

מד"ר למתמטיקאים

תרגיל 2

1. מצאו פתרון כללי למד"ר הבאות:

$$t^2 y'' = y'^2, \quad t > 0 \quad (\text{א})$$

$$y y'' - y'^3 = 0 \quad (\text{ב})$$

$$y_1 = \sin(t^2) \quad \text{כי} \quad t y'' - y' + 4t^3 y = 0, \quad t > 0 \quad (\text{ג})$$

$$(1 + t^2) y'' + 2t y' + 3/t^2 = 0 \quad (\text{ד})$$

$$t^2 y'' + t y' + y = 0 \quad t \neq 0 \quad (\text{ה}) \quad (\text{משוואת אוילר})$$

2. משוואה מהצורה

$$(1) \quad P(x) y'' + Q(x) y' + R(x) = 0$$

נקראת מדויקת אם היא ניתנת לכתיבה כ

$$(2) \quad (P(x) y')' + (f(x) y)' = 0$$

כאשר $f(x)$ תלויה בפונקציות $P(x), Q(x)$ ו $R(x)$. מאינטגרציה של המד"ר מסדר ראשון $P y' + f y = c_1$ המתקבלת ממשוואה (2) מתקבל פתרון למשוואה (1). ניתן להראות כי תנאי הכרחי ומספיק לכך שמשוואה (1) מדויקת הוא $P''(x) - Q'(x) + R(x) = 0$. אם משוואה (1) אינה מדויקת ניתן להפוך אותה לכזו ע"י הכפלה בגורם אינטגרציה $\mu(x)$. אזי ניתן לרשום

$$(3) \quad (\mu(x) P(x) y')' + (f(x) y)' = 0,$$

כאשר $\mu(x)$ מקיימת את המשוואה הצמודה (adjoint equation)

$$(4) \quad P \mu'' + (2P' - Q) \mu' + (P'' - Q' + R) \mu = 0.$$

בדקו האם המשוואה $y'' + \frac{4x}{2x-1} y' + \frac{8x-8}{(2x-1)^2} y = 0$ מדויקת. אם לא, פתרו אותה ע"י מציאת גורם אינטגרציה מפתרון המשוואה הצמודה המתאימה ואינטגרציה של המד"ר $\mu P y' + f y = c_1$.

3. פתרו את בעיות ההתחלה הבאות:

$$6y'' - 5y' + y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 0 \quad (\text{א})$$

$$y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (\text{ב})$$

$$y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (\text{ג})$$

$$4y''' + y' + 5y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -1 \quad (\text{ד})$$

$$y^{(4)} + 6y''' + 17y'' + 22y' + 14y = 0, \quad (\text{ה})$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -2, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 3$$

4. מצאו פתרון כללי למד"ר הבאות:

$$0 < \lambda \neq m\pi, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad y'' + \lambda^2 y = \sum_{m=1}^N a_m \sin m\pi t \quad (\text{א})$$

$$y''' - y'' - y' + y = 2e^{-t} + 3 \quad (\text{ב})$$

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 3 + \cos 2t \quad (\text{ג})$$

$$y''' + y' = \tan t, \quad 0 < t < \pi/2 \quad (\text{ד})$$

$$y''' - y' = \csc t, \quad 0 < t < \pi \quad (\text{ה})$$

5. הוכיחו כי אם $\phi(x)$ פתרון לא טריויאלי של המד"ר

$$(5) \quad y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0,$$

כאשר $p_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ רציפות בקטע (a, b) , אזי לפונקציות $\phi(x), \phi'(x), \phi''(x), \dots, \phi^{(n-1)}(x)$ אין אף שורש משותף ב (a, b) .
(רמז: $\phi(x) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(x)$ כסכום פתרונות יסודיים של המד"ר).

6. הוכיחו כי בהינתן פיתרון $y_1(x)$ של המד"ר $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, אזי פתרון זה והפיתרון השני המתקבל ע"י ההצבה $y_2 = v(x)y_1(x)$ בלתי תלויים לינארית.