

## תרגיל בית 3 מבוא לחוגים ומודולים 88-212 סמסטר ב' תשע"ז

**הוראות** זכרו למלא ולהגיש את הדו"ח.

**שאלה 1.** יהי  $F$  שדה, ויהי  $R$  חוג. הוכיחו שאם  $\varphi : F \rightarrow R$  אפימורפיזם של חוגים, אז גם  $R$  שדה.

**שאלה 2.** יהי  $R$  חוג, ויהי  $I$  אידאל. ראיתם כי  $M_n(I) \triangleleft M_n(R)$ . הוכיחו

$$M_n(R)/M_n(I) \cong M_n(R/I)$$

**שאלה 3.** הוכיחו שחוג הקוטרניונים  $\mathbb{H}$  אינו איזומורפי לחוג  $M_2(\mathbb{R})$ . שימו לב שזה מפתיע, כי שניהם חוגים פשוטים ושהם איזומורפיים כמרחבים וקטוריים מעל  $\mathbb{R}$  (שניהם ממימד 4).

**שאלה 4.**

א. הוכיחו שהחוגים הבאים איזומורפיים

$$R = \mathbb{F}_2[x]/\langle x^2 \rangle, \quad S = \mathbb{F}_2[x]/\langle x^2-1 \rangle$$

ב. הוכיחו שהחוגים הבאים **לא** איזומורפיים

$$R = \mathbb{Q}[x]/\langle x^2 \rangle, \quad S = \mathbb{Q}[x]/\langle x^2-1 \rangle$$

ג. הוכיחו שהחוגים הבאים איזומורפיים

$$R = \mathbb{C}[x,y]/\langle xy-1 \rangle, \quad S = \mathbb{C}[x,y]/\langle x^2+y^2-1 \rangle$$

**שאלה 5.** הוכיחו שהחוג

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ \bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{C} \right\}$$

איזומורפי לחוג  $M_2(\mathbb{R})$ . העזרו בהדרכות הבאות:  
הדרכה א' - מצאו מערכת של יחידות מטריצה ובנו את האיזומורפיזם ביניהן.  
הדרכה ב' - הראו שהחוגים האלו צמודים כתת-חוגים של  $M_2(\mathbb{C})$ .

**שאלה 6.** בחוג  $R = \mathbb{Z}[x, y]$  נסמן שלושה אידאלים:

$$I_0 = \langle x, y \rangle, \quad I_1 = \langle x-1, y-3 \rangle, \quad I_2 = \langle x-2, y-5 \rangle$$

א. הוכיחו שכל שניים מבין האידאלים הם קו-מקסימליים.

ב. הוכיחו ש- $R/I_1 \cong \mathbb{Z}$  (טענה זו נכונה גם ל- $I_0$  ול- $I_2$ ).

**שאלה 7.** יהי חוג חילופי, יהי  $a \in R$  איבר נילפוטנטי (כלומר קיים  $k \in \mathbb{N}$  כך ש- $a^k = 0$ ), ויהי  $f(x) = r_n x^n + \dots + r_1 x + r_0 \in R[x]$ .

א. הוכיחו כי  $a = 0$  או ש- $a$  מחלק אפס.

ב. הוכיחו כי  $1 + a \in R^\times$ .

ג. הוכיחו שאם  $u \in R^\times$ , אז גם  $u + a \in R^\times$ .

ד. הוכיחו כי  $f(x)$  הפיך ב- $R[x]$  אם ורק אם  $r_0$  הפיך ו- $r_1, \dots, r_n$  נילפוטנטיים.

ה. הוכיחו כי  $f(x)$  נילפוטנטי ב- $R[x]$  אם ורק אם  $r_0, r_1, \dots, r_n$  נילפוטנטיים.

בהצלחה!