שם הקורס: טופולוגיה
שם המרצה: דר' נוביק
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

פתרון תרגיל בית 4 – טופולוגיה

שאלה 1

א. הוכיחו את הטענה הבאה: A סגורה $\Leftrightarrow$ $A'\subseteq A$.

ב. מצאו את נקודות ההצטברות של תת הקבוצות הבאות של המרחב המטרי $\mathbb{R}$:

1. $\mathbb{Q}$,
2. $(0,1)$.

פתרון

סעיף א

$\Leftarrow$: תהי $x\in A'$, אזי קיימת סדרה $\{x_n\}\subseteq A\setminus\{x\}$ כך ש-$x_n\to x$. מתקיים ש-$\{x_n\}\subseteq A$ ומכיוון ש-A היא קבוצה סגורה, היא מכילה את כל נקודות הגבול של הסדרות שמתכנסות שלה ולכן $x\in A$.

$\Rightarrow$: נתון $A'\subseteq A$. נבחר סדרה מתכנסת $\{x_n\}\subseteq A$, $x_n\to x\in X$ ונרצה להראות ש-$x\in A$. נניח בשלילה ש-$x\notin A$. אבל אז $\{x_n\}\subseteq A=A\setminus\{x\}$ ומכאן $x\in A'$. היות ו-$A'\subseteq A$ נקבל $x\in A$ בסתירה להנחה. לכן A סגורה.

סעיף ב

1. מכיון שבין כל שני מספרים ממשיים נמצא מס' רציונלי נקבל שקבוצת נק' הצטברות של $\mathbb{Q}$ היא כל $\mathbb{R}$. שכן לכל $r\in\mathbb{R}$ ולכל $\varepsilon>0$ קיים מספר רציונלי גדול מ-r וקטן מ-$r+\varepsilon$.
2. נראה שאוסף נקודות ההצטברות של $(0,1)$ הוא הקבוצה $[0,1]$.

אמנם,לכל $a\in(0,1)$ הסדרה $\left\{a+\frac{1-a}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מוכלת ב $(0,1)\setminus\{a\}$ ומתכנסת ל-a. מהתבוננות בגבול הסדרות $\left\{1-\frac{1}{2n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\left\{\frac{1}{2n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ניתן להסיק שגם הנקודות $0,1$ הינן נקודות הצטברות של $(0,1)$. לבסוף, לכל $r\in\mathbb{R}$ כך ש $1<r$ או $r<0$, r **לא** נקודת הצטברות של $(0,1)$. אכן, לא ניתן לבנות סדרה ב-$(0,1)$ שתתכנס ל-r כזה. (ידוע מאינפי' שאם $0<x_n<1$ ו- $x_n\underset{n\to\infty}{\to}a$ אזי $0\le a\le 1$).

שאלה 2

יהי X מ"מ ותהי $S\subseteq X$ תת קבוצה ו-$x\in S$. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

א. $x\in S-S'$ (הפרש קבוצות).
ב. קיים $\varepsilon>0$ כך ש-$B(x,\varepsilon)\bigcap S=\{x\}$.
ג. לכל סדרה $\{x_n\}\subseteq S$, אם $x_n\to x$ אזי $\{x_n\}$ קבועה לבסוף.

פתרון

א $\Leftarrow$ ב: $x\notin S'$. כלומר x אינה נקודת הצטברות של S. מכאן קיים $\varepsilon>0$ כך ש-$\left(B(x,\varepsilon)\setminus\{x\}\right)\bigcap S=\varnothing$. $x\in S$ עפ"י הנתון וכמו כן $x\in B(x,\varepsilon)$. מכאן, $\{x\}\subseteq B(x,\varepsilon)\bigcap S$. נניח בשלילה שקיים $x\neq y\in B(x,\varepsilon)\bigcap S$. נקבל ש $y\in\left(B(x,\varepsilon)\setminus\{x\}\right)\bigcap S$. אך זוהי סתירה לכך ש $\left(B(x,\varepsilon)\setminus\{x\}\right)\bigcap S=\varnothing$.
בסה"כ נקבל ש $B(x,\varepsilon)\bigcap S=\{x\}$ כדרוש.

ב $\Leftarrow$ ג: תהי $\{x_n\}\subseteq S$ ונניח ש $x_n\to x$. עפ"י סעיף ב' קיים $\varepsilon>0$ כך ש-$B(x,\varepsilon)\bigcap S=\{x\}$. מהגדרת הגבול קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq n_0$ $x_n\in B(x,\varepsilon)$. מכיון ש-$\{x_n\}\subseteq S$ נקבל שלכל $n\geq n_0$ $x_n\in B(x,\varepsilon)\bigcap S=\{x\}$. מכאן לכל $n\geq n_0$ $x_n=x$.

ג$\Leftarrow$א: נניח בשלילה ש- $x\in S'$. כלומר x נקודת הצטברות של S. מכאן, קימת סדרה $\{x_n\}\subseteq S\setminus\{x\}$ כך ש- $x_n\to x$. עפ"י הנתון בסעיף ג' קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq n_0$ $x_n=x$, בסתירה לכך ש- $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq S\setminus\{x\}$.

שאלה 3

א. יהי X מ"מ שלם ותהי A תת קבוצה סגורה של X. הוכיחו ש-A תת מרחב מטרי שלם.
ב. יהי X מ"מ ו-$A\subseteq X$ תת מרחב מטרי שלם של X. הראו ש-A תת קבוצה סגורה של X.
ג. הוכיחו או הפריכו: אם X מ"מ שלם, ו-$f:X\to\mathbb{R}$ היא פונקציה רציפה, אזי $f(X)$ תת מרחב שלם של $\mathbb{R}$.

<u>פתרון</u>

א. ניקח סדרת קושי ב-A : $\{x_n\} \subseteq A$. נרצה להראות שהסדרה מתכנסת לנקודה ב-A. כעת, $\{x_n\}$ היא סדרת קושי ב-X ומכיוון ש-X שלם, קיים $x \in X$ כך ש-$x_n \to x$. בגלל ש-A סגורה היא מכילה את נקודות הגבול של הסדרות המתכנסות שלה, ולכן $x \in A$.

ב. על מנת להראות ש-A סגורה נראה שהיא מכילה את כל נקודות הגבול שלה. תהי $\{x_n\} \subseteq A$ סדרה מתכנסת ל-$x \in X$. נרצה להראות ש-$x \in A$. אמנם, $\{x_n\}$ היא סדרה מתכנסת ולכן סדרת קושי. מכיוון ש-A שלם נקבל ש-$x_n \to y \in A$. כעת, X מרחב מטרי ולכן גבול הסדרה הוא יחיד ולכן $x = y$ ונסיק הדרוש.

ג. הפרכה. ניקח למשל $X = \mathbb{Q}$ עם המטריקה הדיסקרטית, וניקח את f להיות פונקצית ההכלה. X הוא שלם (מדוע?) וכן f רציפה (כל פונקציה ממרחב מטרי דיסקרטי היא רציפה (מדוע?)). עם זאת, תת המרחב $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R}$ אינו שלם. שימו לב שהמטריקה על $f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ היא זו המושרית מהמטריקה הסטנדרטית האוקלידית של $\mathbb{R}$ וכידוע מאינפי' 1, $\mathbb{Q}$ עם מטריקה זו אינו שלם.

<u>שאלה 4</u>

נסמן ב-A' את אוסף נקודות ההצטברות של A; נסמן ב-A'' את אוסף נקודות ההצטברות של A' וכן הלאה.

יהי (X,d) מ"מ, תהי $\{x_n\}$ סדרה שכל איבריה שונים המתכנסת ל-$x \in X \setminus A$ כאשר $A = \{x_n\}$.

א. מצאו את A', A''.
ב. האם A קומפקטי?
ג. האם $A \cup \{x\}$ קומפקטי? נמקו את תשובתכם אך ורק באמצעות הגדרת הקומפקטיות דרך **כיסוים פתוחים**!

<u>פתרון</u>

א. טענה: $A'=\{x\}$. תחילה, ברור ש-$\{x\}\subseteq A'$ (שכן יש סדרה מתוך $A\setminus\{x\}$ המתכנסת ל-x). נראה ש-$A'\subseteq\{x\}$. נניח בשלילה שקיימת נקודה $x\neq y\in A'$. נסמן $\varepsilon=d(x,y)$. מתקיים $B\left(x,\frac{\varepsilon}{2}\right)\cap B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)=\varnothing$. אכן, אם $z\in B\left(x,\frac{\varepsilon}{2}\right)\cap B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)$ אז $d(x,y)\le d(x,z)+d(y,z)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ בסתירה להגדרת ε. מכיון ש-y היא נקודת הצטברות, קיימת סדרה $\{y_n\}\subseteq A$ שכל איבריה שונים המתכנסת ל-y. כלומר, עבור ה-ε שהגדרנו קודם, קיים n_0 כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים $y_n\in B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)$. כעת, מכיון ש-$x_n\to x$ קיים n_1 כך שלכל $n\ge n_1$ מתקיים $x_n\in B\left(x,\frac{\varepsilon}{2}\right)$. כלומר, פרט למספר סופי של איברים, כל איברי הקבוצה A נמצאים בסביבת $\frac{\varepsilon}{2}$ של x. מכיון ש-$\{y_n\}$ אינסופית נסיק מהנ"ל שקיים איבר בחיתוך $B\left(x,\frac{\varepsilon}{2}\right)\cap B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)$ בסתירה לכך ש-$B\left(x,\frac{\varepsilon}{2}\right)\cap B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)=\varnothing$.

לגבי A'': מכיון ש-A' סופית, איך לה נקודות הצטברות ולכן $A''=\varnothing$.

ב. כזכור, מרחב מטרי הוא קומפקטי אמ"מ לכל קבוצה אינסופית יש נקודת הצטברות. A תת קבוצה אינסופית של המרחב A, תת המרחב המטרי של (X,d), ללא נקודות הצטברות בתת המרחב המטרי (A,d) (למה?) לכן A אינו קומפקטי.

ג. $A\bigcup\{x\}$ קומפקטי. נוכיח באמצעות כיסויים. יהי $\{U_i\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח של $A\bigcup\{x\}$, ונראה שקיים לו תת כיסוי סופי. קיים i_0 כך ש-$x\in U_{i_0}$. מכיוון ש-$x_n\to x$, קיים n_0 כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים $x_n\in U_{i_0}$. כעת, לכל $j\in\{1,2,3,\ldots,n_0-1\}$ קיים U_{i_j} כך ש-$x_i\in U_{i_j}$. לכן תת הכיסוי הסופי הדרוש הוא $\left\{U_{i_1},U_{i_2},\ldots,U_{i_{n_0-1}},U_{i_0}\right\}$.

שאלה 5

יהי X מ"מ ויהי Y אוסף אינסופי בן מניה של נקודות מתוך X, כך שלכל שתי נקודות שונות $a,b\in Y$ מתקיים $1\le d(a,b)\le 2$. הוכיחו:

א. Y סגור וחסום ב- X.
ב. האם Y תת מרחב קומפקטי (ביחס למטריקת תת המרחב)?

פתרון

א. ברור ש- Y חסום (לפי ההגדרה); נראה שהוא סגור. תהי $\{x_n\}\subseteq Y$ כך ש- $x_n\to x\in X$ ונראה ש- $x\in Y$. אם $x_n\to x\in X$ אזי לכל $\varepsilon>0$, ובפרט עבור $\varepsilon=\frac{1}{2}$, קיים n_0 כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים $x_n\in B\left(x,\frac{1}{2}\right)$. לכן, לכל $n_1,n_2\ge n_0$ מתקיים $x_{n_1},x_{n_2}\in B\left(x,\frac{1}{2}\right)$ ולכן $d\left(x_{n_1},x_{n_2}\right)<1$, ואם הנקודות שונות, אזי $1\le d\left(x_{n_1},x_{n_2}\right)<1$ וזאת סתירה. לכן $x_{n_1}=x_{n_2}$. כלומר, כל סדרה מתכנסת מתוך Y היא קבועה לבסוף, ולכן $x\in Y$.

ב. המרחב אינו קומפקטי. נשים לב ש- $\left\{B\left(a,\frac{1}{2}\right)\right\}_{a\in Y}$ הוא כיסוי פתוח של Y שאין לו תת כיסוי סופי (שכן, למעשה, כל איבר בכיסוי מכיל נקודה אחת בדיוק מתוך Y).
[דרך נוספת: נשים לב ש- Y הוא מרחב דיסקרטי (מדוע?) ולכן קומפקטי אמ"מ סופי.]

שאלה 6

בתרגיל זה תוכיחו כי כל מטריקה שקולה למטריקה חסומה.

יהי (X,d) מ"מ**.** נגדיר שתי מטריקות על X**:** $\tilde{d},\rho$.

$$\rho(x,y)=\min\{d(x,y),1\}\quad,\quad \tilde{d}(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$ לכל $x,y\in X$ **.**

א. הוכיחו כי אלה אכן מטריקות.
(במידה ועשיתם זאת באינפי' 3 – אין צורך שתעשו שוב. אם לא עשיתם – זה תרגיל טוב.)

ב. הוכיחו כי המטריקות הן חסומות.
הערה: מטריקה ρ נקראת "חסומה" אם קיים $r>0$ כך שלכל x,y מתקיים $\rho(x,y)\le r$ (שקול להגדרות שניתנו בתרגול האחרון).

ג. הוכיחו כי d, $\tilde{d}$ ו- ρ שקולות.

פתרון

נוכיח רק סעיפים ב',ג'.

סעיף ב'

המטריקה $\tilde{d}$ חסומה שכן $\tilde{d}(x,y)\le 1$ לכל $x,y\in X$, וכנ"ל לגבי $\rho(x,y)$.

סעיף ג'

נוכיח רק את השקילות של $d,\tilde{d}$:

נניח $\{x_n\}\xrightarrow{d}x$. נקבל

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{d}(x_n,x)=\lim_{n\to\infty}\frac{d(x_n,x)}{1+d(x_n,x)}=\frac{0}{1+0}=0\Rightarrow\{x_n\}\xrightarrow{\tilde{d}}x.$$

מצד שני $d(x,y)=\frac{\tilde{d}(x,y)}{1-\tilde{d}(x,y)}$. לכן אם $\{y_n\}\xrightarrow{\tilde{d}}y$ נקבל

$\lim_{n\to\infty}d(y_n,y)=\lim_{n\to\infty}\frac{\tilde{d}(y_n,y)}{1-\tilde{d}(y_n,y)}=\frac{0}{1-0}=0\Rightarrow\{y_n\}\xrightarrow{d}y$. לכן המטריקות שקולות.

שאלה 7

יהי (X,d) מ"מ קומפקטי. תהי $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ סדרה בעלת גבול חלקי יחיד לכל היותר. הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

<u>הדרכה</u>: ראשית הראו שלסדרה אכן קיים גבול חלקי $a \in X$. כעת הניחו בשלילה שהסדרה לא מתכנסת ל-a ובנו תת סדרה $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ כך ש-$d\left(x_{n_k}, a\right) \geq \varepsilon$. מכאן הגיעו לסתירה.

<u>פתרון</u>

ל $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ בהכרח קיימת תת סדרה מתכנסת שכן $\left(X,d\right)$ מ"מ קומפקטי.
מהנתון נקבל שֶלְ- $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ גבול חלקי יחיד $a \in X$. נראה שהסדרה $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת ל-a. נניח בשלילה שהסדרה לא מתכנסת ל-a. לכן,
קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $n_0 > n$ כך ש $d\left(x_{n_0}, a\right) \geq \varepsilon$ (*)
בעזרת (*) ניתן לייצר תת סדרה $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ כך ש $d\left(x_{n_k}, a\right) \geq \varepsilon$. אכן, עבור $n=1$ קיים $n_1 > 1$ כך ש $d\left(x_{n_k}, a\right) \geq \varepsilon$. נניח ש $\{n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}\}$ כבר הוגדרו כך ש-$d\left(x_{n_t}, a\right) \geq \varepsilon$ לכל $1 \leq t \leq k-1$ ו- $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_{k-1}$. כעת, בעזרת (*) נקבל שעבור $n_{k-1} \in \mathbb{N}$ קיים $n_k > n_{k-1}$ כך ש $d\left(x_{n_k}, a\right) \geq \varepsilon$.
כעת, לסדרה $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ יש תת סדרה מתכנסת $\{x_{n_{k_l}}\}_{l\in\mathbb{N}}$ כי $\left(X,d\right)$ מ"מ קומפקטי.
בהכרח גבול הסדרה $\{x_{n_{k_l}}\}_{l\in\mathbb{N}}$ הוא a (מדוע?). אבל זה בלתי אפשרי שכן $d\left(x_{n_{k_l}}, a\right) \geq \varepsilon$ לכל $l \in \mathbb{N}$.