שאלון בחינה בקורס: גיאומטריה דיפרנציאלית ואנליטית (88-201)
שם המרצה: פרופ׳ מיכאל כץ
סמסטר א׳, מועד ב׳: 28.08.2016

<u>יש לנמק ולהצדיק את כל התשובות.</u> כל שאלה שווה 22 נקודות.

<u>משך הבחינה: שלוש שעות.</u>

1. נתונה תבנית ריבועית $Q(x,y)=3x^2+4xy-6y^2$
   א. עקומה מישורית מוגדרת ע״י המשוואה $Q(x,y)=-1$. לאפיין את העקומה.
   ב. לאפיין את המשטח המתקבל כ-גרף של התבנית הריבועית $z=Q(x,y)$?
   ג. לחשב את עקמומיות גאוס של הגרף בנקודה $(0,0,0)$.

2. יהי $M\subseteq\mathbb{R}^3$ משטח עם פרמטריזציה $x(u^1,u^2)$.
   א. פרטו ארבעה דרכים של חישוב של עקמומיות גאוס של משטח $M\subseteq\mathbb{R}^3$.
   ב. נניח שהמטריקה היא $\frac{c^2}{y^2}\left(dx^2+dy^2\right)$ כאשר $x=u^1$ ואילו $y=u^2$, וחשב את עקמומיות גאוס $K=K(x,y)$ שלה.
   ג. נניח שמטריקה היא $\left((\sin^2\varphi)d\theta^2\right)+d\varphi^2$ כאשר $\theta=u^1$ ואילו $\varphi=u^2$, וחשב את העקמומיות $K=K(\theta,\varphi)$ של המטריקה.

3. יהי M משטח.
   א. עבור משטח M עם מקדמים (g_{ij}) של התבנית היסודית הראשונה, בקואורדינטות (u^i), תנו את הגדרה מפורטת של אלמנט השטח dA שלה.
   ב. בטאו באופן מפורט את המשפט גאוס-בוננה עבור משטח סגור קמור M.
   ג. עבור משטח $M_1\subseteq\mathbb{R}^3$ מוגדר על ידי משוואה $x^2+3y^2+2z^2=1$ מצאו את האינטגרל $\int_{M_1}KdA$ כאשר K היא עקמומיות גאוס.
   ד. יהי $n>0$ מספר טבעי. עבור משטח $M_2\subseteq\mathbb{R}^3$ מוגדר על ידי משוואה $\prod_{k=1}^{n}\left((x-9k)^2+y^2+z^2-1\right)=0$ מצאו את האינטגרל $\int_{M_2}KdA$.

4. כתוב את הביטוים הבאים באמצעות Γ_{ij}^k, $L^k{}_\ell$, L_{ij}, או g_{ij} ולפשט כל מה שאפשר:
   א. $\left\langle x_{\ell j},x_k\right\rangle(\delta^k{}_m)g^{m\ell}$.
   ב. $\left\langle n_j,x_{pq}\right\rangle(\delta^j{}_r)$.
   ג. $\left\langle x_{stu},n\right\rangle$.
   ד. $g_{pq}(\delta^q{}_s)g^{su}(\delta^p{}_u)$

5. נניח שמשטח מקיים $g_{12}=L_{12}=0$.

א. תנו הגדרה מפורטת של עקמומיויות ראשיות k_1 ו- k_2.

ב. בטא את העתקת Weingarten ע"י מטריצה באמצעות מקדמי תבניות ראשונה ושנייה.

ג. חשב את היחס k_1/k_2 באמצעות מקדמי תבניות יסודיות ראשונה ושניה.

ד. מצא את k_1/k_2 במקרה של משטח סיבוב המתקבל על-ידי סיבוב של פרבולה $x = z^2 + \frac{1}{4}$ מסביב לציר z.

בהצלחה!