מתמטיקה לכימאים תרגיל 2

עוזי חרוש ועולא אמארה

תרגיל 1. הביאו דוגמאות לסדרות a_n ו-b_n כך ש-

1. a_n ו-b_n מתבדרות אבל a_n+b_n מתכנסת

פתרון. ניקח

$$a_n = (-1)^n\,, b_n = (-1)^{n+1}$$

אז סכום שני הסדרות תמיד שווה ל-0.

2. a_n ו-b_n מתבדרות וגם a_n+b_n מתבדרת

פתרון. ניקח

$$a_n = (-1)^n\,, b_n = (-1)^n$$

אז סכום שני הסדרות יהיה שווה ל-$2(-1)^n$

בתרגיל זה מדובר על התכנסות והתבדרות במובן הרחב. כלומר, סדרה השואפת לאינסוף או למינוס אינסוף נחשבת לסדרה מתכנסת.

תרגיל 2. חשבו את הגבולות הבאים

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{2n^4+1}} + \frac{n}{\sqrt{2n^4+2}} + \ldots + \frac{n}{\sqrt{2n^4+n}}$

פתרון. ננעזר הכלל הסנדוויץ

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \longleftarrow \frac{n^2}{\sqrt{2n^4+n}} \le \frac{n}{\sqrt{2n^4+1}} + \frac{n}{\sqrt{2n^4+2}} + \ldots + \frac{n}{\sqrt{2n^4+n}} \le \frac{n^2}{\sqrt{2n^4+1}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$$

לכן גבול הסדרה המקורית שווה ל-$\frac{1}{\sqrt{2}}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n+4^n+5^n}$

פתרון. ננעזר הכלל הסנדוויץ

$$5 \longleftarrow 5 = \sqrt[n]{5^n} \le \sqrt[n]{2^n+3^n+4^n+5^n} \le \sqrt[n]{4\cdot 5^n} = 5\sqrt[n]{4} \longrightarrow 5$$

לכן גבול הסדרה המקורית שווה ל-5

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n} = \max\{a,b,c\}$

פתרון. ננעזר הכלל הסנדוויץ

$$\max\{a,b,c\} \longleftarrow \max\{a,b,c\} = \sqrt[n]{(\max\{a,b,c\})^n} \le \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n} \le \sqrt[n]{3\cdot(\max\{a,b,c\})^n} = \max\{a,b,c\}$$

לכן גבול הסדרה המקורית שווה ל-5

תרגיל 3. בדקו מונוטוניות הסדרות הבאות

1. $a_n = \frac{n-1}{n}$

פתרון. נחשב את ההפרש בין שני איברים עוקבים

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

לכן היא מונוטונית עולה.

2. $a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

פתרון. נחשב את המנה בין שני איברים עוקבים

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)} = \left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) < 1$$

ולכן היא מונוטונית יורדת.

תרגיל 4. תהי סדרה a_nסדרה המקיימת $|a_{n+1}-a_n| \le q\,|a_{n-1}-a_{n-2}|$עבור $0<q<1$
הוכח ש-a_n מתכנסת.

פתרון. נראה ש-a_nמקיימת את תנאי קושי: ראשית נשים לב ש-

$$|a_{n+1}-a_n| \le q\,|a_{n-1}-a_{n-2}| \le q^2\,|a_{n-2}-a_{n-3}| \le \ldots \le q^{n-1}\,|a_2-a_1| = q^{n-1}c$$

כעת נתבונן על ההפרש של שני איברים

$$\begin{aligned}
|a_m-a_n| &= |a_m-a_{m-1}+a_{m-1}-a_{m-2}+a_{m-2}+\ldots-a_n| &\le\\
&\le |a_m-a_{m-1}|+|a_{m-1}-a_{m-2}|+\ldots+|a_{n+1}-a_n| &\le\\
&\le q^{m-2}c+q^{m-3}c+\ldots+q^{n-1}c &\le\\
&= q^{n-1}c\left[q^{m-2-n+1}+q^{m-3-n+1}+\ldots+1\right] &=\\
&= q^{n-1}c\left[\frac{1-q^{m-n}}{1-q}\right] &\le\\
&\le q^{n-1}c\left[\frac{1}{1-q}\right] &\to 0
\end{aligned}$$

תרגיל 5. חשב את סכום הטורים הבאים:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+1}{6^n}$

פתרון. נחשב את סכום הטור בעזרת טור הנדסי

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+1}{6^n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{6^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^n} &=\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n &=\\
&= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}} &=\\
&= 1+\frac{1}{5} &= \frac{6}{5}
\end{aligned}$$

.2 $\sum_{n=1}^{\infty} 4\left(-\frac{2}{3}\right)^n$

פתרון. נחשב את סכום הטור בעזרת טור הנדסי

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} 4\left(-\tfrac{2}{3}\right)^n &= \frac{-\frac{8}{3}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \\ &= \frac{-\frac{8}{3}}{\frac{5}{3}} = -\frac{8}{5}\end{aligned}$$

.3 $0.9+0.09+0.009+0.0009+0.00009+\ldots$ האם קבלת תשובה מעניינת?

פתרון. נחשב את סכום הטור בעזרת טור הנדסי

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 1$$

נשים לב שקבלנו ש-$1 = 0.9999999999999999...$