

84-172 מתמטיקה ב' לכימאים – דר' ארז שיינר – מועד ב' – תשפ"ג

משך המבחן: שלוש שעות הוראות: יש לפתור את כל השאלות, משקל כל שאלה 28 נק', כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

שאלה 1 נביט במערכת המשוואות הבאה עם הנעלמים x, y, z והפרמטר a , בשדה המספרים הממשיים.

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ ax + (a^2 - a)y + 2az = 2a - 1 \\ (1 - a)x + (2 - a)z = 0 \end{cases}$$

- א. מצאו לכל ערכי הפרמטר a אם למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרונות כלל.
 ב. מצאו את כל הפתרונות למערכת עבור $a = 1$.
 ג. מצאו את כל הפתרונות למערכת עבור $a = -1$.

שאלה 2 תהי העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ המקיימת $T(1,0) = T(2,0)$

- א. חשבו את $T(1,0)$.
 ב. הראו כי $[T]$ אינה הפיכה.
 נתון בנוסף כי $T(1,1) = (1,0)$
 ג. חשבו את $T(2, -3)$.
 ד. חשבו את $T(T(x, y))$.

שאלה 3 נביט בפונקציה $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^3$

- א. מצאו את משוואת המישור המשיק לפונקציה $f(x, y)$ בנקודה $(1,1)$.
 ב. מצאו את כיוון העלייה הגדולה ביותר בנקודה $(1,1)$ (הכיוון בו הנגזרת הכיוונית מקסימלית).
 ג. מצאו ומיינו את הנקודות הקריטיות של $f(x, y)$ (מינימום מקומי, מקסימום מקומי, או אוקף).

שאלה 4 בכל אחד מן הסעיפים חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_D f(x, y) dx dy$

- א. כאשר $f(x, y) = \frac{x}{y}$ והתחום הוא $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq e^2\}$.
 ב. כאשר $f(x, y) = xy$ והתחום הוא $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.
 ג. כאשר $f(x, y) = \frac{4y}{1-y} \cos(y^2)$ והתחום הוא $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq 1 - 2x\}$.
 רמז: החליפו סדר אינטגרציה.

נוסחאות שהתלמידים בקשו לצרף (לא באחריות המרצה)

זהויות טריגונומטריות:

$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\tan(2\alpha) = 2 \tan \alpha / (1 - \tan^2 \alpha)$
$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\cos(3\alpha) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$
$\sin(90 - \alpha) = \cos \alpha$	$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin(\alpha/2 + \beta/2) \cos(\alpha/2 - \beta/2)$
$\cos(90 - \alpha) = \sin \alpha$	$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin(\alpha/2 - \beta/2) \cos(\alpha/2 + \beta/2)$
$\tan(90 - \alpha) = \cot \alpha$	$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos(\alpha/2 + \beta/2) \cos(\alpha/2 - \beta/2)$
$\cot(90 - \alpha) = \tan \alpha$	$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin(\alpha/2 + \beta/2) \sin(\alpha/2 - \beta/2)$
$\sin(180 - \alpha) = \sin \alpha$	$\sin \alpha \cos \beta = 1/2 (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$
$\cos(180 - \alpha) = -\cos \alpha$	$\sin \alpha \sin \beta = 1/2 (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$
$\tan(180 - \alpha) = -\tan \alpha$	$\cos \alpha \cos \beta = 1/2 (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$
$\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$	$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$	$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
$1 + \tan^2 \alpha = 1 / \cos^2 \alpha$	$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
$1 + \cot^2 \alpha = 1 / \sin^2 \alpha$	$\tan(\alpha + \beta) = (\tan \alpha + \tan \beta) / (1 - \tan \alpha \tan \beta)$
$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$	$\tan(\alpha - \beta) = (\tan \alpha - \tan \beta) / (1 + \tan \alpha \tan \beta)$
$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$	$\tan(\alpha + \beta) - \tan \alpha - \tan \beta = \tan(\alpha + \beta) \tan \alpha \tan \beta$
$\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$	$\arcsin \alpha + \arccos \alpha = \pi / 2$
$\cos(2\alpha) = 1 - 2 \sin^2 \alpha$	

אינטגרלים מיידיים:

$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$
$\int \ln x dx = x \ln x - x + c$	$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + c$
$\int \sin x = -\cos x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} = -\cot x + c$	$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln x-a + C$
$\int \tan x dx = -\ln \cos x + c$	$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \cdot \frac{1}{1-n} (x-a)^{1-n} + C$
$\int \cot x dx = \ln \sin x + c$	$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} = \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot \arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$	

הנגזרת	הפונקציה
$f'(x) = nx^{n-1}$	$f(x) = x^n$
$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	$y = f(x) \cdot g(x)$
$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$	$y = \frac{f(x)}{g(x)} \quad g(x) \neq 0$