תרגול 1

guy.blachar@gmail.com

שעות קבלה: בתיאום מראש

הגדרה:

בהינתן קבוצה Ω, משפחה $\mathcal{F}\subseteq P(\Omega)$ נקראת <u>אלגברה</u> אם הוא מקיימת:

א. $\phi\in\mathcal{F}$

ב. $A\in\mathcal{F} \Leftarrow A^c\in\mathcal{F}$

ג. $\mathcal{F}$ סגורה לאיחודים סופיים, כלומר $A,B\in\mathcal{F} \Leftarrow A\cup B\in\mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ היא <u>σ-אלגברה</u> אם היא סגורה לאיחודים בני מנייה.

$(\Omega,\mathcal{F})$ <u>מרחב מדיד</u>.

תרגיל:

תהי Ω קבוצה ותהי $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ משפחה של σ-אלגבראות. אז גם $\mathcal{F}=\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$ הוא σ-אלגברה.

הגדרה:

תהי Ω קבוצה ותהי $A\subset P(\Omega)$ משפחה של תת-קבוצות של Ω. <u>הσ-אלגברה הנוצרת ע"י A</u> היא הσ-אלגברה המינימלית על Ω שמכילה את A.

$$\sigma(A)=\bigcap_{\mathcal{F}:A\subseteq\mathcal{F}}\mathcal{F}$$

הגדרה:

אם $(X,\mathcal{T})$ מרחב טופולוגי, <u>σ-אלגברת בורל</u> על X הוא הσ-אלגברה שנוצרת ע"י הקבוצות הפתוחות ב-X. נסמן $\mathbb{B}(X)$.

דוגמה:

אם ניקח $\mathbb{B}(\mathbb{R})$, זו הσ-אלגברה שנוצרת ע"י כל הקטעים (a,b), או ע"י $[a,b]$, או ע"י (a,∞)...

הגדרה:

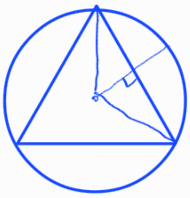
מידת הסתברות על מרחב מדיד $(\Omega,\mathcal{F})$ היא פונקציה $P:\Omega\to[0,1]$ שמקיימת:

א. $P(\Omega)=1$.

ב. אם $\{A_n\}\subseteq\mathcal{F}$ משפחת קבוצות זרות בזוגות, אז $P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$.

$(\Omega,\mathcal{F},P)$ **מרחב הסתברות**.

תרגיל: (בעיית ברטרנד)



מסתכלים על מעגל ומגרילים בתוכו מיתר. מה הסיכוי שהמיתר ארוך יותר מאורך הצלע של המשולש שווה הצלעות שחסום במעגל?

א. בוחרים את המיתר בין שתי נקודות קצה אקראיות.

ב. מקצים את המיתר במאונך לנקודה אקראית על רדיוס אקראי.

ג. בוחרים את נקודת האמצע שלו באקראי.

פתרון:

א. כדי שזה יקרה אחרי שמגרילים את הנקודה הראשונה צריך שהנקודה השנייה תהיה בין הקודקודים של המשולש המתאים שאחד מקודקודיו הוא הנקודה הראשונה, והסיכוי לכך הוא לפי אורך הקשת $=\frac{1}{3}$.

ב. אם הרדיוס מאונך לצלע של משולש שווה צלעות צריך שהנקודה המוגרלת תהיה בתוך המשולש. אבל הצלע מחלקת את הרדיוס לשני חצאים שווים, לכן הסיכוי הוא $\frac{1}{2}$.

ג. אם הרדיוס הוא 1, האורך של הצלע הולך להיות $\sqrt{3}$.
אם הנקודה שמוגרלת היא (x,y), אורך המיתר הוא

$$2\sqrt{1-x^2-y^2}>\sqrt{3} \iff 1-x^2-y^2>\frac{3}{4} \iff x^2+y^2<\frac{1}{4}$$

הסיכוי לזה שיתקיים $x^2+y^2<\frac{1}{4}$ הוא יחס השטחים בין מעגל ברדיוס $\frac{1}{2}$ למעגל ברדיוס 1 $\Leftarrow$ הסיכוי $=\frac{1}{4}$.

הגדרה:

יהי $(\Omega,\mathcal{F},P)$ מרחב הסתברות. אומרים שסדרת מאורעות $\{A_n\}$ **עולה** אם $A_1\subseteq A_2\subseteq\dots$

יורדת אם $A_1\supseteq A_2\supseteq\dots$.

טענה: (רציפות ההסתברות)

א. אם $\{A_n\}$ סדרת מאורעות עולה, אז $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$

ב. אם $\{A_n\}$ סדרת מאורעות יורדת, אז $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$

תרגיל:

מטילים מטבע הוגן אינסוף פעמים. הוכיחו כי כמעט בוודאות התוצאה "עץ" תתקבל אינסוף פעמים.

הוכחה:

$A_n=\{$התוצאה "עץ" לא מתקבלת החל מהשלב ה-n$\}$. זו סדרת מאורעות עולה

$$A_1\subseteq A_2\subseteq A_3\subseteq\cdots$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\{\text{הטלות שבהן התוצאה "עץ" מתקבלת מספר סופי של פעמים}\}$$

$B_{n,m}=\{$התוצאה "עץ" לא מתקבלת מההטלה ה-n עד להטלה ה-n+m$\}$. זו סדרה יורדת

$$B_{n,1}\supseteq B_{n,2}\supseteq B_{n,3}\supseteq\cdots$$

$$\bigcap_{m=1}^{\infty}B_{n,m}=A_n$$

$$\xrightarrow{\text{רציפות ההסתברות}} P(A_n)=\lim_{m\to\infty}P(B_{n,m})=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^m=0$$

$$\xrightarrow{\text{רציפות ההסתברות}} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)=0.$$

$\square$

התרחשות אסימפטוטית

הגדרה:

יהי $(\Omega,\mathcal{F},P)$ מרחב הסתברות, ותהי $\{A_n\}$ סדרת מאורעות.

א. $\limsup A_n = \{A_n \text{ מתרחשים אינסוף פעמים}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$.

ב. $\liminf A_n = \{\text{כמעט כל ה-}A_n\text{-ים מתרחשים}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$.

ג. אומרים ש-$\{A_n\}$ מתרחשת אינסוף פעמים (infinitely often) i.o. אם $P(\limsup A_n)=1$.

אחרת נאמר שה-i.o. מתרחשת מספר סופי של פעמים (finitely often).

משפט: (למת פאטו)

$$P(\liminf A_n) \le \liminf P(A_n)$$
$$P(\limsup A_n) \ge \limsup P(A_n)$$

תרגיל:

תנו דוגמה שעבורה מתקיימים אי-שוויונות חזקים:

$$P(\liminf A_n) < \liminf P(A_n) < \limsup P(A_n) < P(\limsup A_n).$$

פתרון:

$\Omega=[0,1]$ עם מידת לבג.

$$A_{5n+1}=[0,\tfrac{1}{2}],\qquad A_{5n+2}=(\tfrac{1}{2},1]$$
$$A_{5n+3}=[0,\tfrac{1}{3}),\qquad A_{5n+4}=(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}),\qquad A_{5n+5}=(\tfrac{2}{3},1]$$

$\liminf A_n=\phi$ $\qquad$ $\limsup A_n=\Omega$

$$\underset{0}{\underset{\shortparallel}{P(\liminf A_n)}} < \underset{\frac{1}{3}}{\underset{\shortparallel}{\liminf P(A_n)}} < \underset{\frac{1}{2}}{\underset{\shortparallel}{\limsup P(A_n)}} < \underset{1}{\underset{\shortparallel}{P(\limsup A_n)}}$$

$P(\{1\}) = \frac{2}{3}$, $P(\{0\}) = \frac{1}{3}$, $\Omega = \{0,1\}$

$A_{2n} = \{0\}$, $A_{2n+1} = \{1\}$

$$\underbrace{P(\liminf A_n)}_{=0} < \underbrace{\liminf P(A_n)}_{=\frac{1}{3}} < \underbrace{\limsup P(A_n)}_{=\frac{2}{3}} < \underbrace{P(\limsup A_n)}_{=1}$$