

1. תהי פונקציה f רציפה בקטע הפתוח (a,b) , כך שלכל $x \in (a,b)$ $f(x) \in \mathbb{Q}$ (כלומר הפונקציה מקבלת ערכים רציונאליים בלבד בקטע). הוכח/הפרך: f פונקציה קבועה.
2. תהי f פונקציה רציפה בקטע $[0,2]$ כך ש $f(2) = 1$. הוכח שקיימת נקודה $a \in [0,2]$ כך

$$f(a) = \frac{1}{a}$$

3. הוכח שלכל פולינום ממעלה אי זוגית יש שורש ממשי.
4. תן דוגמה לפונקציה רציפה ב $(0,1]$ כך שאינה חסומה מלעיל ואינה חסומה מלרע ב $(0,1]$. הוכח שהיא אכן כזו.
5. הוכח שאם f רציפה במ"ש בקטע A אזי f רציפה בכל נקודה של A
6. תרגיל מודרך: תהי f רציפה במ"ש על (a,b) הוכח כי f חסומה על (a,b)

- a. נניח בשלילה ש f אינה חסומה, הראה שלכל $M > 0$ קיימים x_1, x_2 כך ש

$$f(x_1) - f(x_2) > M$$

- b. הראה שקיים $\delta > 0$ כך שלכל $|x_1 - x_2| < \delta$ בקטע, מתקיים $|f(x_1) - f(x_2)| < 1$

- c. נחלק את הקטע לקטעים שווים בגודל קטן מ δ . הסק שעבור $x_1, x_2 \in (a,b)$

מתקיים $|f(x_1) - f(x_2)|$ קטן שווה ממספר הקטעים שחילקנו את הקטע אליהם.

- d. הסק שיש סתירה בזכות כל הסעיפים, ולכן נובע מה שרצינו.

7. [שאלה ממבחן של פרופ' זלצמן] זהה וסווג את נקודות אי הרציפות של הפונקציות הבאות:

a. $\frac{1}{\log|x|}$

b. $\frac{x}{\sin\sqrt{|x|}}$

c. $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, כאשר $2(D(x)-1)^2$