כלומר, $T^{-1} = T^*$), במקרה הממשי זה נקרא אורתוגונלי.

- הרמיטי אם $T = T^*$ (ההעתקה צמודה לעצמה).

באופן אנלוגי, מטריצה תקרא:

- נורמלית אם $AA^* = A^*A$.

- אוניטרית אם $AA^* = A^*A = I$, במקרה הממשי נקראת אורתוגונלית (ואז $A^{-1} = A^t$).

- הרמיטית אם $A = A^*$, במקרה הממשי זו מטריצה סימטרית.

משפט 10.10. הע"ע של אופרטור צמוד לעצמו הינם ממשיים.

משפט 10.11. (קריטריונים שקולים לאוניטריות) יהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור לינארי אז הבאים שקולים:

(א) T אוניטרי.

(ב) לכל $u, v \in V$ מתקיים $\langle Tu, Tv \rangle = \langle u, v \rangle$.

(ג) T משמר נורמה: לכל $v \in V$ מתקיים $\|Tv\| = \|v\|$.

המטריצות הממשיות האוניטריות או האופרטורים הלינאריים האוניטריים הם למעשה איזומטריות. כלומר, מבצעות סיבובים ושיקופים בלבד, שופרים את הגיאומטריה של המרחב (זווית ואורך).

משפט 10.12. מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ היא אוניטרית $\Leftrightarrow$ שורותיה מהוות בסיס אורתונורמלי $\Leftrightarrow$ עמודותיה מהוות בסיס אורתונורמלי.

10.13 תרגיל

(א) תהי A מטריצה אוניטרית, הוכיחו שהערכים העצמיים שלה מערך מוחלט 1.

(ב) תהי A מטריצה אוניטרית, אזי $|\det A| = 1$.

(ג) תהי $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ אוניטרית מדטרמיננטה 1, הוכיחו ש $\lambda = 1$ ע"ע.

פתרון.

(א) יהי λ ערך עצמי יחד עם $v, v \neq 0$ נקבל

$$\langle v, v \rangle = \langle Av, Av \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda \overline{\lambda} \langle v, v \rangle$$

עכשיו $v \neq 0$ ולכן $\langle v, v \rangle \neq 0$ ואפשר לחלק בו לקבלת

$$\lambda \overline{\lambda} = 1$$

$$|\lambda|^2 = 1$$

$$|\lambda| = 1$$

(ב) הדטרמיננטה היא מכפלת הערכים העצמיים

$$|\det A| = \left| \prod \lambda_i \right| = \prod |\lambda_i| = \prod 1 = 1$$

(ג) הפ"א ממשי מדרגה אי-זוגית ולכן יש שורש ממשי מערך מוחלט 1, כלומר 1 או -1.
מקרה 1 - כל הערכים העצמיים ממשיים, לא ייתכן שכולם -1 כי אז $\det A = (-1)^3 = -1$.
-1.

מקרה 2 - יש ערך ממשי ושניים מרוכבים (צמודים)

$$1 = \det A = \lambda \cdot \mu \cdot \bar{\mu} = \lambda \cdot |\mu|^2 = \lambda$$

תרגיל 10.14. הוכיחו או הפריכו:

(א) לכל אופרטור $T: V \rightarrow V$ מתקיים TT^* צמוד לעצמו (הרמיטי).
(ב) יהי אופרטור $S: V \rightarrow V$ צמוד לעצמו (הרמיטי) אזי יש אופרטור T כך ש $S = TT^*$.

פתרון.

(א) נוכיח. ניקח בסיס אורתונורמלי S של V ,

$$([TT^*]_S^S)^* = ([T]_S^S [T^*]_S^S)^* = ([T]_S^S [T]_S^{S*})^* = \left(([T]_S^S)^* \right)^* ([T]_S^S)^* = [T]_S^S [T]_S^{S*} = [TT^*]_S^S$$

(ב) נפריך. ניעזר בטענת עזר:

טענת עזר לכל אופרטור T , כל הע"ע של TT^* אי-שליליים.
יהי λ ע"ע ויהי $v \neq 0$

$$0 \leq \langle T^*v, T^*v \rangle = \langle v, TT^*v \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle$$

לכן $\lambda \geq 0$.

הפרכה מספיק לקחת S צמוד לעצמו שיש לו ערך עצמי אי-שלילי.

אכן, $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ היא סימטרית ולכן צמודה לעצמה עם ע"ע $-1, 1$.
האופרטור הוא הכפל במטריצה.

תרגיל 10.15. אפשר להגדיר "מרחק" בין מטריצות אוניטריות U, V לפי

$$E(U, V) = \max_{v, \|v\|=1} \|(U - V)v\|$$

הראו כי המרחק הזה הוא תת-אדטיבי, כלומר

$$E(U_1U_2, V_1V_2) \leq E(U_1, V_1) + E(U_2, V_2)$$

לכל U_1, U_2, V_1, V_2 מטריצות אוניטריות.

פתרון. יהיו U_1, U_2, V_1, V_2 אוניטריות

$$E(U_1U_2, V_1V_2) = \max_{v, \|v\|=1} \|(U_1U_2 - V_1V_2)v\|$$

$$= \max_{v, \|v\|=1} \|(U_1U_2 - U_1V_2 + U_1V_2 - V_1V_2)v\|$$

מאי-שיויון המשולש

$$\begin{aligned} &\leq \max_{v, \|v\|=1} \|(U_1 U_2 - U_1 V_2) v\| + \|(U_1 V_2 - V_1 V_2) v\| \\ &= \max_{v, \|v\|=1} \|U_1 [(U_2 - V_2) v]\| + \|[(U_1 - V_1) V_2 v]\| \end{aligned}$$

עכשיו סכום המקסימומים גדול שווה ממקסימום הסכום (אפשר למקסם כל ביטוי בנפרד ואין אילוץ שצריך אותו הוקטור לשניהם)

$$\leq \max_{v, \|v\|=1} \|U_1 [(U_2 - V_2) v]\| + \max_{v, \|v\|=1} \|[(U_1 - V_1) V_2 v]\|$$

נשים לב כי $V_2 v$ היא עדיין מנורמה 1 וכן V_2 הפיכה מאוניטריות, אפשר לחשוב שאנחנו רצים על $V_2 v$ מנורמה 1 (זו התאמה חח"ע ועל בין וקטורים מנורמה 1)

$$= \max_{v, \|v\|=1} \|U_1 [(U_2 - V_2) v]\| + \max_{V_2 v=u, \|u\|=1} \|[(U_1 - V_1) u]\|$$

לפי ההגדרה,

$$= E(U_1, V_1) + E(U_2, V_2)$$

כנדרש.

תרגיל 10.16. הטלה היא העתקה הרמיטית P כך ש $P^2 = P$.

יהי V מרחב וקטורי ו $W \subseteq V$ תת-מרחב וקטורי. נראה שקיימת הטלה יחידה $P : V \rightarrow W$ שהיא על.

פתרון. נתחיל מקיום.

יהי בסיס $\{w_1, \dots, w_m\}$ ל W , ממשפט הפירוק הניצב

$$U = W \oplus W^\perp$$

ניקח בסיס ל $W^\perp$ ונסמנו $\{w_{m+1}, \dots, w_n\}$,

נתבונן על הבסיס הבא ל V : $\{w_1, \dots, w_n\}$.

עכשיו, נבנה העתקה $T : V = W \oplus W^\perp \rightarrow W$ שבהינתן וקטור שולחת אותו אותו לחלק שלו (בסכום הישר) שהוא מ W (זה מוגדר היטב כי הפירוק יחיד).

לפי משפט ההגדרה, מספיק להגדיר לאן הולכים איברי הבסיס כדי לקבוע את ההעתקה ביחידות.

נגדיר

$$Tw_i = \begin{cases} w_i & 1 \leq i \leq m \\ 0 & i \geq m+1 \end{cases}$$

עכשיו, ההעתקה היא

$$T \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i w_i \right) = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i$$

נראה כי $T^2 = T$,

$$T^2 \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i w_i \right) = T \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i w_i \right) = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i = T \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i w_i \right)$$

בנוסף, היא על מכיוון שלכל $w = \sum_{i=1}^m w_i \in W$, מתקיים $Tw = w$. נראה כי היא הרמיטית.

טענת עזר מספיק להראות כי לכל v_1, v_2 מתקיים כי

$$\langle v_1, Pv_2 \rangle = \langle Pv_1, v_2 \rangle$$

הוכחה נקבל לכל v_1, v_2

$$\langle v_1, Pv_2 \rangle = \langle Pv_1, v_2 \rangle = \langle v_1, P^*v_2 \rangle$$

לכן, לכל v_1, v_2 נקבל $\langle v_1, (P - P^*)v_2 \rangle = 0$.
אם נבחר $v_2 = (P - P^*)v_1$, נקבל $\langle v_1, (P - P^*)v_2 \rangle = 0$ לכל v_1 , לכן $P = P^*$.

נחזור להוכחה.

יהי v_1, v_2

נפרק את v_1, v_2 ל $w_1^1 + w_1^2, w_2^1 + w_2^2$ כאשר $w_i^1 \in W, w_i^2 \in W^\perp$.
זה אומר כי $\langle w_i^1, w_j^2 \rangle = 0$ (הם אורתוגונליים).

נקבל

$$\begin{aligned} \langle w_1^1 + w_1^2, P(w_2^1 + w_2^2) \rangle &= \langle w_1^1 + w_1^2, w_2^1 \rangle \\ &= \langle w_1^1, w_2^1 \rangle + \langle w_1^2, w_2^1 \rangle = \langle w_1^1, w_2^1 \rangle \end{aligned}$$

מצד שני,

$$\begin{aligned} \langle Pv_1, v_2 \rangle &= \langle P(w_1^1 + w_1^2), w_2^1 + w_2^2 \rangle = \langle w_1^1, w_2^1 + w_2^2 \rangle \\ &= \langle w_1^1, w_2^1 \rangle + \langle w_1^1, w_2^2 \rangle = \langle w_1^1, w_2^1 \rangle \end{aligned}$$

כנדרש.

נעבור ליחידות.

תהי $P' : V = W \oplus W^\perp \rightarrow W$ שמקיימת הדרוש. נראה כי $P = P'$.
נשים לב כי $\text{im } P' = W$ כי היא על ובפרט $\text{im } P'|_W = W$,
נוכיח:

$$P'[W] = P'[P'[V]] = P'^2[V] = P'[V] = W$$

לכן, $P'|_W : W \rightarrow W$ היא על, לכן היא גם חח"ע והפיכה.
עכשיו, לכל w_i קיים $x \in W$ שנשלח אליו. כלומר,

$$P'x = w_i$$

$$P'x = P'^2x = P'w_i$$

מחח"ע $x = w_i$.

קיבלנו כי, $P'w_i = w_i$ לכל $1 \leq i \leq m$.
נותר להראות כי $P'w_i = 0$ עבור $i \geq m + 1$ (כי אז ממשפט ההגדרה ההעתקה זהה ל P).

נראה כי $\langle P'w_i, P'w_i \rangle = 0$ (נורמה אפס ולכן גם הוקטור אפס). מהרמיטיות

$$\langle P'w_i, P'w_i \rangle = \langle w_i, P'^*P'w_i \rangle = \langle w_i, P'^2w_i \rangle = \langle w_i, P'w_i \rangle$$

אבל $w_i \in W^\perp$ וכן $P'w_i \in W$, לכן המכפלה הפנימית אכן אפס, כנדרש.

11 תרגול 11

11.1 לכסון אוניטרי (ואורתוגונלי)

הגדרה 11.1. מטריצה היא לכסינה אוניטרית אם קיים בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ (כאשר V מעל שדה $\mathbb{F}$) שבו המטריצה מיוצגת כמטריצה אלכסונית $P^{-1}AP = D$.

משפט 11.2. מטריצה מעל $\mathbb{C}$ ניתנת ללכסון אוניטרי אם ורק אם היא נורמלית. מטריצה מעל $\mathbb{R}$ לכסינה אורתוגונלית אם ורק אם היא סימטרית.

רעיון ההוכחה שהוא שבאופרטור נורמלי ו"ע של ע"ע שונים מאונכים זה לזה (באופרטור רגיל הם רק בת"ל),
לכן מספיק לבצע גרסא שמידט בכל אחד מהבסיסים למרחבים העצמיים.

דוגמה 11.3. המשפט לא נכון מעל שדות אחרות, למשל מעל $\mathbb{Q}$ המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ לא לכסינה כי הפולינום האופייני שלה הוא $x^2 - 5$.

11.4 אלגוריתם (לכסון אוניטרי)

- (1) מלכסנים את המטריצה (פולינום אופייני, מרחבים עצמיים).
- (2) מבצעים גרסא שמידט על כל מרחב עצמי בנפרד כדי לקבל בסיס אורתונורמלי למרחב העצמי.
- (3) הבסיס כולו הוא בסיס אורתונורמלי למרחב.

11.5 תרגיל 11.5. לכסנו אוניטרית את המטריצות:

$$\begin{aligned} & \text{(א)} \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ & \text{(ב)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \text{(ג)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & \text{(ד)} \quad \begin{pmatrix} 22 & -2 & 4 \\ -2 & 19 & -2 \\ 4 & -2 & 22 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

11.6 פתרון

(א) הפולינום האופייני הוא $x^2 + 1$, השורשים $i, -i$ המרחבים העצמיים

$$\begin{aligned} V_i &= \text{sp} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ V_{-i} &= \text{sp} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

נבצע נרמול

$$V_i = \text{sp} \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\} \quad V_{-i} = \text{sp} \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

$$D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \text{וכן} \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = P^*$$

(ב) הפולינום האופייני הוא $(1-x)^3(1+x)$

$$V_{-1} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ב V_{-1} ננרמל

$$V_{-1} = \text{span} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ב V_1 קל לראות שהם אורתוגונליים, נותר לנרמל

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = P^t, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{סך הכל}$$

(ג) הפולינום האופייני $(x-2)^3(x+2)$

$$V_{-2} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \text{span} \left\{ 1/2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ד) הפולינום האופייני הוא $(x-18)^2(x-27)$

$$V_{18} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{27} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \text{span} \left\{ \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

נבצע גראם שמידט ל- V_{27}

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1/2}{\sqrt{4.5}} \\ \frac{2}{\sqrt{4.5}} \\ \frac{1/2}{\sqrt{4.5}} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}, P^{-1} = P^t, P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & \frac{1/2}{\sqrt{4.5}} & 2/3 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{4.5}} & -1/3 \\ 1/\sqrt{2} & \frac{1/2}{\sqrt{4.5}} & 2/3 \end{pmatrix} \quad \text{סך הכל}$$

תרגיל 11.7. הראו כי מטריצה נילפוטנטית סימטרית היא מטריצת האפס.

פתרון. היא לכסינה אוניטרית

$$A = PDP^*$$

עכשיו, הע"ע היחיד שלה הוא אפס ולכן $D = 0, A = 0$ כנדרש.

תרגיל 11.8. תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ סימטרית עם אלכסון של אפסים, הוכיחו כי יש לה ערך עצמי חיובי ושליילי.

פתרון. A סימטרית ולכן ניתנת ללכסון אורתוגונלי, בפרט ניתנת ללכסון. סכום הערכים העצמיים הוא 0 ולכן או שכולם שווים לאפס (ראינו שבמקרה זה היא לכסינה אם ורק אם היא מטריצת האפס והיא אינה) או שיש ערך עצמי חיובי ושליילי, כנדרש.

תרגיל 11.9. תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ סימטרית עם n ע"ע חיובים אזי כל הערכים האלכסון חיוביים.

פתרון. סימטרית ולכן ניתנת ללכסון אורתוגונלי, כלומר יש P אורתוגונלית כך שמתקיים

$$P^t A P = D$$

$$A = P D P^t$$

לכל i נקבל

$$A_{ii} = (P D P^t)_{ii} = R_i(P) \cdot D \cdot C_i(P^t) = v^t D v = \sum_{j=1}^n v_j^2 D_{j,j} > 0$$

תרגיל 11.10. תהי A מטריצה מרוכבת נורמלית. הוכיחו שיש לה שורש נורמלי, כלומר מטריצה נורמלית B שעבורה $B^2 = A$.

פתרון. היא לכסינה אוניטרית $A = PDP^*$. נסמן $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$ וכן $D' = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_m} \end{pmatrix}$. עכשיו $(PD'P^*)^2 = A$. בנוסף, $PD'P^*$ נורמלית: נשים לב כי $P^*(PD'P^*)P = D' = (PD'P^*)^*$, לכסינה אוניטרית ולכן נורמלית. אפשר גם ישירות לשים לב כי

$$(PD'P^*)^* = PD'^*P^*$$

לכן,

$$(PD'P^*)^* (PD'P^*) = PD'^*D'P^*$$

$$(PD'P^*) (PD'P^*)^* = PD'D'^*P^*$$

וקל לראות $D'^*D' = D'D'^*$ (השחלוף לא משפיע, בצד אחד על האלכסון יהיו $\bar{\lambda}\lambda$ ובשני $\lambda\bar{\lambda}$).

תרגיל 11.11. תהינה A, B מטריצות ממשיות כך ש $BA, AB, A+B$ לכסינות אורתוגונליות. הוכיחו או הפריכו: A או B לכסינה אורתוגונלית.

פתרון. הפרכה - עבור A לא סימטרית וכן $B = A^t$ ראינו כי $AA^t, A^tA, A+A^t$ סימטריות ולכן לכסינות אוניטריות.

תרגיל 11.12. תהי A מטריצה מרוכבת נורמלית אזי A צמודה לעצמה אם ורק אם הערכים העצמיים של A ממשיים.

פתרון. אם A צמודה לעצמה אזי הערכים העצמיים שלה ממשיים (בלי צורך בנורמליות) יהי λ ע"ע יחד עם $v \neq 0$

$$\bar{\lambda}\langle v, v \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \langle v, Av \rangle = \langle v, A^*v \rangle = \langle Av, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$$

אבל $\langle v, v \rangle > 0$ ואפשר לחלק בו, נקבל $\bar{\lambda} = \lambda$ ולכן $\lambda \in \mathbb{R}$. בכיוון השני נעזר בנורמליות. תהי A נורמלית עם ערכים עצמיים ממשיים, מנורמליות היא לכסינה אוניטרית

$$A = PDP^*$$

עכשיו

$$A^* = PD^*P^*$$

ונשים לב כי הערכים העצמיים ממשיים לכן $D^* = P$

$$A^* = PDP^* = A$$

כנדרש.

תרגיל 11.13. נגדיר את הפונקציה הבאה מעל $\mathbb{R}^n$

$$\langle u, v \rangle = v^t Au$$

הראו כי זו מכפלה פנימית אם ורק אם A סימטרית וכל הע"ע שלה גדולים מאפס. הערה להמשך - מטריצה ממשית סימטרית A היא מטריצה חיובית לחלוטין אם התבנית הריבועית $q(x) = x^T Ax$ היא חיובית לחלוטין (כלומר לכל וקטור $x \neq 0$ ממשי $q(x) > 0$)

פתרון. בכיוון הראשון, נניח שזו מכפלה פנימית.
 חייב להתקיים כי A הפיכה (כלומר 0 לא ע"ע) אחרת יש וקטור $v \neq 0$ עבורו $Av = 0$
 ובפרט $\langle v, v \rangle = v^t Av = 0$.
 בנוסף, בשביל שתהיה סימטריות של המ"פ צריך שהבאים יהיו שווים

$$\langle u, v \rangle = u^t Av$$

$$\langle v, u \rangle = v^t Au$$

בגלל שהם סקלרים אפשר לשחלף ולדרוש

$$v^t A^t u = v^t Au$$

זה מתקיים לכל u, v ולכן $A = A^t$.
 בנוסף, לכל λ ווקטור עצמי $v \neq 0$ מתקיים

$$0 < \langle v, v \rangle = v^t Av = \lambda v^t v$$

וכן $v^t v$ חיובי לכן λ חיובי.
 נעבור לכיוון השני.
 נניח A סימטרית עם ע"ע גדולים מאפס,
 אדטיביות והומוגניות ברורות.
 בנוסף, יש סימטריות

$$\langle u, v \rangle = v^t Au = (v^t Au)^t = u^t A^t v = u^t Av = \langle v, u \rangle$$

עבור חיוביות לחלוטין ניעזר בלכסון אורתוגונלי.
 A לכסינה אורתוגונלית עם $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ וכן P מלכסנת אורתוגונלית
 (עבור $\lambda_i > 0$).

$$A = PDP^t$$

$$\langle v, v \rangle = v^t Av = v^t P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^t v$$

בגלל ש P^t הפיכה, לכל v מתקיים $P^t v, v^t P \neq 0$
 נסמן $P^t v = u \neq 0$ ונקבל

$$= u^t \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \sum \lambda_i u_i^2 \geq 0$$

וכן יש שיוויון אם ורק אם $u_i^2 = 0$ לכל u_i (כי $\lambda_i > 0$),
 אם ורק אם $u = 0$. מהפיכות $P^t v = 0$ אם ורק אם $v = 0$.

12 תרגול 12

12.1 מטריצות סיבוב ושיקוף

אמרנו שמטריצות אורתוגונליות מבצעות שיקופים וסיבובים, בחלק זה נרצה להבין מה השיקופים והסיבובים שמטריצה נתונה מבצעת.

מטריצת סיבוב היא מטריצת מעבר בין בסיסים שכאשר מכפילים אותה בוקטור אחד או יותר היא משנה את כיוונם מבלי לשנות את גודלם.

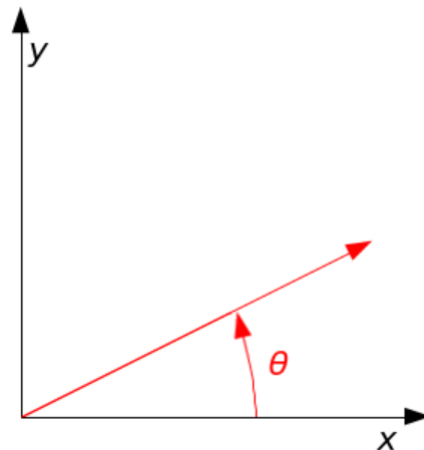
פורמלית, מטריצת סיבוב היא מטריצה אורתוגונלית בעלת דטרמיננטה 1.

דוגמה 12.1. בדו-מימד ניתן להגדיר את מטריצת הסיבוב לוקטור בזווית θ (זווית חיובית מסובבת נגד כיוון השעון) לפי

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

מטריצת הסיבוב עם כיוון השעון היא

$$R(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$



תרגיל 12.2. הראו שכל מטריצה אורתוגונלית מדטרמיננטה 1 היא מהצורה הזאת.

פתרון. עמודות המטריצה מהוות בסיס אורתונורמלי ולכן אפשר לכתוב

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta' \\ \sin \theta & \cos \theta' \end{pmatrix}$$

עכשיו הדטרמיננטה היא 1

$$\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' = 1$$

מזהות טריגונומטרית

$$\cos(\theta + \theta') = 1$$

ונובע $\theta + \theta' = 0$, לכן $\theta' = -\theta$ ונקבל

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin -\theta \\ \sin \theta & \cos -\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

כנדרש.

דוגמה 12.3. בתלת-מימד זה מעט יותר מורכב. מגדירים שלוש מטריצות סיבוב: סביב ציר ה- x , ציר ה- y וציר ה- z :

$$\mathcal{R}_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R}_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R}_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

שימו לב - כל אחת מהמטריצות מקבעת את הציר ומבצעת סיבוב דו-ממדי לפי שני המשתנים האחרים. לבסוף, כל מטריצת סיבוב סביב כל ציר אחר ניתן להצגה כהרכבה של מטריצות מהסוג הזה.

מעתה והלאה נתמקד במטריצות דו-ממדיות.

תרגיל 12.4. תהי מטריצה אורתוגונלית מדטרמיננטה -1 , הראו כי היא מהצורה

$$R'(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

פתרון. בדומה לתרגיל הקודם אפשר לכתוב בצורה

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta' \\ \sin \theta & \cos \theta' \end{pmatrix}$$

עכשיו הדטרמיננטה היא -1

$$\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' = -1$$

$$\cos(\theta + \theta') = -1$$

$$\theta + \theta' = \pi$$

$$\theta' = \pi - \theta$$

ונקבל

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin(\pi - \theta) \\ \sin \theta & \cos(\pi - \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

כנדרש.

דוגמה 12.5. נשים לב כי המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ היא שיקוף של המישור ביחס לציר ה- x והיא מהצורה הנ"ל.

משפט 12.6. כל מטריצה אורתוגונלית במישור היא אחת מן הצורות הבאות

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

כלומר, סיבוב ב- θ נגד כיוון השעון.

או

$$R'(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

אבל נשים לב כי

$$R'(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

כלומר היא מטריצת שיקוף סביב ציר ה- x ולאחר מכן סיבוב! תרגיל לבית מה קורה אם קודם מסובבים ואז משקפים?

הוכחה. מספיק להראות שמכפלת הע"ע של מטריצה אורתוגונלית דו-ממדית היא ± 1 . ראינו כי הע"ע של מטריצה אורתוגונלית הם מערך מוחלט 1.

אם הם ממשיים, סיימנו.

אחרת, אחד מהם מרוכב והשני הצמוד שלו (ראינו בלינארית 1 כי z שורש של פולינום אם ורק אם $\bar{z}$).

במקרה כזה המכפלה שלהם היא $(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = |a+bi|^2 = 1^2 = 1$. כנדרש. $\square$

12.2 תבניות בילינאריות וריבועיות

הגדרה 12.7. יהי $\mathbb{F}$ שדה ו- V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. הפונקציה $B : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ היא בילינארית אם לכל $v \in V$ הפונקציות $w \mapsto B(v, w)$, $w \mapsto B(w, v)$ הן פונקציונאליים לינאריים מ- V ל- $\mathbb{F}$, כלומר שומרות על החיבור ועל הכפל בסקלר.

דוגמה 12.8. מכפלה פנימית מעל הממשיים היא תבנית בילינארית. מעל המרוכבים לא (סמי-לינאריות ברכיב השני).

הגדרה 12.9. אם $S = \{b_1, \dots, b_n\}$ בסיס של המרחב V מעל $\mathbb{F}$, המטריצה המייצגת של התבנית הבילינארית $B : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ היא המטריצה

$$[B]_S = (B(b_i, b_j)) \in \mathbb{F}^{n \times n}$$

כל תבנית אפשר לייצג על ידי מטריצה. הצורה הכללית ביותר של תבנית בילינארית מעל $\mathbb{F}^n$ היא

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j$$

אפשר לכתוב את התבנית גם באופן הבא:

$$B(u, v) = u^T M v$$

הערה 12.10. בחירת בסיס שונה תוביל למטריצה מייצגת חופפת (כלומר, אפשר לכתוב $M = P^* M' P$).

ראינו כי מטריצה ריבועית M מגדירה מכפלה פנימית אם ורק אם היא חיובית לחלוטין בתרגול הקודם.

אנחנו נתמקד בתבניות ריבועיות:

הגדרה 12.11. תבנית ריבועית היא פונקציה המתקבלת מההצבה $Q(x) = b(x, x)$ בתבנית לינארית b .

תבנית כזו היא פולינום הומוגני מדרגה 2 (כלומר, סכום הדרגות של כל מונום שווה ל-2), מספר המשתנים בתבנית הוא $\dim V$.

הצורה הכללית של תבנית ריבועית היא

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$$

עבור $a_{ij} \in \mathbb{F}$.

כמו מקודם, אפשר לכתוב $B(x, x) = x^T M x$.

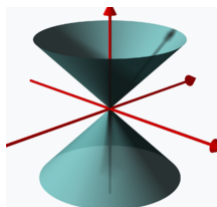
12.3 חתכי חרוט ותבניות ריבועיות

חרוט הוא גוף גיאומטרי תלת ממדי המוגדר לפי עקומה דו-ממדית סגורה (המכוון) ונקודה במרחב הנמצאת מחוץ למישור בו נמצא המכוון (קודקוד). הצורה התחומה על ידי המכוון קרויה בסיס. החרוט הוא המקום הגיאומטרי של כל הקטעים (הקווים היוצרים) המחברים בין המכוון לקודקוד.

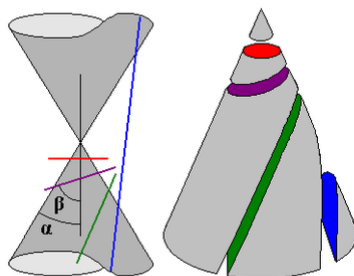


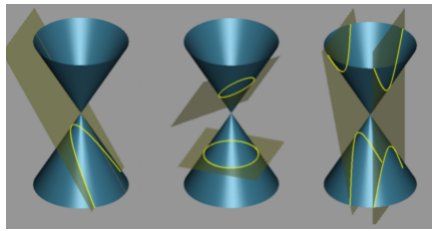
בתמונה, חרוט ישר - בסיסו עיגול ויש לו ציר סימטריה העובר דרך מרכז העיגול (הקודקוד בדיוק מעל מרכז המעגל). אפשר גם לחשוב עליו כגוף סיבוב של משולש ישר זווית סביב אחד הניצבים.

משטח הנוצר כאשר הקווים היוצרים הם קרניים או ישרים נקרא גם חרוט. במקרה כזה, החרוט המתקבל הוא משטח אינסופי פתוח.



חתך חרוט (שניוני) הוא הצורה הגיאומטרית המתקבלת כאשר מישור חותך חרוט. צורת חתך החרוט תלויה בזווית שבה המישור חותך את החרוט.

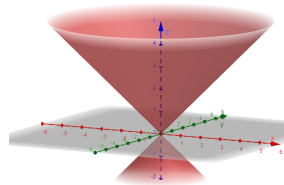




מסתבר שישנן ארבע אפשרויות: היפרבולה (הימני), אליפסה (אמצעי למעלה), מעגל (למטה) ופרבולה (השמאלית).
עד כדי מקרים מנוונים (מקרים שבהם המישור עובר דרך קודקוד החרוט)...
אפשר לכתוב משוואה של חרוט ישר לפי

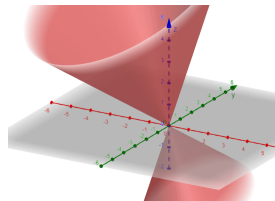
$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$$

דוגמה 12.12. החרוט $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ הוא אוסף מעגלים כאשר רדיוס המעגל שווה לגובה



דוגמה 12.13. כך נראה החרוט שמיוצג על ידי המשוואה

$$3x^2 + y^2 - z^2 + xy + yz + 2x = 0$$



נשים לב כי כאשר אנחנו מחפשים חיתוך של מישור $a'x + b'y + c'z + d = 0$, אנחנו מחפשים שיוויון של משוואה ריבועית הומוגנית מסדר 2 עם משוואה מסדר 1.
כלומר, לאחר העברת אגפים: השאלה הגיאומטרית של חתך חרוט היא אילו פתרונות יכולים להתקבל למשוואה ריבועית.
נתחיל מדו-מימד, המשוואה נראית כך:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

נטען כי יש שבעה מקרים.

- מעגל
- אליפסה
- פרבולה
- היפרבולה
- ומקרים מנוונים המתקבלים כאשר המישור החותך עובר דרך קודקוד החרוט

- נקודה יחידה

- ישר יחיד

- שני ישרים נחתכים

נספר בקצרה על כל אחת מן הצורות והצורה הקנונית שלה

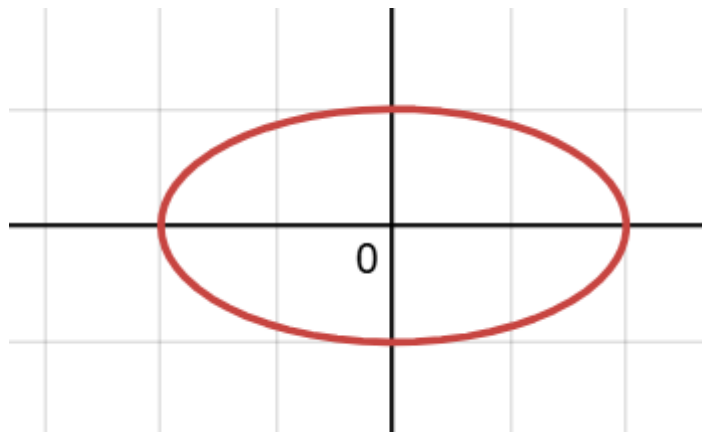
- מעגל

$$x^2 + y^2 = a^2$$

אוסף הנקודות הנמצאות במרחק שווה מהמרכז.

- אליפסה

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



זוהי קבוצת הנקודות A כך שעבורן $|AF_1| + |AF_2| = 2a$ עבור

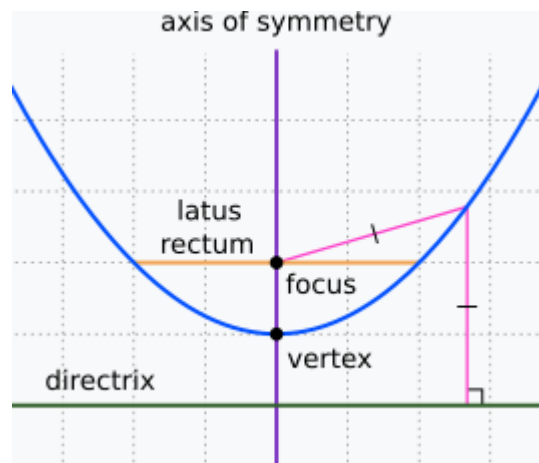
$$F_1 = (-\sqrt{a^2 - b^2}, 0), F_2 = (\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$$

המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור ששכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות במישור הוא קבוע.

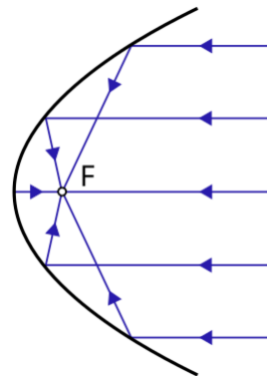
- פרבולה

$$y^2 = 4ax$$

זהו המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור שמרחק כל אחת מהן מנקודה נתונה (המוקד) שווה למרחקה מישור נתון (המדריך).



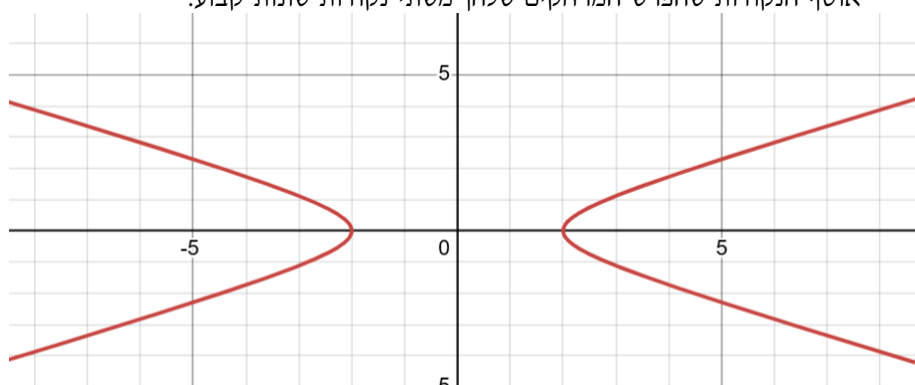
ישנה תכונה מעניינת נוספת של הפרבולה, מיקוד קרני אור.



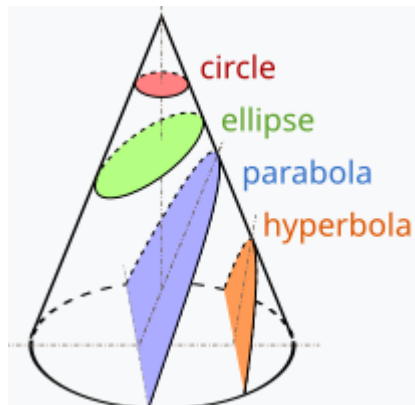
• היפרבולה

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

אוסף הנקודות שהפרש המרחקים שלהן משתי נקודות שונות קבוע.



אלו הם החתכים שאינם מנוונים.



אלגוריתם 12.14. (פיון חתכי החרוט)

נרצה להבין מה הצורה הגיאומטרית אותה מתארת המשוואה ואת הצורה הקנונית שלה

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

נתחיל מהחלק הראשון במשוואה, זהו פולינום הומוגני

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

ניתן לכתיבה כתבנית ריבועית

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

המטריצה סימטרית ולכן לכסינה אורתוגונלית

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

נבצע החלפת משתנים,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

נשים לב כי P אורתוגונלית ומבצעים רק סיבובים ושיקופים של הוקטור

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

סה"כ המשוואה שלנו

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

ניתנת לכתיבה לפי

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + dx + ey + f = 0$$

נבצע החלפת משתניים גם לחלק השני בפולינום

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + f = 0$$

וקיבלנו

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + gx' + hy' + f = 0$$

עכשיו, ניפטר מהגורמים הליניאריים על ידי השלמה לריבוע

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{g}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{h}{2\lambda_2} \right)^2 + f - \frac{g^2}{4\lambda_1^2} - \frac{h^2}{4\lambda_2^2} = 0$$

או בקיצור

$$\lambda_1 (x' - \alpha)^2 + \lambda_2 (y' - \beta)^2 - k = 0$$

"נספוג" את ההזזה הנוספת על ידי הגדרת משתניים $x'' = x - \alpha, y'' = y - \beta$ ונקבל

$$\lambda_1 (x'')^2 + \lambda_2 (y'')^2 = k$$

קיבלנו צורה קנונית (מוזאת ומסובבת)

מסקנה 12.15. נשים לב כי הצורה הקנונית נקבעת על ידי λ_1, λ_2 , הטיפוס נקבע על ידי החלק ההומוגני הריבועי בלבד!

ניתן להסיק אותו ממכפלת הערכים העצמיים והקבוע.

תרגיל 12.16. מצאו את הצורה הקנונית של

$$x = \frac{1}{y}$$

מהי הפעולה שמבוצעת על העקומה כדי להגיע לצורה קנונית?

פתרון. נכתוב

$$xy - 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 1 = 0$$

בלכסון אורתוגונלי של $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ מקבלים

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

נציב $P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ונקבל

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 1 = 0$$

$$\frac{(x')^2}{2} - \frac{(y')^2}{2} = 1$$

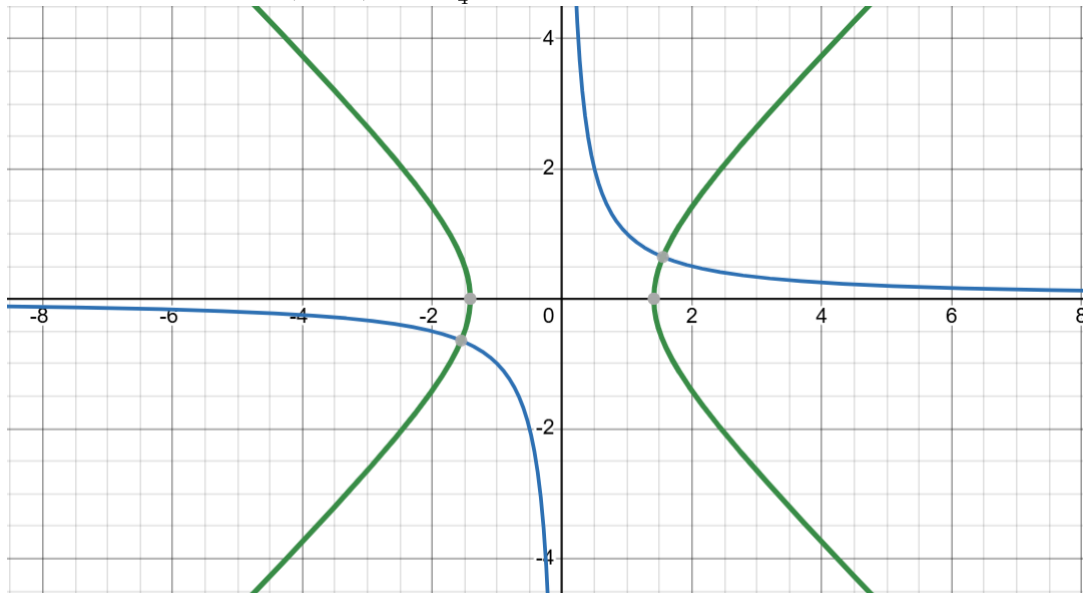
זו היפרבולה. נשים לב כי $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ מדטרמיננטה -1 , לכן נכתוב

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

נכפול ב $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ מימין

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

עכשיו $\theta = \frac{\pi}{4}$. כלומר, שיקוף סביב ציר ה- x ואז סיבוב ב $\frac{\pi}{4}$ נגד כיוון השעון:



תרגיל 12.17. אפיינו את העקומה המישורית המוגדרת לפי המשוואה

$$x^2 - 3xy - 3y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$$

מהי הפעולה שמובצעת על מנת להביאה לצורה הקנונית?

פתרון.

$$x^2 - 3xy - 3y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -1.5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 4 = 0$$

נלכסן אורתוגונלית

$$\left| \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1.5 \\ 1.5 & \lambda + 3 \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 + 2\lambda - 5.25 = \left(\lambda - \frac{3}{2} \right) \left(\lambda + \frac{7}{2} \right)$$

נמצא בסיס

$$N \left(S - \frac{3}{2} I \right) = N \begin{pmatrix} -0.5 & -1.5 \\ -1.5 & -4.5 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N\left(S + \frac{7}{2}I\right) = N\left(\begin{pmatrix} 4.5 & -1.5 \\ -1.5 & 0.5 \end{pmatrix}\right) = N\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \text{ נקבל בסיס}$$

נציב

$$\begin{pmatrix} d' & e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-18}{\sqrt{10}} & \frac{14}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

נקבל סך הכל

$$\frac{3}{2}(x')^2 - \frac{7}{2}(y')^2 - \frac{18}{\sqrt{10}}x' - \frac{14}{\sqrt{10}}y' + 4 = 0$$

$$\frac{3}{2}\left(x' - \frac{6}{\sqrt{10}}\right)^2 - \frac{7}{2}\left(y' + \frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2 = 0$$

$$\text{ובהצבה } x'' = x' - \frac{6}{\sqrt{10}}, y'' = y' + \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{3}{2}x''^2 - \frac{7}{2}y''^2 = 0$$

כלומר, שני ישרים מקבילים.

נשים לב שנעשו שתי פעולות על העקומה:

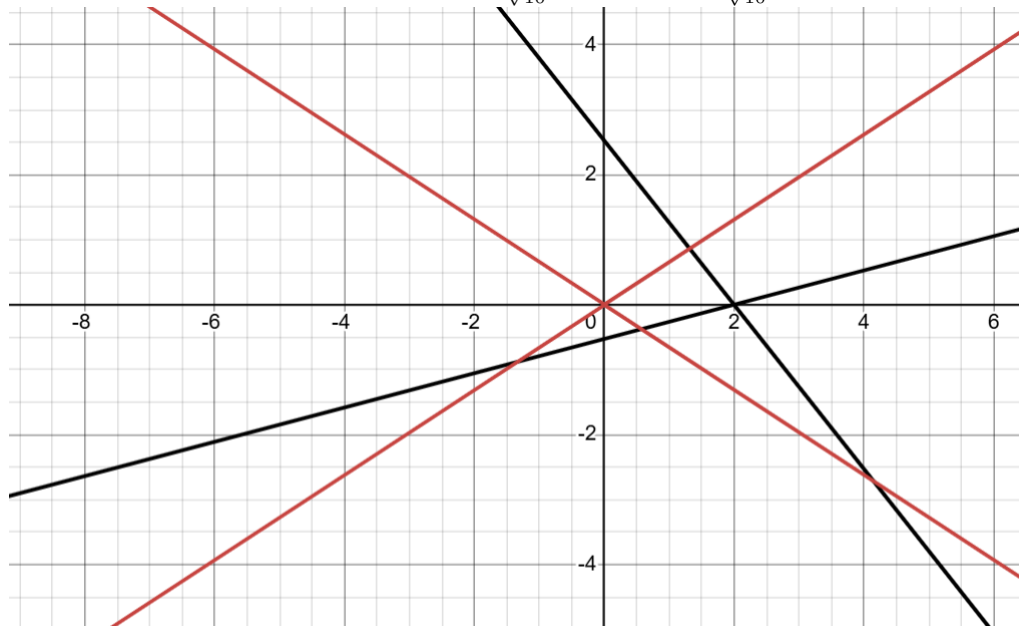
$$\text{(א) כפל במטריצה } \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \text{ כאשר } \theta = -0.32 \approx -57.6^\circ$$

(נגד כיוון השעון),

כלומר 57.6° עם כיוון השעון.

$$\text{(ב) לאחר מכן, מבצעים } x'' = x' - \frac{6}{\sqrt{10}}, y'' = y' + \frac{2}{\sqrt{10}}$$

זוהי הזזה ב $\frac{6}{\sqrt{10}}$ ימינה בציר ה- x , $\frac{2}{\sqrt{10}}$ למטה



תרגיל 12.18. אפיינו את העקומה המישורית הבאה

$$x^2 + 8xy + y^2 + 4x + 6y + 2 = 0$$

פתרון. נכתוב

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 = 0$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ על פי האלגוריתם, נלכסן אורתוגנלית את}$$

$$\begin{aligned} p_S(x) &= \det \begin{pmatrix} x-1 & -4 \\ -4 & x-1 \end{pmatrix} = x^2 - 2x + 1 - 16 = x^2 - 2x - 15 \\ &= (x-5)(x+3) \end{aligned}$$

ולכן $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -3$ כעת,

$$N(S - 5I) = N \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אפשר לבחור בסיס $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ובנוסף,

$$N(S + 3I) = N \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ושוב נבחר בסיס $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ נותר לנרמל

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$D = PSP^t \text{ וכן } D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ ואז}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} P^t \text{ ונבחר } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ כעת}$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \underbrace{P^t \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} P}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} d' & e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{\sqrt{2}} & \frac{-2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ ונסמן}$$

$$5(x')^2 - 3(y')^2 + 5\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y' + 2 = 0$$

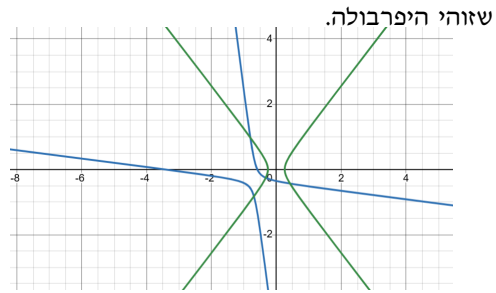
ונבצע השלמה לריבוע

$$5 \left(x' + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - 5 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - 3 \left(y' - \frac{\sqrt{2}}{6} \right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{6} \right)^2 + 2 = 0$$

נסמן $x'' = x' + \frac{\sqrt{2}}{2}, y'' = y' - \frac{\sqrt{2}}{6}$ ונקבל

$$5(x'')^2 - 3(y'')^2 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{(x'')^2}{1/15} - \frac{(y'')^2}{1/9} = 1$$



12.4 משטחים ריבועיים

נסתכל על אוסף הנקודות ב- $\mathbb{R}^3$ המוגדר על ידי המשוואה

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + ez^2 + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

זהו משטח ריבועי. נרצה למיין משטחים ריבועיים:

אלגוריתם 12.19. כמו בדו-מימד:

(1) נגדיר מטריצה סימטרית

$$S = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & f \\ d & f & e \end{pmatrix}$$

ולכסן אותה אורתוגונלית

(2)

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & f \\ d & f & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + j = 0$$

$$(3) \text{ נציב } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ ונקבל}$$

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + \lambda_3 (z')^2 + g'x' + h'y' + i'z' + j = 0$$

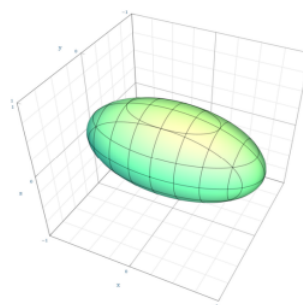
כאשר $\begin{pmatrix} g' & h' & i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix} P$ (4) נשלים לריבוע וניפטר מהגורמים הלינאריים

$$\lambda_1 (x'')^2 + \lambda_2 (y'')^2 + \lambda_3 (z'')^2 + l = 0$$

נציג כאן כמה מהצורות הקנוניות (מתוך חוברת "גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית" של אלעד עטייה):

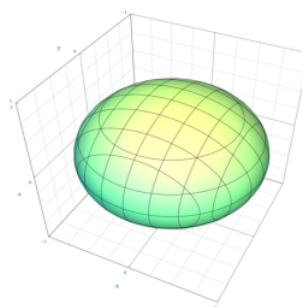
• אליפסואיד

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



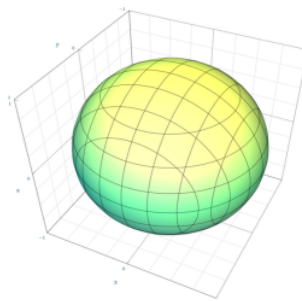
ישנם שני מקרים פרטיים מעניינים:
(א) ספרואיד (כאשר $a = b$)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



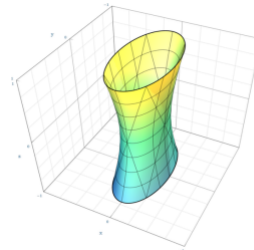
(ב) ספירה ($a = b = c$)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$



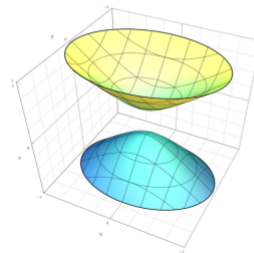
- היפרבולואיד
(א) חד-יריעתי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



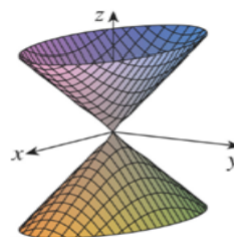
- (ב) דו-יריעתי

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



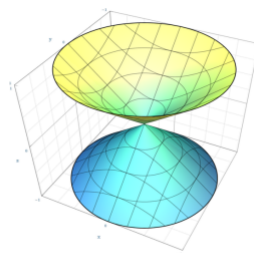
- (ג) מקרה פרטי של ההיפרבולואיד הוא החרוט

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



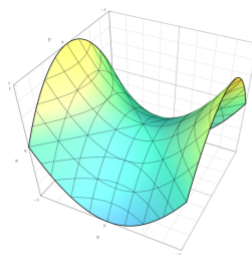
(ד) מקרה פרטי של החרוט הוא חרוט מעגלי ($a = b$)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$$



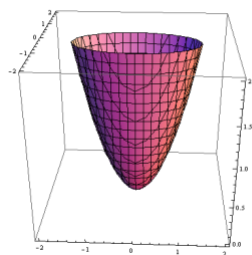
• פרבולואיד
(א) היפרבולי

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

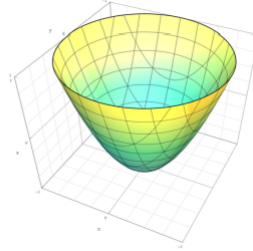


(ב) אליפטי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

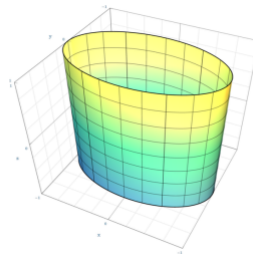


(ג) מקרה פרטי של הפרבולואיד האליפטי הוא הפרבולואיד המעגלי

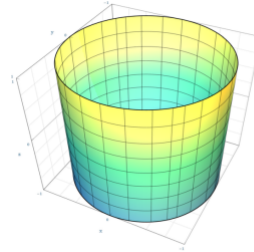


- כאשר אחד המשתנים לא מופיע, הצורה נקראת מנוונת. היא בעצם גליל.
(א) גליל אליפטי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

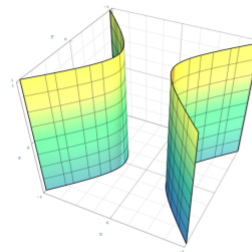


(ב) מקרה פרטי של הגליל האליפטי הוא גליל מעגלי ($a = b$)



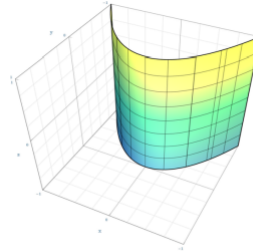
(ג) גליל היפרבולי

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



(ד) גליל פרבולי

$$x^2 + 2ay = 0$$



תרגיל 12.20. סווגו את המשטח הריבועי הבא

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + 2y - 3 = 0$$

פתרון.

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + 2y - 3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 3 = 0$$

$$:S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ נלכסן את}$$

$$\begin{aligned} p_S(x) &= \left| \begin{pmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x-1 \end{pmatrix} \right| = (x-1)^3 - (x-1) = (x-1)((x-1)^2 - 1) \\ &= x(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

הערכים העצמיים הם 0, 1, 2, נמצא בסיס

$$\underline{\lambda=0}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\underline{\lambda=1}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\underline{\lambda=2}: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Lambda = \text{ונציב בעמודות המלכסנת } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ עם המטריצה האלכסונית}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

כעת, מסמנים $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, ונשים לב $(x' \ y' \ z') = (x \ y \ z) P^t$

$$(x' \ y' \ z') P^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + (0 \ 2 \ 0) P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} - 3 = 0$$

$$(0 \ 2 \ 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = (0 \ 2 \ 0)$$

$$(y')^2 + 2(z')^2 + 2y' - 3 = 0$$

ונשלים לריבוע

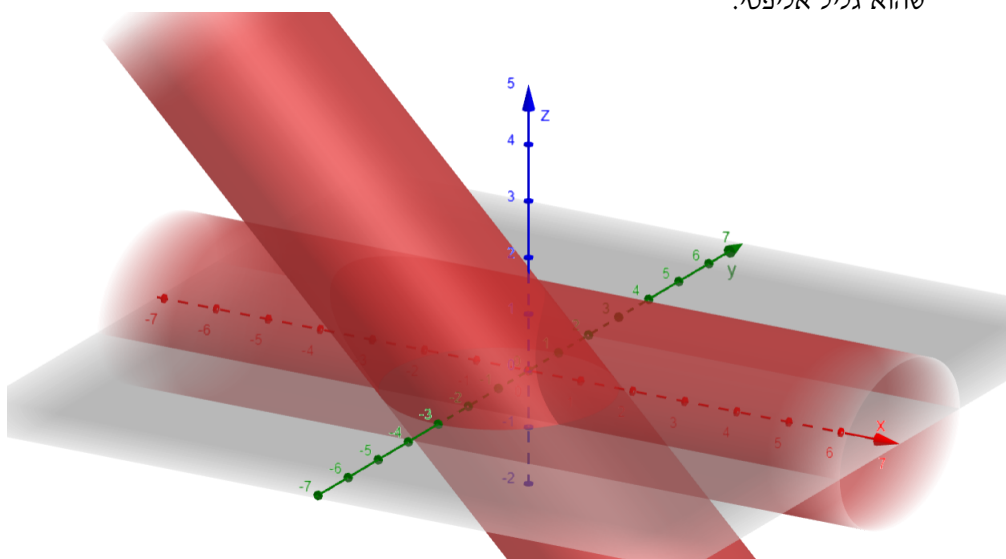
$$(y' + 1)^2 + 2(z')^2 = 4$$

בסימון $y'' = y' + 1$ נקבל

$$(y'')^2 + 2(z')^2 = 4$$

$$\frac{(y'')^2}{4} + \frac{(z')^2}{2} = 1$$

שהוא גליל אליפטי.



תרגיל 12.21. סווגו את המשטח הריבועי

$$5x^2 + 5z^2 + 12xy - 9z + \frac{101}{20} = 0$$

פתרון.

$$5x^2 + 5z^2 + 12xy - 9z + \frac{101}{20} = 0$$

$$(x \ y \ z) \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (0 \ 0 \ -9) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{101}{20} = 0$$

$$:S = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ ונלכסן את}$$

$$p_S(x) = \begin{pmatrix} x-5 & -6 & 0 \\ -6 & x & 0 \\ 0 & 0 & x-5 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} x-5 & -6 \\ -6 & x \end{pmatrix} = (x-5)(x^2-5x-36) = (x+4)(x-5)(x-9)$$

והערכים העצמיים הם $-4, 5, 9$. נמצא וקטורים עצמיים

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 6 & 0 \\ 6 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{-3}{\sqrt{13}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ונקבל}$$

$$-4(x')^2 + 5(y')^2 + 9(z')^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{-3}{\sqrt{13}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \frac{101}{20} = 0$$

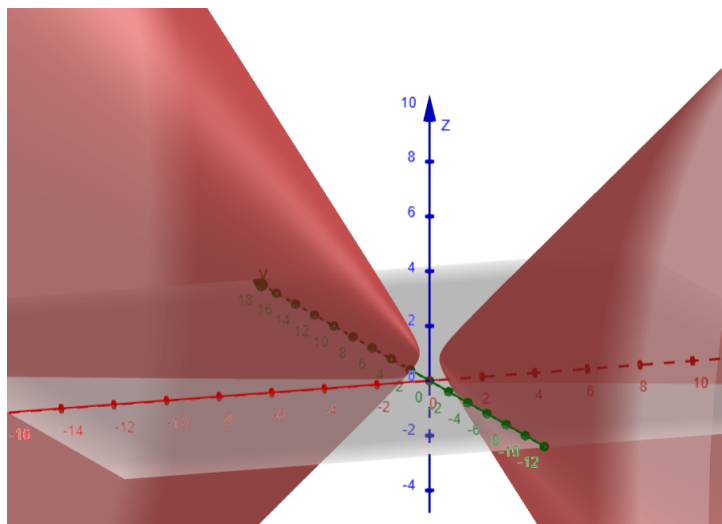
$$-4(x')^2 + 5(y')^2 + 9(z')^2 - 9y' + \frac{101}{20} = 0$$

$$-4(x')^2 + 5\left(y' - \frac{9}{10}\right)^2 + 9(z')^2 - 5 \cdot \frac{9^2}{10^2} + \frac{101}{20} = 0$$

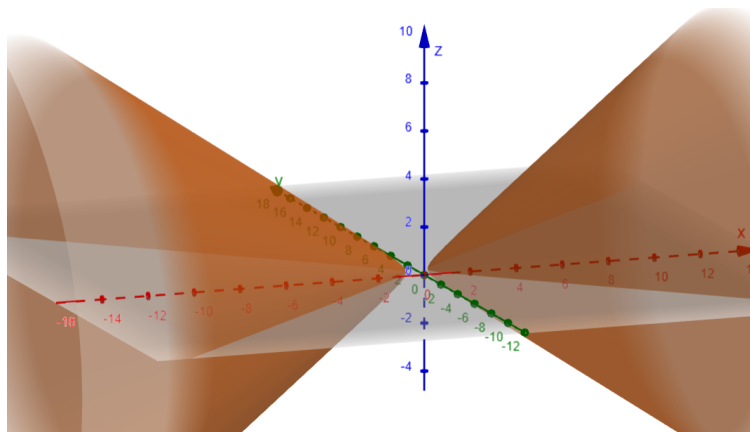
$$4(x')^2 = 5\left(y' - \frac{9}{10}\right)^2 + 9(z')^2 + 1$$

שזהו היפרבולואיד דו-יריעתי.

זוהי הצורה לפני איזומטריה



ואחרי איזומטריה



12.5 קריטריון סילבסטר

ראינו כתרגיל שתבנית ריבועית של מטריצות ממשיות סימטריות עם ערכים עצמיים חיוביים מגדירה מכפלה פנימית.

באופן כללי (התכונה המקבילה במטריצות מרוכבות היא הרמיטיות) נגדיר:

הגדרה 12.22. אומרים שמטריצה הרמיטית A ($A = A^*$) היא חיובית לחלוטין אם לכל וקטור (מרוכב) $x \neq 0$ מתקיים $x^*Ax > 0$.
באופן דומה, שלילית לחלוטין כאשר $x^*Ax < 0$.

משפט 12.23. באופן דומה לתרגיל, ראיתם בהרצאה שמטריצה הרמיטית היא חיובית לחלוטין אם ורק אם הע"ע שלה חיוביים. מטריצה שלילית לחלוטין אם כל הערכים העצמיים קטנים מאפס.

אבחנה במטריצה דו ממדית, מכפלת הערכים העצמיים מלמדת האם המטריצה חיובית או שלילית לחלוטין. הרי אם הדטרמיננטה גדולה מאפס שניהם חיוביים או שליליים ביחד. אם יש לנו גם את העקבה יודעים את הסכום ואפשר לקבוע.

זה לא נכון בממדים גבוהים יותר...
נרצה כלי לבדיקת חיוביות (ושליליות) לחלוטין בעזרת דטרמיננטה בלבד.

הערה 12.24. זה שימושי באנליזה - פונקציה רציפה ב- n משתנים עם נגזרות חלקיות מסדר שני רציפות מגדירה מטריצת סיאן (מטריצת נגזרות שניות) סימטרית, תנאי הכרחי לכך שנקודה מסוימת תהיה קיצון היא שכל הנגזרות החלקיות יתאפסו. מסתבר שאם מטריצת הסיאן חיובית לחלוטין אז הנקודה היא מינימום מקומי במובן החזק, ואם הנקודה היא מינימום מוקמי במובן החלש אז זו מטריצה חיובית.

משפט 12.25. (קריטריון סילבסטר) תהי $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ הרמיטית ($A = A^*$) אזי A חיובית לחלוטין אם ורק אם לכל i מתקיים $\Delta_i > 0$
כאשר $\Delta_k = \det(A_{(k)})$ המינור הראשי הוא הדטרמיננטה של $A_{(k)}$ הבלוק בגודל $k \times k$ השמאלי העליון (כלומר מוחקים שורות $k+1, \dots, n$).

דוגמה 12.26. נתבונן במטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/12 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = |[1]| = 1$$

$$\Delta_2 = \left| \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 1$$

$$\Delta_3 = -(-1/12) \left| \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \right| + \left| \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = -6/12 + 1 = 1/2$$

כולם חיוביים ולכן חיובית לחלוטין!

תרגיל 12.27. עבור אילו ערכי $k \in \mathbb{R}$ הפונקציה הבאה מגדירה מכפלה פנימית (מעל הממשיים)

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2x_1x_2 + kx_1y_2 + kx_2y_1 + (3k-4)y_1y_2$$

פתרון. ראינו כבר שזה שקול לכך שהמטריצה המייצגת סימטרית וחיובית לחלוטין

$$\begin{pmatrix} 2 & k \\ k & 3k-4 \end{pmatrix}$$

המטריצה כמובן סימטרית.
באשר לחיוביות לחלוטין, לפי קריטריון סילבסטר צריך

$$\Delta_1 = 2 > 0$$

$$\Delta_2 = 2(3k-4) - k^2 = -(k^2 - 6k + 8) = -(k-2)(k-4)$$

שקול לכך שיתקיים

$$-(k-2)(k-4) > 0$$

$$\Leftrightarrow (k-2)(k-4) < 0$$

$$2 < k < 4$$

בהצלחה רבה!