מבחן בקורס **חשבון אינפיניטסימלי 1** (89-132)
מועד **א** (16.02.2017)

מרצים: לואי פולב, פרופ' מיכאל כץ

מתרגלים: אלעד עטייא, מרדכי יעקב, אריאל ויצמן, אורלי בארשבסקי

משך המבחן הינו שלוש שעות. יש לענות על <u>כל</u> השאלות 1-5.

מותר השימוש במחשבון מדעי (לא מחשבון גרפי). כל חומר עזר פרט למחשבון– אסור.

שימו לב: עליכם לנמק היטב כל תשובה!

<u>שאלה 1</u> (15 נקודות)

הוכיחו את המשפט הבא:

משפט הנקודה הקריטית:

תהי f פונקציה המוגדרת בקטע I. תהי $c \in I$ ונניח שיש ל- f מינימום או מקסימום ב-c. אחד מהבאים מתקיים בהכרח:

א. c היא נקודת קצה של I;
ב. $f'(c)$ אינה מוגדרת;
ג. $f'(c)=0$.

<u>שאלה 2</u>

א. (7 נקודות) תהי $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה הנתונה באמצעות כלל הנסיגה הבא:

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+4).$$

הוכיחו ש- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת, וחשבו את גבולה.

ב. (5 נקודות) חשבו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{n+1}+2^{2n}}$.

<u>שאלה 3</u>

א. (5 נקודות) חשבו את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^3-x\right)-3}{x}$.

ב. (20 נקודות) נתבונן בפונקציה

$$f\left(x\right)=\begin{cases} a\ln\left(e^3+2-x\right) & x<2 \\ x^2+bx+a & 2\le x<3 \\ \frac{ax+9b}{\pi}\arcsin\left(\frac{1}{x-2}\right) & 3\le x \end{cases}.$$

1. עבור אילו ערכי $a,b\in\mathbb{R}$ הפונקציה הנ"ל רציפה ב- $\mathbb{R}$?
2. הציבו בפונקציה f את ערכי ה- a,b שמצאתם בסעיף הקודם. האם f גזירה בנקודה $x=2$? הוכיחו את תשובתכם!

ג. (5 נקודות) התבוננו שוב בפונקציה f מסעיף ב' והציבו בה את הערכים $a=1, b=1$.
נתון שעבור הערכים האלה, f אינה רציפה בנקודה $x=2$. מהו סוג אי-הרציפות שם (סליקה, מין ראשון, מין שני)? הוכיחו את תשובתכם!

<u>שאלה 4</u>

קבעו לגבי כל טור אם הוא מתכנס בתנאי, מתכנס בהחלט או מתבדר. הוכיחו את תשובתכם!

א. (7 נקודות) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(a+1\right)^n}{n!}$ עבור $a\in\mathbb{R}$.

ב. (7 נקודות) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n^3-1}$.

ג. (7 נקודות) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

שאלה 5

א. (15 נקודות) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה בכל נקודה. נניח שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים: $f'(x)\le -1$, ובנוסף נתון כי $f(1)=2$.

הוכיחו שקיימת נקודה $c\in(1,5)$ כך ש-$f(c)=0$.

ב. (10 נקודות) תהי $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. נגדיר פונקציה חדשה $f(x)=xg(x)+\sin x$. הוכיחו ש- f גזירה בנקודה $x=0$ ומצאו את $f'(0)$ (שימו לב כי תשובתכם יכולה להיות תלויה ב-g).

שאלת בונוס (7 נקודות)

תהי $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה. נתון שקיים $x_0\in\mathbb{R}$ המקיים: $g(x_0)=0,\quad g'(x_0)\ne 0$.

הוכיחו שקיימת סביבה של x_0 שבה g מחליפה סימן, כלומר, הסביבה מכילה לפחות נקודה אחת x_1 עבורה $g(x_1)>0$ ולפחות נקודה אחת x_2 עבורה $g(x_2)<0$.

בהצלחה!