

מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 5 (פתרון)

1. להוכיח נתבונן בקבוצת תת-קבוצות σ שאיבריה הם המשלימים של איבריה של τ :

$\sigma = \{X\} \cup \{F \subseteq X \mid |F| \leq \alpha_0\}$. מספיק לבדוק שלאיברים של σ מתקיימות שלושת התכונות הבסיסיות של קבוצות סגורות:

- i. יהיו $A_\alpha \in \sigma$ לכל $\alpha \in \Lambda$. אם קיים α_0 כך ש- A_{α_0} בת מניה או סופית אז כל החיתוך $A_{\alpha_0} \supseteq \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ הוא קבוצה בת מניה או סופית ולכן שייך ל- σ . אחרת: $A_\alpha = X$ לכל $\alpha \in \Lambda$ ו- $\sigma \ni X = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$.
- ii. יהיו $A_i \in \sigma$ לכל $i : 1 \leq i \leq n$. אם קיים i_0 כך ש- $X = A_{i_0}$ אז כל האיחוד $X = A_1 \cup \dots \cup A_n$ $\sigma \ni X$. אחרת: האיחוד הוא קבוצה בת מניה או סופית ולכן שייך ל- σ .
- iii. $X \in \sigma$ לפי ההגדרה של σ . $\emptyset \in \sigma$ כקבוצה סופית.

2. נגדיר פונקציה $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש- $f(x) = d(a_1, x) - d(a_2, x)$ לכל $x \in X$. תהא טופולוגיה ב- \mathbb{R} מושרת על ידי מטריקה רגילה. נוכיח ש- f רציפה ובשביל זה נוכיח ש- f רציפה בכל נקודה. תהא b נקודה כלשהי ב- X ו- V סביבה של $f(b)$ ב- \mathbb{R} . אזי קיים $\varepsilon > 0$ כך ש- $B(f(b), \varepsilon) \subseteq V$. נקח $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. יהי $d(x, b) < \delta$. אז לפי אי שוויון המשולש עבור מטריקה ב- \mathbb{R} :

$$|f(x) - f(b)| = |d(a_1, x) - d(a_2, x) - d(a_1, b) + d(a_2, b)| \leq |d(a_1, x) - d(a_1, b)| + |d(a_2, x) - d(a_2, b)| \leq [לפי אי שוויון המשולש עבור מטריקה ב- X] \leq d(x, b) + d(x, b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

במילים אחרות קיבלנו: $d(x, b) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(b)| < \varepsilon$ או - במינוח מרחבים טופולוגיים, אם נסמן $B(b, \delta)$ ב- U - $f(U) \subseteq B(f(b), \varepsilon) \subseteq V$. הוכחנו ש- f רציפה בכל נקודה $b \in X$, לכן f רציפה.

לפי הגדרה של f : $f(x) = 0 \Leftrightarrow d(a_1, x) = d(a_2, x)$
 לכן $Y = f^{-1}(\{0\})$ אבל $\{0\}$ – קבוצה סגורה ב- \mathbb{R}
 כי $\{0\}^c = (0, \infty) \cup (-\infty, 0)$ קבוצה פתוחה.
 אזי מרציפות של f נובע ש- $Y = f^{-1}(\{0\})$ סגורה כתמונה הפוחה של
 קבוצה סגורה, מש"ל.

3. א' אנחנו נוכיח תכונות "a-h" בסדר הבא: a,c,b,e,d,f,g,h

- "a" $A \subseteq Cl(A)$ מוכלת בכל קבוצה מהחיתוך של ההגדרה,
 אזי היא מוכלת בחיתוך עצמו.
- "c" $Cl(A)$ קבוצה סגורה: כחיתוך סגורות.
- "b" $A \subseteq B \Rightarrow Cl(A) \subseteq Cl(B)$ לפי "a" $A \subseteq B \subseteq Cl(B)$.
 לפי "c" $Cl(B)$ סגורה. אבל לפי ההגדרה $Cl(A)$ מוכלת בכל
 תת-קבוצות סגורות המכילות את A . לכן $Cl(A) \subseteq Cl(B)$.
- "e" $Cl(A) = A \Leftrightarrow$ סגורה A
 \Leftarrow לפי "a" $A \subseteq Cl(A)$ אבל A סגורה ומכילה את עצמה ולכן
 מכילה את $Cl(A)$ לפי הגדרת הסגור. אזי $Cl(A) = A$.
 \Rightarrow לפי "c" $Cl(A)$ סגורה. אזי A סגורה.
- "d" $Cl(Cl(A)) = Cl(A)$ לפי "c" $Cl(A)$ סגורה. לכן לפי "e"
 מקבלים $Cl(Cl(A)) = Cl(A)$.
- "f" נקודה p שייכת ל- $Cl(A)$ א"א כל סביבה של p נחתכת עם A .
 \Leftarrow נניח $p \in Cl(A)$ ו-(בדרך השלילה) קיימת סביבה U של p כך
 ש- $U \cap A = \emptyset$. אזי U^c סגורה ו- $A \subseteq U^c$. אז לפי הגדרת הסגור
 $Cl(A) \subseteq U^c$ ולכן- $p \in U^c$. סתירה.
 \Rightarrow נניח כל סביבה של p נחתכת עם A ו-(בדרך השלילה)
 $p \notin Cl(A)$. אזי לפי "c" $Cl(A)$ קבוצה סגורה ולכן $(Cl(A))^c$
 פתוחה. מכיוון ש- $p \in (Cl(A))^c$ אמורה להיחתך
 עם A , אבל זה לא יכול להיות כי $(Cl(A))^c \subseteq A^c$ לפי "a".
 סתירה.
- "g" $Int(A)$ קבוצה פתוחה: כאיחוד קבוצות פתוחות.

“h” Int(A) היא קבוצה של כל הנקודות הפנימיות ב-A.

$a \in Int(A) \Leftrightarrow a \in A$ נקודה פנימית של A אז קיימת סביבה פתוחה $U \subseteq A$ של a ולכן $a \in U \subseteq Int(A)$ לפי ההגדרה של $Int(A)$.
 $a \in Int(A) \Leftrightarrow a \in A$ (פנימית) לפי ההגדרה, ולפי “g”
 $Int(A)$ קבוצה פתוחה. לכן אם $a \in Int(A)$, אז a נקודה פנימית של A.

ב' לפי הגדרת הסגור ותורת הקבוצות:

$$Cl(A^c) = \bigcap_{\substack{A^c \subseteq F \subseteq X \\ F \text{ סגורה}}} F = \bigcap_{\substack{A^c \subseteq U^c \subseteq X \\ U \text{ פתוחה}}} U^c = \bigcap_{\substack{U \subseteq A \subseteq X \\ U \text{ פתוחה}}} U^c$$

לפי חוקי דה מורגן והגדרת הפנים:

$$(Cl(A^c))^c = \bigcup_{\substack{U \subseteq A \subseteq X \\ U \text{ פתוחה}}} U = Int(A)$$

מש"ל.

ג' לפי תורת הקבוצות:

$$Cl(A) - Int(A) = Cl(A) \cap (Int(A))^c$$

לפי א' - "c" $Cl(A)$ סגורה. לפי א' - "g" $Int(A)$ פתוחה. לכן $(Int(A))^c$ סגורה ו- $Cl(A) - Int(A)$ סגורה, מש"ל.

תזכורת. ידוע מקורסים הקודמים:

(1). בין שני מספרים ממשיים שונים קיים מספר רציונלי.

(2). עוצמה של כל קטע ב- \mathbb{R} (חוץ מנקודון) גדולה מ- \aleph_0 .

4. תשובה: $Int(A) = \emptyset$.

הוכחה. נניח בדרך השלילה שקיימת נקודה $x \in Int(A)$

אזי לפי 3-א' "g" והגדרת הפנים קיים $\varepsilon > 0$

כך ש- $x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq Int(A) \subseteq A$

אבל לפי "2" עוצמה של $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ גדולה מ- \aleph_0 . סתירה.

5. הוכחה. בכל קבוצה פתוחה ב- \mathbb{R} מוכל קטה פתוח. אבל לפי "ת1" בכל קטע פתוח מוכל מספר רציונלי, ז"א, מספר מ- \mathbb{Q} . לכן \mathbb{Q} צפופה ב- \mathbb{R} .
 \mathbb{Q}^c - קבוצה בת מניה לכן לפי "ת2" בכל קטה פתוח יש מספרים מ- \mathbb{Q}^c .
 לכן באותה לוגיקה \mathbb{Q}^c צפופה ב- \mathbb{R} .

6. הוכחה. נניח בדרך השלילה שקיימת נקודה $x \in X$ כך ש- $f(x) \neq g(x)$, זאת אומרת, $0 < d(f(x), g(x)) = \varepsilon$.
 מכיוון ש- f, g רציפות אז כל אחת מהן רציפה בנקודה x .
 נזכיר שכדורים פתוחים הם קבוצות פתוחות במרחב מטרי.
 לכן לפי הגדרת רציפות פונקציה בנקודה אנחנו מקבלים:
 קיימת סביבה U_x של x כך ש- $f(U_x) \subseteq B(f(x), \frac{\varepsilon}{2})$,
 וקיימת סביבה V_x של x כך ש- $g(V_x) \subseteq B(g(x), \frac{\varepsilon}{2})$.
 נקח $W_x = U_x \cap V_x$. אזי W_x קבוצה פתוחה ולכן מכילה נקודות מ- A (בגלל הצפיפות A ב- X). אבל אם $a \in W_x \cap A$, אז $f(a) = g(a)$ כי $f|_A = g|_A$. יהי $b = f(a) = g(a)$. אז מקבלים:
 $b \in f(W_x) \subseteq f(U_x) \cap f(V_x) \subseteq B(f(x), \frac{\varepsilon}{2}) \cap B(g(x), \frac{\varepsilon}{2}) = \emptyset$.
סתירה.