תזכורת:
בשיעור הקודם דיברנו על e^z.
נסמן $z = x + iy$.

$$e^z = e^x cis(y) = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

ראיתם כל מיני תכונות של הפונקציה e^z:
1. אם z הוא מספר ממשי, אז e^z המרוכב שווה לe^z הממשי. (למשל הערך של e^2 שווה לערך שאנחנו מכירים של e^2 מההגדרה הממשית)
2. $(e^z)' = e^z$
3. e^z היא כמעט על- חוץ מ0 לכל מספר מרוכב יש מקור.
4. e^z היא לא חח"ע. למעשה, ראיתם שהיא פונקציה מחזורית עם מחזוריות של $2\pi i$. כלומר, לכל מספר מרוכב z,

$$e^z = e^{z+2\pi i}$$

ולכן בעצם זה נכון לכל כפולה שלמה של $2\pi i$. כלומר, לכל מספר שלם k

$$e^z = e^{z+2\pi k i}$$

תכונה נוספת: אם $e^{z_1} = e^{z_2}$ אז קיים k שלם כך ש:

$$z_1 = z_2 + 2\pi k i$$

הוכחה: $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$

$$e^{z_1} = e^{x_1} cis(y_1)$$

$$e^{z_2} = e^{x_2} cis(y_2)$$

נתון שהם שווים, לכן:

$$e^{x_1} cis(y_1) = e^{x_2} cis(y_2)$$

בשביל שהמספרים יהיו שווים, הרדיוסים צריכים להיות שווים, והזוויות צריכות להיות בהפרש שהוא כפולה של 2π.

$$e^{x_1} = e^{x_2}$$

$$y_1 = y_2 + 2\pi k$$

בממשיים e^x היא פונקציה חח"ע לכן $x_1 = x_2$. אז סה"כ נקבל ש

$$z_1 = x_1 + y_1 i = x_2 + (y_2 + 2\pi k)i = x_2 + y_2 i + 2\pi ki = z_2 + 2\pi ki$$

הגדרה: יהי z מספר מרוכב.
נסמן ב $\ln(z)$ את האוסף של כל המספרים המרוכבים t שמקיימים

$$e^t = z$$

ראינו שלכל מספר שונה מ0 יש אינסוף מקורות.
למשל: חשבו את כל האפשרויות של $\ln_{\mathbb{C}}(2cis(\frac{\pi}{2}))$.
פתרון: אנחנו מחפשים מספר מרוכב (למעשה יש אינסוף) $x + yi$ שמקיים

$$e^{x+yi} = 2cis(\frac{\pi}{2})$$

$$e^x cis(y) = 2cis(\frac{\pi}{2})$$

$$e^x = 2 \to x = \ln 2$$

$$y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$x + iy = \ln 2 + (\frac{\pi}{2} + 2\pi k)i$$

דוגמא נוספת:
חשבו את כל האפשרויות של $\ln_{\mathbb{C}}(2)$.

$$e^{x+iy} = 2$$

$$e^x cis(y) = 2cis(0)$$

$$e^x = 2 \to x = \ln 2$$

$$y = 0 + 2\pi k$$

$$x + iy = \ln 2 + 2\pi ki$$

דוגמא נוספת:
חשבו את כל האפשרויות של $\ln_{\mathbb{C}}(i)$
פתרון:

$$e^{x+iy} = i$$

$$e^x cis(y) = 1cis(\frac{\pi}{2})$$

$$e^x = 1 \rightarrow x = 0$$

$$y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$x + iy = (\frac{\pi}{2} + 2\pi k)i$$

$$e^{(\frac{\pi}{2}+2\pi k)i} = e^0 cis(\frac{\pi}{2} + 2\pi k) = 1cis(\frac{\pi}{2}) = i$$

הערה: ראינו שלכל מספר $z \neq 0$, יש אינסוף מספרים מרוכבים t שמקיימים $e^t = z$.
כל המספרים האלה נבדלים בכפולה שלמה של $2\pi i$.
אנחנו יכולים לבחור תחומים מסויימים שבהם יהיה רק ערך אחד.
למשל, לבקש $\ln_{[0,2\pi)}(z)$. כלומר, אנחנו דורשים שהחלק המדומה של t יהיה בתחום $[0, 2\pi)$.
למשל:

1. $\ln_{[0,2\pi)}(2cis(\frac{\pi}{2}))$
הפתרון הכללי:

$$\ln 2 + (\frac{\pi}{2} + 2\pi k)i$$

לכן

$$\ln_{[0,2\pi)}(2cis(\frac{\pi}{2})) = \ln 2 + \frac{\pi}{2}i$$

הסבר: אנחנו צריכים לבחור k מתאים כך שהזווית תהיה בתחום של $[0, 2\pi)$.

$$\ln_{(\pi,3\pi]}(2cis(\frac{\pi}{2})) = \ln 2 + \frac{5\pi}{2}i$$

2. $\ln_{[-4\pi,-2\pi)}(2)$
הפתרון הכללי היה:

$$\ln 2 + 2\pi k i$$

$$\ln_{[-4\pi,-2\pi)}(2) = \ln 2 - 4\pi i$$

3. חשבו את $\ln_{[-\pi,\pi)}(i)$
הפתרון הכללי היה:

$$(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)i$$

$$\ln_{[-\pi,\pi)}(i) = \frac{\pi}{2}i$$

הערה: לכל תחום באורך 2π מתאים "ענף" אחד ויחיד של פונקציית הלוגריתם.
ה"ענף המרכזי" של פונקציית הלוגריתם מתאים לקטע $[-\pi,\pi)$.
לסיכום, יכולים לבקש 3 תשובות אפשריות:
1. "מצאו את כל הערכים האפשריים של $\ln(z)$ במרוכבים"- במקרה זה עליכם להחזיר פתרון כללי שתלוי בk.
2. "מצאו את $\ln_{[a,a+2\pi)}(z)$"- במקרה זה עליכם למצוא ערך יחיד שמתאים לתחום.
3. "מצאו את הערך המרכזי/ הענף המרכזי של $\ln(z)$"- במקרה זה עליכם למצוא פתרון יחיד שמתאים לתחום $[-\pi,\pi)$.

פונקציות טריגונומטריות

מטרה: כמו שהגדרנו e^z לכל מספר מרוכב, אנחנו רוצים להגדיר $\cos(z)$ ו$\sin(z)$ לכל מספר מרוכב. למשל, להגיד מה זה $\cos(i)$. או מה זה $\sin(2+3i)$. כמובן, שאנחנו לא רוצים סתם לתת הגדרה שרירותית, אלא שתשמור על כל מיני תכונות של הפוקנציות הטריגונמטריות הממשיות.
ההגדרה הולכת לנבוע מההגדרה של e^z.
ניזכר שלכל מספר ממשי y, מתקיים:

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y$$

לכן

$$e^{-iy} = \cos(-y) + i\sin(-y) = \cos y - i\sin y$$

נחבר את שתי המשוואות:

$$e^{iy} + e^{-iy} = 2\cos y$$

כלומר, לכל מספר ממשי y, מתקיים:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

נחסר את שתי המשוואות:

$$e^{iy} - e^{-iy} = 2i\sin y$$

כלומר, לכל מספר ממשי y, מתקיים:

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

לכן, ניתן את ההגדרה הבאה:
לכל מספר מרוכב z, נגדיר:

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

חישוב:

$$\cos(i) = \frac{e^{i^2}+e^{-i^2}}{2} = \frac{e^{-1}+e}{2}$$

$$\sin(i) = \frac{e^{i^2}-e^{-i^2}}{2i} = \frac{e^{-1}-e}{2i} = \frac{(e^{-1}-e)(-2i)}{2i\cdot(-2i)} = \frac{2(e-e^{-1})i}{4} = \frac{(e-e^{-1})i}{2}$$

תכונות/ זהויות:
1. לכל מספר מרוכב $z \in \mathbb{C}$ מתקיים:

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

הוכחה:

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2 =$$

$$\frac{(e^{iz})^2+2e^{iz}e^{-iz}+(e^{-iz})^2}{4} + \frac{(e^{iz})^2-2e^{iz}e^{-iz}+(e^{-iz})^2}{-4} =$$

$$\frac{(e^{iz})^2+2e^{iz}e^{-iz}+(e^{-iz})^2}{4} + \frac{-(e^{iz})^2+2e^{iz}e^{-iz}-(e^{-iz})^2}{4} =$$

$$\frac{(e^{iz})^2+2e^{iz}e^{-iz}+(e^{-iz})^2-(e^{iz})^2+2e^{iz}e^{-iz}-(e^{-iz})^2}{4} =$$

$$\frac{4e^{iz}e^{-iz}}{4} = e^{iz}e^{-iz} = e^{iz-iz} = e^0 = 1$$

2. לכל מספר מרוכב z מתקיים:

$$\cos(z) = \sin(\frac{\pi}{2}-z)$$

הוכחה:

$$\sin(\frac{\pi}{2}-z) = \frac{e^{i(\frac{\pi}{2}-z)}-e^{-i(\frac{\pi}{2}-z)}}{2i} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}i-iz}-e^{-\frac{\pi}{2}i+iz}}{2i} =$$

$$\frac{e^{\frac{\pi}{2}i}e^{-iz}-e^{-\frac{\pi}{2}i}e^{iz}}{2i}$$

חישוב עזר:

$$e^{\frac{\pi}{2}i}=cis(\frac{\pi}{2})=i$$

$$e^{-\dfrac{\pi}{2}i}=cis(-\frac{\pi}{2})=-i$$

$$\frac{ie^{-iz}+ie^{iz}}{2i}=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos(z)$$

3. לכל שני מספרים מרוכבים z,w מתקיים:

$$\cos(z+w)=\cos(z)\cos(w)-\sin(z)\sin(w)$$

הוכחה:

$$\cos(z+w)=\frac{e^{i(z+w)}+e^{-i(z+w)}}{2}$$

$$\cos(z)\cos(w)-\sin(z)\sin(w)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\cdot\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}-\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\cdot\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}=$$

$$\frac{e^{iz}e^{iw}+e^{iz}e^{-iw}+e^{-iz}e^{iw}+e^{-iz}e^{-iw}}{4}-\frac{e^{iz}e^{iw}-e^{iz}e^{-iw}-e^{-iz}e^{iw}+e^{-iz}e^{-iw}}{-4}=$$

$$\frac{e^{iz}e^{iw}+e^{iz}e^{-iw}+e^{-iz}e^{iw}+e^{-iz}e^{-iw}}{4}+\frac{e^{iz}e^{iw}-e^{iz}e^{-iw}-e^{-iz}e^{iw}+e^{-iz}e^{-iw}}{4}=$$

$$\frac{2e^{iz}e^{iw}+2e^{-iz}e^{-iw}}{4}=\frac{e^{i(z+w)}+e^{-i(z+w)}}{2}=\cos(z+w)$$

4. לcos ולsin יש מחזוריות של 2π. כלומר, לכל מספר מרוכב z מתקיים:

$$\cos(z)=\cos(z+2\pi),\sin(z)=\sin(z+2\pi)$$

(הערה: לפונקציה e^z יש מחזוריות של $2\pi i$. כלומר $e^z=e^{z+2\pi i}$. שימו לב להבדל.)
הוכחה:

$$\cos(z+2\pi)=\frac{e^{i(z+2\pi)}+e^{-i(z+2\pi)}}{2}=\frac{e^{iz+2\pi i}+e^{-iz-2\pi i}}{2}=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos(z)$$

בגלל המחזוריות של e^z.

$$\sin(z+2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}}{2i} = \frac{e^{iz+2\pi i} - e^{-iz-2\pi i}}{2i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin(z)$$