תרגיל 4 – אלגברה מופשטת 1

1. ענו על הסעיפים הבאים.

1.1. כמה חבורות אבליות מסדר 1323 קיימות, עד כדי איזומורפיזם?
1.2. בכמה מהן יש איבר מסדר 49?
1.3. בכמה מהן יש איבר מסדר 147?
1.4. מצאו את מספר החבורות האבליות מסדר 6860 (עד כדי איזומורפיזם) . בכמה מהן יש חבורה 7-סילו ציקלית?

2. תהי $G = C_5 \times C_{25} \times C_{625}$. קבעו מהו מספר האיברים מכל סדר ב G.

3. הוכיחו או הפריכו:

3.1. קיימת חבורה פשוטה G מסדר 20.
3.2. קיימת חבורה פשוטה G מסדר 30.
3.3. תהי G חבורה מסדר 55 כך שיש בה יותר מארבעה איברים מסדר 5, אזי G אינה אבלית.

4. ענו על הסעיפים הבאים:

4.1. מצאו את כל החבורות מסדר 637, עד כדי איזומורפיזם.
4.2. מצאו את כל החבורות מסדר 34, עד כדי איזומורפיזם.
4.3. מצאו את כל החבורות מסדר 121 עד כדי איזומורפיזם.
4.4. מצאו את כל החבורות מסדר 35, עד כדי איזומורפיזם.

5. (שאלה ממבחן מועד א', קיץ 2004)

לתכשיט בצורת מגן דוד יש שישה משולשים בקצוות. ניתן לצבוע כל משולש באחד משלושה צבעים נתונים. כמה תכשיטים שונים כאלה אפשר לייצר אם ניתן לסובב את התכשיט ולהופכו?

6. (הוכחה אלטרנטיבית למשפט קושי)

תהי G חבורה סופית ויהי p ראשוני המחלק את סדר החבורה.
נגדיר,

$$X = \{(g_1, g_2, ..., g_p) \in G \times G \times ... \times G : g_1 g_2 \cdots g_p = e\}$$

ותהי C חבורה ציקלית מסדר p הנוצרת ע"י איבר c.

6.1. הוכיחו כי p מחלק את $|X|$.
6.2. הוכיחו כי קיימת פעולה יחידה של C על X כך ש $c \cdot (g_1, ..., g_p) = (g_2, ..., g_p, g_1)$
6.3. הוכיחו שבכל מסלול בפעולה הזו יש איבר יחיד או p איברים.
6.4. מצאו מסלול בעל איבר יחיד עבור פעולה זו.
6.5. הראו כי קיים עוד מסלול בעל איבר יחיד עבור פעולה זו.
6.6. הסיקו שב G יש איבר מסדר p.

7. תהי G חבורה מסדר 12 ויהיו n_2 ו n_3 מספר חבורות ה 2-סילו וה 3-סילו בהתאמה.

7.1. מהם ערכי n_2 האפשריים? (הביאו דוגמאות לכך שכל הערכים המדוברים אכן אפשריים).

7.2. מהם ערכי n_3 האפשריים? (שוב, הביאו דוגמאות).

7.3. האם יתכן ש $n_2 = 3$ ו $n_3 = 4$?

7.4. הראו כי $n_2 = n_3 = 1$ אם ורק אם G אבלית.

8. נתבונן בחבורה S_7.

8.1. הוכיחו כי $S_7 =< (12...7),(54) >$.

8.2. מצאו את מספר מחלקות הצמידות ב S_7. מהו הגודל של כל אחת מהן?

8.3. כמה איברים ב S_7 מתחלפים עם $a = (125)$?

9. ענו על הסעיפים הבאים.

9.1. תהי G חבורה בת 35 איברים. הוכיחו כי G פתירה.

9.2. תהי G חבורה בת 125 איברים. האם בהכרח G פתירה?

9.3. תהי G חבורה מסדר 77. זהו את כל תתי החבורות שלה, עד כדי איזומורפיזם.

9.4. תהי G חבורה מסדר 4081. הוכיחו כי G ציקלית.

10. (שאלה ממבחן מועד ב', קיץ 2009)

נתייחס לחבורה הסימטרית S_p כאשר p הוא מספר ראשוני.

10.1. כמה איברים מסדר p יש בחבורה?

10.2. חשבו באמצעות סעיף א' את מספר תתי החבורות מסדר p בתוך S_p.

10.3. בעזרת סעיף ב' ומשפט סילו השלישי הוכיחו כי $(p-1)! \equiv (p-1) \bmod p$.
(האם זה מוכר לכם כאחד המשפטים?)

11. (שאלה ממבחן מועד א', קיץ 2006)

מעל קבוצה $R \times R^*$ נגדיר פעולה $(a_1,b_1)\bullet(a_2,b_2) = (a_1 + b_1 a_2, b_1 b_2)$. הוכיחו:

11.1. $G = (R \times R^*, \bullet)$ חבורה.

11.2. G אינה אבלית.

11.3. קיים מונומורפיזם $G \to GL_2(R)$.

11.4. G חבורה פתירה.

12. (שאלה ממבחן מועד א', קיץ 2006)

נסמן $[a,b] := aba^{-1}b^{-1}$ ("הקומוטטור") של $a,b \in G$ בחבורה G.

נגדיר ת"ח $G' := \left\langle \{[a,b] : \quad a,b \in G\} \right\rangle \le G$ הנוצרת ע"י קבוצת הקומוטטורים.

הוכיחו:

12.1. $G' \triangleleft G$.

12.2. G/G' אבלית.

12.3. אם $f: G \to Y$ הומומורפיזם ו Y חבורה אבלית אז $G' \subseteq \ker f$.

בונוס – רק תשובות מלאות ומוסברות היטב יתקבלו.

13. (בונוס – 10 נק')
תהי G חבורה סופית, p מספר ראשוני ו $P \leq G$ תת חבורת - p. נתון כי $P = N(P)$.
הוכיחו כי P חבורת p - סילו.
הדרכה: התבוננו ב P הפועלת על קבוצת תתי החבורות הצמודות ל P ב G, באמצעות הצמדה.

14. (בונוס – 5 נק')
מצאו את ה- $n > 1$ הקטן ביותר שאינו ראשוני עבורו כל החבורות מסדר n איזומורפיות.

בהצלחה! ☺