תרגיל 9

.

1. נגדיר

$$A=\begin{pmatrix}0&-1&-1&-1\\-3&3&4&2\\2&-2&-3&-1\\2&-1&-2&0\end{pmatrix}$$

מחישוב שנחסוך לכם: הפ"א של A הוא $p_A(\lambda)=\lambda^4$. שלשו את A. כלומר מצאו P הפיכה כך ש $P^{-1}AP$ משולשית.
פתרון : נמצא ו"ע של ע"ע $\lambda=0$:

$$A=\begin{pmatrix}0&-1&-1&-1\\-3&3&4&2\\2&-2&-3&-1\\2&-1&-2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&-2&0\\-3&3&4&2\\2&-2&-3&-1\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&-2&0\\0&1.5&1&2\\0&-1&-1&-1\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2&-1&-2&0\\0&3&2&4\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&-2&0\\0&1&1&1\\0&3&2&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&-2&0\\0&1&1&1\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&-2&0\\0&1&1&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2&-1&0&-2\\0&1&0&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ומכאן ש

$$V_{\lambda=0}=\left\{\begin{pmatrix}0\\-2t\\t\\t\end{pmatrix}:\ t\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

נגדיר

$$P=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-2&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

ואז

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ונקבל

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

נגדיר

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

עם פ"א $p_B(\lambda) = \lambda^3$ נמצא וע:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ומכאן ש

$$V_{\lambda=0} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

גדיר

$$Q = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

ואז

$$Q^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

ונקבל

$$Q^{-1}P^{-1}APQ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

נגדיר

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

עם פ"א $p_C(\lambda) = \lambda^2$ נמצא וע:

$$C \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ומכאן ש

$$V_{\lambda=0} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} : \, t \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

גדיר

$$R = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

ואז

$$R^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

ונקבל

$$R^{-1}Q^{-1}P^{-1}APQR = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ומכאן כי אם נגדיר $\mathfrak{P} = PQR$ נקבל כי

$$\mathfrak{P}^{-1}A\mathfrak{P}$$

משולשית וסיימנו.

.2

(א) מצא פולינום מינימאלי ל

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times3}$$

פתרון : הפ"א הוא

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= \left|\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -5 & \lambda-4 & 0 \\ -2 & -1 & \lambda-2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ \lambda-5 & \lambda-5 & 0 \\ -2 & -1 & \lambda-2 \end{pmatrix}\right| \\ &= (\lambda-5)\left|\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & \lambda-2 \end{pmatrix}\right| = (\lambda-5)\left|\begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & \lambda-2 \end{pmatrix}\right| = (\lambda-5)(\lambda+1)(\lambda-2) \end{aligned}$$

כיוון שמתפרק לגורמים לינארים שונים זהו גם הפולינומים המינמאלי.

(ב) הוכח כי למטריצות צמודות יש אותו פולינום מינימאלי. (A, B מטריצות צמודות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש $P^{-1}AP = B$)

פתרון : יהיו A, B מטריצות צמודות אזי קיימת מטריצה הפיכה P כך ש $P^{-1}AP = B$.

טענה 1: לכל פולינום $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ מתקיים כי $p(B) = P^{-1}p(A)P$. הוכחה:

$$p(B) = \sum_{i=0}^{n} a_i B^i = \sum_{i=0}^{n} a_i \left(P^{-1}AP\right)^i = \sum_{i=0}^{n} a_i P^{-1}A^iP = P^{-1}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i A^i\right)P = P^{-1}p(A)P$$

כאשר מסתכים על השיוון $\left(P^{-1}AP\right)^i = P^{-1}A^iP$ לכל i כי $\left(P^{-1}AP\right)^i = \left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right)\cdots\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}AA\cdots AP = P^{-1}A^iP$.

טענה 2: לכל מטריצה A ולכל מטריצה הפיכה P מתקיים כי

$$A = 0 \iff P^{-1}AP = 0$$

הוכחה: כיוון אחד מתקבל ע"י הכפלה ב P^{-1} משמאל ו Pמימין והכיוון השני ע"י הכפלה ב P משמאל ו P^{-1} מימין.

כעת, נוכיח את הטענה:

$$0 = m_B(B) = P^{-1}m_B(A)P \iff m_B(A) = 0$$

ולכן m_A מחלק את m_B. באופן דומה m_B מחלק את m_A. כיוון ששינהם פולינומים מתוקנים הם שווים.

(ג) תהא

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{(s+t)\times(s+t)}$$

מטריצה כך ש $B \in \mathbb{F}^{s\times s},\ C \in \mathbb{F}^{t\times t}$. נסמן $m_A(\lambda), m_B(\lambda), m_C(\lambda)$ את הפולינום המינימאלי של A, B, C בהתאמה. הוכיחו או הפריכו

$$m_A(\lambda) = m_B(\lambda)\cdot m_C(\lambda)$$

פתרון : הפרכה:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כאשר $B = C = (0)$ אזי $m_A(\lambda) = \lambda = m_B(\lambda) = m_C(\lambda)$ בפרט לא מתקיים

$$m_A(\lambda) = m_B(\lambda)\cdot m_C(\lambda)$$

(ד) נגדיר

$$J_n(0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{n\times n}$$

בלוק זורדן מגודל n עם 0 על האלכסון. (למשל $J_1(0)=(0)\,,J_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},J_3=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$)

i. הוכיחו כי $J_n(0)$ מטריצה נילפוטננית מסדר n. [תזכורת: מטריצה A היא נילפוטננית מסדר k אם $A^k=0$ ואילו $A^{k-1}\neq 0$]

פתרון : הוכחה: נוכיח באינדוקציה כי $[J_n(0)]^k$ לכל $1\leq k<n$: היא מטריצה שכולה אפסים פרט לאלכסון של אחדות שמתחיל במיקום $(1,k+1)$כלומר $R_i([J_n(0)]^k)=e_{k+i}$

עבור $k=1$ נקבל אכן ש $J_n(0)$ היא מטריצה שכולה אפסים פרט לאלכסון של אחדות שמתחיל במיקום $(1,2)$- לפי הגדרה.

כעת נניח נכונות עבור k ונוכיח עבור $k+1$

$$R_i\left([J_n(0)]^{k+1}\right)=R_i\left([J_n(0)]^k\,J_n(0)\right)=R_i([J_n(0)]^k)\cdot J_n(0)=e_{k+i}J_n(0)=R_{k+i}(J_n(0))=e_{k+i+1}$$

כנדרש.

ii. מצא פ"א ופ"מ של $J_n(0)$:

פתרון : עבור מטריצה A היא נילפוטננית מסדר k , מתקיים לפי הגדרה λ^k פולינום מינימאלי. לכן עבור $J_n(0)$ הפולינום המינימאלי הוא λ^n. כמו כן זהו הפולינום האופייני לפי הגדרה

$$\left|\begin{pmatrix} \lambda & -1 & & & \\ & \lambda & \ddots & & \\ & & \ddots & -1 & \\ & & & \lambda & -1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}\right|=\lambda^n$$

בהצלחה!