תרגיל מס 1 ־ אינפי 4 תשע`ט

28 במרץ 2019

1. מצאו את האורכים של העקומות הבאות:

(א) הספירלה $\gamma\left(t\right)=t\left(\cos t,\sin t\right)$ $t\in\left[0,\pi\right]$.

(ב) הציקלואידה $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$. (רמז: תנסו לחכות הת הקואורדינטות הקוטביות).

(ג) העקומה המתקבלת על ידי חיתוך של ספרת היחידה $x^{2}+y^{2}+z^{2}=1$ והמישור $x+y=1$.

פתרון:

(א) שימו לב, בסעיף א' התרגיל היה רשום עם טעות עם $\left(\cos t,\sin t\right)$ במקום $\left(t\cos t,t\sin t\right)$. שני הפתרונות יתקבלו.

i. עם $\gamma\left(t\right)=\left(\cos t,\sin t\right)$, זה פשוט אורך של חצי מעגל עם רדיוס π ולכן נקבל 1.

ii. נפתור עבור $\gamma\left(t\right)=\left(t\cos t,t\sin t\right)$ עם $t\in\left[0,\pi\right]$. נשתמש בנוסחא:

$$\begin{aligned}
L\left(\gamma\right) &= \int_{0}^{\pi}\left\Vert \gamma'\left(t\right)\right\Vert \mathbf{d}t\\
&= \int_{0}^{\pi}\left\Vert \left(t\cos t,t\sin t\right)\right\Vert \\
&= \int_{0}^{\pi}\left\Vert \left(\cos t-t\sin t,\sin t+t\cos t\right)\right\Vert \\
&= \int_{0}^{\pi}\sqrt{\cos^{2}t-2t\cos t\sin t+t^{2}\sin t+\sin^{2}t+2t\cos t\sin t+t^{2}\cos^{2}t}\\
&= \int_{0}^{\pi}\sqrt{1+t^{2}}\mathbf{d}t
\end{aligned}$$

נבצע הצבה: $t=\sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$. נקבל:

$$\begin{aligned}1+t^{2}=1+\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)^{2} & =\\ & =1+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}\\ & =\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}\\ & =\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)^{2}\end{aligned}$$

כמו כן, נקבל $\mathbf{d}x$ $dt=\cosh x\mathbf{d}x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$. גבול עליון יהיה $(\sinh)^{-1}(\pi)$. ונקבל

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\sinh^{-1}(\pi)}\cosh^{2}x\mathbf{d}x & =\int_{0}^{\sinh^{-1}\pi}\frac{1}{2}+\cosh2x\mathbf{d}x\\ & =\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sinh2x\right)\Big|_{0}^{\sinh^{-1}\pi}\\ & =\frac{1}{2}\sinh^{-1}\pi+\frac{1}{2}\sinh\left(2\sinh^{-1}\pi\right)\end{aligned}$$

הערה: ניתן גם להציב $t=\tan x$ וגם הצבת אוילר $\sqrt{t^{2}+1}=t+u$... כל הדרכים קבילות.

(ב) הצורה סימטרית ביחס לצירים. ולכן מספיק לחשב ברביע הראשון ולכהפיל ב 4. נבצע החלפת משתנים $x^{\frac{1}{3}}=\cos t,y^{\frac{1}{3}}=\sin t$. נקבל

$$\gamma\left(t\right)=\left(\cos^{3}t,\sin^{3}t\right)$$

כאשר $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. נציב בנוחא ונקבל

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\pi/2}\left\Vert \left(\cos^{3}t,\sin^{3}t\right)'\right\Vert \mathbf{d}t & =\int_{0}^{\pi/2}\left\Vert \left(-3\cos^{2}t\sin t,3\sin^{2}t\cos t\right)\right\Vert \mathbf{d}t\\ & =\int_{0}^{\pi/2}\sqrt{\left(9\cos^{4}\sin^{2}t+9\sin^{4}\cos^{2}t\right)}\mathbf{d}t\\ & =\int_{0}^{\pi/2}3\frac{\sin2t}{2}\mathbf{d}t\\ & =-\frac{3}{4}\cos2t\Big|_{0}^{\pi/2}\\ & =-\frac{3}{2}\left(-1-1\right)=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

נכפיל ב 4 ונקבל 6.

(ג) נציב $y = 1 - x$ במשוואה השניה ונקבל

$$.x^2 + (1-x)^2 + z^2 = 1$$

נשווה ונעביר אגפים ונקבל

$$\begin{aligned}
x^2 + 1 - 2x + x^2 + z^2 &= 2x^2 - 2x + 1 + z^2 \\
&= 2\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} + z^2 \\
&= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 + \frac{1}{2} = 1
\end{aligned}$$

נעביר אגפים ונכפיל ב2 ונקבל

$$4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2z^2 = 1$$

נבחר פרמטריצציה

$$\begin{aligned}
x - \frac{1}{2} &= \frac{1}{2}\cos\theta \\
z &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta
\end{aligned}$$

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta \\
y &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\theta \\
z &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta
\end{aligned}$$

נציב בנוסחא ונקבל

$$\begin{aligned}
L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \left\| \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)' \right\| \mathbf{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left\| \left(-\frac{1}{2}\sin\theta, \frac{1}{2}\sin\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right) \right\| \mathbf{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1}{4}\sin^2\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta + \frac{1}{2}\cos^2\theta \mathbf{d}t} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{d}t = \sqrt{2}\pi
\end{aligned}$$

2. הראו שאם לעקומה חלקה קיימת הצגה קוטבית $r=\rho\left(\theta\right)$ עבור $a\leq\theta\leq b$, אזי האורך שלה נתון על ידי

$$.\int_{a}^{b}\sqrt{\rho^{2}\left(\theta\right)+\left(\rho'\left(\theta\right)\right)^{2}}\mathbf{d}\theta$$

פתרון: נשים לב, שהצגה הקוטבית $r=\rho\left(\theta\right)$ מתאימה לעקומה

$$\begin{aligned}\gamma\left(\theta\right)&=\left(\rho\left(\theta\right)\cos\theta,\rho\left(\theta\right)\sin\theta\right)\\ \theta&\in\left[a,b\right]\end{aligned}$$

מכיוון שהעקומה חלקה ניתן להשתמש בנוסחא הבאה עבור אורך:

$$.L\left(\gamma\right)=\int_{a}^{b}\left\Vert \gamma'\left(\theta\right)\right\Vert \mathbf{d}\theta$$

מתקיים

$$\begin{aligned}\gamma'\left(\theta\right)&=\rho'\left(\theta\right)\left(\cos\theta,\sin\theta\right)+\rho\left(\theta\right)\left(-\sin\theta,\cos\theta\right)\\ &=\left(\rho'\left(\theta\right)\cos\theta-\rho\left(\theta\right)\sin\theta,\rho'\left(\theta\right)\sin\theta+\rho\left(\theta\right)\cos\theta\right)\end{aligned}$$

כמו כן, מתקיים

$$\begin{aligned}\left\Vert \gamma'\left(\theta\right)\right\Vert &=\sqrt{\left(\rho'\left(\theta\right)\cos\theta-\rho\left(\theta\right)\sin\theta\right)^{2}+\left(\rho'\left(\theta\right)\sin\theta+\rho\left(\theta\right)\cos\theta\right)^{2}}\\ &=\sqrt{\rho^{2}\left(\theta\right)+\left(\rho'\left(\theta\right)\right)^{2}}\end{aligned}$$

נציב בנוסחא ונקבל את הדרוש.

3. תהי $\gamma:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}^{n}$ עקומה חלקה ופשוטה בעלת תמונה Γ. נגדיר עבור $x\in\gamma\left[\left(a,b\right)\right]$, $T_{\gamma}\left(x\right)=\frac{\gamma'\left(t\right)}{\left\Vert \gamma'\left(t\right)\right\Vert }$ כאשר $\gamma\left(t\right)=x$.

(א) הראו ש T_{γ} מוגדרת היטב על התמונה של הקטע הפתוח $\left(a,b\right)$ תחת γ .

(ב) הראו שאם γ ו $\tilde{\gamma}$ הן שקולות, אזי $T_{\gamma}=T_{\tilde{\gamma}}$.

(ג) בהמשך נניח ש γ בנוסף אינה עקומה סגורה ונסמן $\Gamma=Im\gamma$. תהי

$$\tilde{\gamma}:\ \left[c,d\right]\to\Gamma$$

פרמטריזציה פשוטה וחלקה של Γ כך ש $\gamma\left(a\right)=\tilde{\gamma}\left(c\right)$ ו $\gamma\left(b\right)=\tilde{\gamma}\left(d\right)$.

i. הראו שהפונקציה $\tilde{\gamma}^{-1}\circ\gamma:\left[a,b\right]\to\left[c,d\right]$ מוגדרת היטב, מונוטונית עולה ועל.

ii. הראו שהפונקציה $\tilde{\gamma}^{-1}\circ\gamma$ גזירה ברציפות ושונה מאפס והסיקו ש γ ו $\tilde{\gamma}$ שקולות.

(ד) הראו שאם $\tilde{\gamma}:\left[c,d\right]\to\Gamma$ היא פרמטריזציה חלקה ופשוטה של Γ כך ש $\gamma\left(a\right)=\tilde{\gamma}\left(d\right)$ ו $\gamma\left(d\right)=\tilde{\gamma}\left(b\right)$. הראו ש $\tilde{\gamma}$ ו γ הן אנטי־שקולות.

(ה) הראו שלכל פרמטריזציה חלקה וחח"ע של $\tilde{\gamma}$ של Γ מתקיים $T_\gamma = T_{\tilde{\gamma}}$ או $T_\gamma = -T_{\tilde{\gamma}}$.

פתרון:

(א) מכיוון ש γ היא חח"ע ועל התמונה של (a,b), לכל $x \in \gamma[(a,b)]$ קיים ויחיד $t \in (a,b)$ כך ש $\gamma(t) = x$. כמו כן, γ' אינה מתאפסת ולכן $T_\gamma(x) = \frac{\gamma'(\gamma^{-1}(x))}{\|\gamma'(\gamma^{-1}(x))\|} = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$.

(ב) נניח ש $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ו $\tilde{\gamma} : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ שקולות. אזי קיימת $\phi : [a,b] \to [c,d]$ על, מונוטונית עולה חלקה כך ש $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \phi$. מתקיים

$$\begin{aligned}
T_\gamma(x) = \frac{\gamma'\left(\gamma^{-1}(x)\right)}{\|\gamma'(\gamma^{-1}x)\|} &= \frac{(\gamma_2 \circ \phi)'\left(\gamma^{-1}(t)\right)}{\left\|(\gamma_2 \circ \phi)'\left(\gamma^{-1}(t)\right)\right\|} \\
&= \frac{\tilde{\gamma}'\left(\phi\left(\gamma^{-1}(x)\right)\right)\phi'\left(\gamma^{-1}(x)\right)}{\|\tilde{\gamma}'\left(\phi\left(\gamma^{-1}(x)\right)\right)\phi'\left(\gamma^{-1}(x)\right)\|} \\
&= \frac{\tilde{\gamma}'\left(\phi\left(\gamma^{-1}(x)\right)\right)\phi'\left(\gamma^{-1}(x)\right)}{\|\tilde{\gamma}'\left(\phi\left(\gamma^{-1}(x)\right)\right)\|\left|\phi'\left(\gamma^{-1}(x)\right)\right|}
\end{aligned}$$

מכיוון ש ϕ חלקה ומונוטונית עולה (או פשוט בגלל ההגדרה השניה של שקילות עקומות), $\phi > 0$ ולכן

$$\frac{\phi'\left(\gamma^{-1}(x)\right)}{\left|\phi'\left(\gamma^{-1}(x)\right)\right|} = 1.$$

ולכן

$$\frac{\tilde{\gamma}'\left(\phi\left(\gamma^{-1}(x)\right)\right)\phi'\left(\gamma^{-1}(x)\right)}{\|\tilde{\gamma}'\left(\phi\left(\gamma^{-1}(x)\right)\right)\|\left|\phi'\left(\gamma^{-1}(x)\right)\right|} = T_{\tilde{\gamma}}(x).$$

(ג) ההרכבה מוגדרת היטב, מכיוון ש γ ו $\tilde{\gamma}$ הן פונקציות חח"ע ועל. נשים לב ש $\gamma'(t) \neq 0$ לכל $t \in [a,b]$, ולכו לכל קיימת קואורדינטה i שבה $\gamma_i'(t) \neq 0$אם נסמן

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$$

בסביבה U של t ולפי משפט הפונקציה ההפוכה ישנה סביבה V של $\gamma_i(t)$ כך ש $\gamma_i : U \to V$ חח"ע, על, גזירה ברצפות ובעלת נגזרת שאינה מתאפסת, כך ש $\gamma_i^{-1}(t)$ גם גזירה ברצפיפות ובלעלת נגזרת ששונה מאפס. לכל $u \in U$ מתקיים מתקיים $u = \gamma_i^{-1} \circ \gamma_i(u)$ וגם $\gamma^{-1} \circ \gamma(u) = u$. אם נסמן ב π_i את פונקציית ההטלה על רכיב ה i, קל לראות שמתקיים $\gamma_i = \pi_i \circ \gamma$. נשווה את האגפים ונקבל שלכל $u \in U$ מתקיים

$$\begin{aligned}
\gamma^{-1} \circ \gamma(u) = u &= \gamma_i^{-1} \circ \gamma_i(u) \\
&= \gamma_i^{-1} \circ (\pi_i \circ \gamma_i)(u) \\
&= \left(\gamma^{-1} \circ \pi_i\right) \circ \gamma_i(u)
\end{aligned}$$

נסמן $\tilde{V}=\{(x_1,\ldots,x_n)\,|x_i\in V\}$ (כלומר את כל הנקודות כך ש $x_i=\gamma_i(u)$ עבור $u\in U$ כלשהו, מכיוון ש $\gamma_i(U)=V$). שים לב ש $\gamma^{-1}=\gamma_i^{-1}\circ\pi_i|_{\tilde{V}\cap\Gamma}$ (נזכיר ש Γ מסמן את התמונה של γ). כלומר, לכל $x\in\Gamma$, יש סביבה V של x כך ש $\gamma^{-1}\Big|_{V\cap\Gamma}$ מתכלכדת עם פונקציה גזירה ברציפות מ V ל $[a,b]$. אותם טיעונים עובדים גם בכיוון השני - כלמר, שלכל $x\in\Gamma$ יש סביבה V של x ב $\mathbb{R}^n$ כל ש $\tilde{\gamma}$ מתלכדת עם פונקציה גזירה ברציפות מ V ל $[c,d]$ על $V\cap\Gamma$. נתבובן ב $\tilde{\gamma}^{-1}\circ\gamma$. לפי ההסבר הקודם, לכל $t\in[a,b]$ קיימת סביבה U כך ש $\tilde{\gamma}^{-1}\circ\gamma$ היא הרכבה של פונקציות גזירות ברציפות ולכן $\tilde{\gamma}^{-1}\circ\gamma$ גזירה ברציפות בכל $[a,b]$. באותו האופן, $\gamma^{-1}\circ\gamma$ גזירה ברציפות בכל $[c,d]$. לפי כלל שרשרת, לא ייתכן שהנגזרת מתאפסת, מכיוון שאם נסמן $f=\tilde{\gamma}^{-1}\circ\gamma$ ו $g=\gamma^{-1}\circ\tilde{\gamma}$ אז מתקיים

$$.\left(f\left(g\left(t\right)\right)\right)'=f'\left(g\left(t\right)\right)g'\left(t\right)=1$$

הראונו ש $\tilde{\gamma}^{-1}\circ\gamma$ מוגדרת, גזירה ברציפות, (ולכן רציפה) בעלת נגזרת שאינה מתאפסת. חח"ע ועל. מכאן נובע שהיא מונוטונית. על מנת לראות שהיא מונוטונית עולה, נשים לב ש $\tilde{\gamma}\circ\gamma^{-1}(a)=c<d=\tilde{\gamma}^{-1}\circ\gamma(b)$ ולכן אינה מונוטונית יורדת. ניקח את $\phi=\tilde{\gamma}^{-1}\circ\gamma$ ונשים לב שמתקיים $\gamma=\tilde{\gamma}\circ\phi$ ולכן γ ו $\tilde{\gamma}$ שקולות על פי ההגדרה.

(ד) הדיון בסעיף הקודם נכון (מילה במילה) גם לגבי $\phi=\tilde{\gamma}^{-1}\circ\gamma$ ולכן ϕ גזירה ברציפות, חח"ע, על מנת לראות שהיא יורדת ממש, נשים לב ש $\phi(a)=d>c=\phi(b)$ ונסיק ש γ ו $\tilde{\gamma}$ הן אנטישקולות לפי ההגדרה.

(ה) נראה שכל פרמטריזציה חלקה וחח"ע $\tilde{\gamma}$ של Γ היא שקולה או אטנישקולה ל γ. נשים לב, ששוב על פי הדיון בסעיפים הקודמים, אם $\tilde{\gamma}:[c,d]\to\Gamma$ פרמטריזציה חח"ע ולחקה, אזי בהכרח $\phi=\tilde{\gamma}^{-1}\circ\gamma$היא מונוטונית, רציפה ועל. נניח בשלילה שלא מתקיים אחד התנאים של הסעיפים הקודמים. יהי $\phi(a)=e$ כאשר $c<e<d$. מכיוון ש ϕ מונוטונית, אם היא עולה, $c\notin\phi([a,b])$ ואם היא יורדת, $d\notin\phi([a,b])$. בסתירה לכך ש ϕ על. באותו אופן מראים ש $\phi(b)=c$ או $\phi(b)=d$. לכן על פי הסעיפים הקדומים, γ ו $\tilde{\gamma}$ שקולות או אנטי שקולות. לפי סעיף ב' אם γ ו $\tilde{\gamma}$ שקולות, נקבל ש T_γ ו $T_{\tilde{\gamma}}$ שקולות ואם הן אנטי שקולות, נקבל של $T_\gamma=-T_{\tilde{\gamma}}$. (החישוב כמו בסעיף ב', פשוט $\frac{\phi'(t)}{|\phi'(t)|}=-1$)

4. תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ עקומה חלקה בעלת תמונה Γ. נגדיר $\phi:[a,b]\to[0,L(\gamma)]$ על ידי

$$.\phi\left(t\right)=\int_a^t\left\|\gamma'\left(\tau\right)\right\|\mathbf{d}\tau$$

(א) הראו ש ϕ מונוטונית עולה, חלקה ועל ושאותו הדבר נכון עבור $\phi^{-1}:[0,L]\to[a,b]$.

(ב) חשבו את הנגזרות של ϕ ו ϕ^{-1}.

(ג) הראו שקיימת עקומה חלקה $\tilde{\gamma}:[0,L]\to\Gamma$ כך ש $\|\tilde{\gamma}'(s)\|=1$ לכל $s\in[0,L(\gamma)]$. הערה: עקומה כזאת נקראת בעלת מהירות יחידה. הדרכה: הסכלו על $\gamma\circ\phi^{-1}$.

(ד) הסיקו שכל עקומה חלקה שקולה לעקומה בעלת מהירות יחידה.

פתרון:

(א) מהנתון $\gamma'(t) \neq 0$ לכל $t \in [a,b]$ ולכן $\|\gamma'(t)\| > 0$ ולכל $[c,d] \subseteq [a,b]$ מתקיים

$$\int_c^d \|\gamma'(t)\| \mathbf{d}t > 0 .$$

לכל $x < y$ מתקיים

$$\begin{aligned}\phi(y) - \phi(x) &= \int_a^y \|\gamma'(t)\| \mathbf{d}t - \int_a^x \|\gamma'(t)\| \mathbf{d}t \\ &= \int_x^y \|\gamma'(t)\| \mathbf{d}t > 0\end{aligned}$$

ולכן ϕ מונוטונית עולה ממש. מכיוון ש $\gamma'(t)$ רציפה, $\|\gamma'(t)\|$ רציפה ומתקיים

$$\|\gamma'(t)\| = \left(\int_a^t \|\gamma'(t)\| \mathbf{d}t\right)' = \phi'(t) \neq 0 .$$

ברור ש ϕ על ומכיוון שהיא מונוטונית היא חח"ע ולכן הפיכה. מכיוון שהיא גזירה ברציפות ההופכית גם גזירה ברציפות, ומתקיים:

$$\left(\phi^{-1}(\phi(t))\right)' = \frac{1}{\phi'(t)} .$$

(ב) בסעיף הקודם הראנו ש $\phi'(t) = \|\gamma'(t)\|$ ו

$$\left(\phi^{-1}(\phi(t))\right)' = \frac{1}{\phi'(t)} = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}$$

(ג) נגדיר $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi^{-1}$ כמו ברמז. ϕ היא מונוטונית עולה, על, רציפה וגזירה ברציפות. ולכן $\tilde{\gamma}$ שקולה ל γ. נחשב את $\|\tilde{\gamma}(s)\|$.

$$\begin{aligned}\|\tilde{\gamma}(s)\| &= \left\|\gamma \circ \phi^{-1}(s)\right\| \\ &= \left\|\gamma\left(\phi^{-1}(s)\right)\right\| \left(\phi^{-1}(s)\right)'\end{aligned}$$

נסמן

$$s = \phi(t).$$

ברור שניתן לעשות את זה כי $\phi : [a,b] \to [0,L]$ היא חח"ע ועל. נשתמש בסעיף הקודם ונקבל

$$\begin{aligned}\left\|\gamma\left(\phi^{-1}(s)\right)\right\| \left(\phi^{-1}(s)\right)' &= \left\|\gamma'\left(\phi^{-1}(\phi(t))\right)\right\| \left(\phi^{-1}(\phi(t))\right)' \\ &= \|\gamma'(t)\| \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} = 1\end{aligned}$$

(ד) בהינתן מסילה חלקה $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ נחזור על הבניה בשלושת הסעיפים הקודמים ונקבל עקומה חלקה $\gamma : [0,\tilde{L}] \to \mathbb{R}^n$ ששקולה ל γ ובעלת מהירות יחידה.