תרגיל 1 - פתרון

שאלה 1

אָ' תוכיחו ש- $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$

הוכחה

$y\in f(A\cap B)\Rightarrow \exists x\in A\cap B: f(x)=y$

(*) $x\in A\cap B\Rightarrow x\in A\Rightarrow y=f(x)\in f(A)$

(**) $x\in A\cap B\Rightarrow x\in B\Rightarrow y=f(x)\in f(B)$

(*)^(**) $\Rightarrow y\in f(A)\cap f(B)$

■

בּ' תנו דוגמה ~~נגדית~~ כאשר $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$

יהיו $A=\{1,2\}\subset\mathbb{N},\ \mathrm{B}=\{2,3\}\subset\mathbb{N}$

ותהי $f:\mathbb{N}\to\{0,1\}$ כך ש- $f(n)=\begin{cases}0\ , & n=2\\ 1, & n\neq 2\end{cases}$

אזי $f(A)=f(B)=\{0,1\}$. לכן $f(A\cap B)=f(\{2\})=\{0\}\subset\{0,1\}$.

שאלה 2

תיהי: $f:A\to B$ פונקציה ו- $C\subseteq B$, ו- $D\subseteq A$.

אִי תוכיחו ש-$f\left(f^{-1}(C)\right)=C$ ו- $f^{-1}\left(f(D)\right)\supseteq D$

הערה.

יש תעות בתנאי "$f\left(f^{-1}(C)\right)=C$" : צריך להיות "$f\left(f^{-1}(C)\right)\subseteq C$" כי במידה ופונקציה f לא "על" איבר $c_0\in C$ לא שייך ל- $f(A)$, הוא על אחת כמה וכמה לא יכול להיות שיך ל-$f\left(f^{-1}(C)\right)$. לכן נוכיח רק ש-$f\left(f^{-1}(C)\right)\subseteq C$.

הוכחה.

יהיה $y\in f\left(f^{-1}(C)\right)$. אזי:

$x\in f^{-1}(C): f(x)=y$. אבל

$x \in f^{-1}(C) \Rightarrow f(x) \in C$.

קיבלנו: $y = f(x) \in C$.

זאת אמרת: $y \in f\left(f^{-1}(C)\right) \Rightarrow y \in C$. ■

$f^{-1}\left(f(D)\right) \supseteq D$

הוכחה.

$x \in D \Rightarrow f(x) \in f(D) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(D))$.

שתי הגרירות – לפי הגדרות של תמונה ותמונה הפוכה. ■

ב' תנו דוגמה ~~נגדית~~ כאשר $D \subset f^{-1}\left(f(D)\right)$.

תהי $f: \{0,1\} \to \{0\}$ פונקציה ו-$D = \{0\}$. אז $D = \{0\} \subset \{0,1\} = f^{-1}\left(f(D)\right)$. ■

שאלה 3

א' כל פונקציה מצטמצמת מימין היא פונקצית על.

הוכחה.

נניח – בשלילה - שקיימת $f: A \to B$ המצטמצמת מימין והיא לא על. אזי קיים $b \in B$ כך ש-$b \notin f(A)$.

נגדיר שתי פונקציות $g, h: B \to \{0,1,2\}$ כך ש-

$$g(y) = \begin{cases} 0, & y = b \\ 2, & \text{אחרת} \end{cases} \quad , h(y) = \begin{cases} 1, & y = b \\ 2, & \text{אחרת} \end{cases}$$

אזי לכל $x \in A$ נקבל: $g \circ f(x) = g\left(f(x)\right) = 2$ כי $f(x) \neq b$. באותה לוגיקה: $h \circ f(x) = 2$. לכן לכל $x \in A$: $g \circ f(x) = h \circ f(x)$

. אבל כיוון ש-f המצטמצמת מימין מקבלים לכל $x \in A$ $g(x) = h(x)$,

ו-$g(b) = h(b)$. אבל $g(b) = 0$ ו- $h(b) = 1$. סתירה.

ב' כל פונקציה מצטמצמת משמאל היא פונקציה חח"ע.

הוכחה.

נניח – בשלילה - שקיימת $f: A \to B$ המצטמצמת משמאל והיא לא חח"ע. אזי קיימים $a_1, a_2 \in A$ כך ש- $a_1 \neq a_2$ ו- $f(a_1) = f(a_2)$. נגדיר שתי פונקציות $g, h: \{0\} \to A$ כך ש- $g(0) = a_1$ ו- $h(0) = a_2$.

נקבל: $f \circ g(0) = f\big(g(0)\big) = f(a_1) = f(a_2) = f\big(h(0)\big) = f \circ h(0)$.

לכן $g(0) = h(0)$ כי f מצטמצמת משמאל. אבל מכאן: $a_1 = a_2$. סתירה.

שאלה 4

יהיה (M, d) מרחב מטרי תוכיחו ש-

א' לכל $x, y, z \in M$ מתקיים: $|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z)$

הוכחה.

מאישיוון המשולש: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. לכן

$d(x,y) - d(z,y) \leq d(x,z)$. (*)

מאישיוון המשולש: $d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z)$. לכן

$d(y,z) - d(y,x) \leq d(x,z)$.(**)

אם נפעיל ל-(*) ול-(**) אקסייומת סימטריות של המטריקה נקבל:

$d(x,y) - d(y,z) \leq d(x,z)$ ו- $d(y,z) - d(x,y) \leq d(x,z)$. מכאן:

$$|d(x,y) - d(y,z)| = \max\{d(x,y) - d(y,z), d(y,z) - d(x,y)\} \leq d(x,z)$$

■

ב' לכל $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$ מתקיים:

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)$$

הוכחה.

הוכחה באינדוקציה (האינדוקציה לפי n)

בסיס האינדוקציה. אם $n = 3$ הטענה נכונה לפי אישוויון המשולש.

צעד האינדוקציה. תהי הטענה נכונה כאשר $n = k$, ז"א:

$d(x_1, x_k) \le d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{k-1}, x_k)$. אזי

$$\begin{aligned} d(x_1, x_{k+1}) &\le d(x_1, x_k) + d(x_k, x_{k+1}) \\ &= d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{k-1}, x_k) + d(x_k, x_{k+1}) \end{aligned}$$

ז.א., הטענה נכונה גם כאשר $n = k + 1$. ■

שאלה 5

נבדוק אקסיומות המטריקה:

5.1. אם $x = y$, אז $d(x, y) = 0$ לפי הגדרת d.

אם $d(x, y) = 0$, אז $x = y$ גם לפי הגדרת d.

5.2. הערך של $d(x, y)$ אינו משתנה בהחלפת סדר בין x ו- y.

5.3. אם בשלישיה x, y, z ושנן שתח סדרות זהות, אז אישוויון המשולש הופך לשיוויון שמתקיים לפי 5.2.

אם כל האיברים x, y, z שונים, אז לפי הגדרת d:

$x_i \neq z_i \Rightarrow x_i \neq y_i \ \vee \ y_i \neq z_i$ או:

$i \ge d(x, z) \Rightarrow i \ge d(x, y) \vee i \ge d(y, z)$ או (שזה אותו דבר):

$$d(x, z) \ge \frac{1}{i} \Rightarrow d(x, y) \ge \frac{1}{i} \vee d(y, z) \ge \frac{1}{i} \quad (***)$$

לכן אם $d(x, z) = \frac{1}{i_0}$, אז לפי (***) קיימים שני מקרים אפשריים:

$$d(x, y) \ge \frac{1}{i_0} \Rightarrow d(x, y) \ge d(x, z) \Rightarrow d(x, y) + d(y, z) \ge d(x, z)$$

או

$$d(y, z) \ge \frac{1}{i_0} \Rightarrow d(y, z) \ge d(x, z) \Rightarrow d(x, y) + d(y, z) \ge d(x, z)$$

ז"א, תמיד מתקיים אישוויון המשולש.■

שאלה 6

יהיה (M,d) מרחב מטרי. יהיה $x \in M$ ותהי $x_n \in M$ סדרה ב-M.

תוכיחו ש- $x_n \to x$ אם ורק אם $d(x_n,x) \to 0$.

הוכחה.

יהיה $(M,d$) מרחב מטרי .

יהיו $x \in M$ ו- $x_n \in M$-ו . אז לפי הגדרת הגבול הסדרה במרחב מטרי:

$$x_n \to x \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n,x) < \varepsilon$$

אם נסמן $r_n \coloneqq d(x_n,x)$, אז נקבל :

$x_n \to x \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: n \geq n_0 \Rightarrow r_n < \varepsilon)$ כאשר התנאי בסוגריים בצד ימין הוא בדיוק הגדרת ההתכנסות של הסדרה r_n ל-0 במובן של סדרות ב-$\mathbb{R}$. ז"א קבלנו:

$$x_n \to x \Leftrightarrow \ d(x_n,x) \to 0 \ \blacksquare$$