תירגול 12 - מבוא לקומבינטוריקה:

עקרון הסכום: A,B קב' סופיות וזרות $\Rightarrow |A\cup B|=|A|+|B|$

הכללה: $A_1,\dots,A_n$ " " " בזוגות $\Rightarrow |\bigcup A_i|=\sum|A_i|$

עקרון קומבינטורי: מס' האפשרויות שיתרחש B הוא מספר האפשרויות שיתרחש $B\supseteq A$ + " " " $B\setminus A$.

עקרון המכפלה: A,B סופיות $\Rightarrow |A\times B|=|A||B|$

הכללה: $A_1,\dots,A_n$ " $\Rightarrow |A_1\times\dots\times A_n|=|A_1|\cdots|A_n|$

עקרון קומבינטורי: מס' תוצאותיו של ניסוי בן כמה שלבים הוא מכפלת מס' התוצאות בכל שלב.

דוגמא: רשיון רכב מורכב מ2 אותיות מתוך A-Z ואחריהן 4 ספרות מתוך 0-9. מהו מס' הרשיונות האפשרי? $26^2\cdot10^4$

מהו מס' הרשיונות האפשרי כך שהספרה הראשונה והאחרונה בעלות אותה זוגיות?

אם שתיהן זוגיות: $26^2\cdot5\cdot10^2\cdot5$

" " א"ז: $26^2\cdot5\cdot10^2\cdot5$

אלו אפשרויות זרות ולכן סה"כ:

$26^2\cdot5^2\cdot10^2+25^2\cdot5^2\cdot10^2$

בעיה כללית: מספר הדרכים לבחור k מתוך n. תשובה: תלוי איך.

(2) נבחר שני זוגיים ואי"ז :

או (נזר)

שלושה זוגיים :

$\binom{50}{2}\binom{50}{1}$

$\binom{50}{3}$

$$\Leftarrow \quad \binom{50}{2}\binom{50}{1}+\binom{50}{3}$$

(3)

$$C=P(A\times A)$$

$$|C|=|P(A\times A)|\geq|P(A)|>|A|$$

$$\Leftarrow \quad \nexists \; f: C\longrightarrow A \;:\; f \; 1:1$$

בשורה אבל כן במעגל. לכן, נמיר לבעיה שבה תקפה בשניהם:

<u>בשורה:</u> $6!6!2!$ <u>במעגל:</u> $=\frac{6!6!2!}{2!}$

ויסות כיוון בין קצה לבין —

אבל, אם לא היינו מסתכלים בשורה וזהו

מעגל בן שני מקומות: $\otimes \circlearrowleft \ominus = \otimes \circlearrowleft \ominus$

החשיבות היא רק לסדר הפנימי בכל מקום:

$6!6!$

<u>שאלה ממבחן:</u>

1) מס' דרכים לבחירת שני מס' שונים מ-1 עד 100 שסכומם זוגי. בחר והוכח:

$\binom{50}{2}+\binom{50}{2}$, $\binom{50}{2}\binom{50}{2}+\binom{50}{2}$, $\binom{50}{2}50!$, $\binom{50+2-1}{50-1}$

2) —"— 3 מס' שונים —"—

—"— בחר והוכח:

$\binom{50}{1}\binom{50}{2}+\binom{50}{3}$, $\binom{50}{2}\binom{50}{2}+\binom{50}{2}$, $\binom{50}{2+1}3!$, $\binom{50+3-1}{50-1}$

3) A קב' סופית. C קב' היחסים על A. מהו מס' הפונ' החח"ע מ- C ל- A?

<u>פתרון:</u>

(1) נבחר שני זוגיים מ-50 ללא סדר וללא חזרות: $\binom{50}{2}$

או (זר)

" " אי"ז " " " " : $\binom{50}{2}$

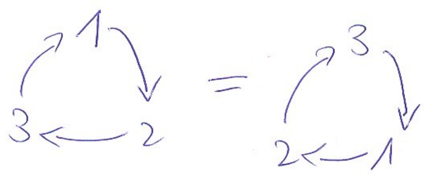
$\Leftarrow$ $\binom{50}{2}+\binom{50}{2}$

דומה: יש סדר.

שונה: אין ראשון ואחרון.

כלומר: $1\to2\to3 \neq 3\to1\to2$

אבל -



לכן ~~ב~~כל n אפ' מתוך ה-$n!$ בשורה
הן זהות במעגל (כמו יחס בו בכל מק')
n אפ', ז': $\frac{n!}{n}=(n-1)!$ נדירים בבדי המעגל). לכן:

$$\frac{n!}{n}=(n-1)!$$

שימו לב! לא כל אפ' בשורה מתקיים —
במעגל ולהיפך. לדוגמא: מס' האפ' לסידור
6 בנות ו-6 בנים במעגל כך ש-
1) בין כל שני בנים בת.

2) כל הבנים יחד וכל הבנות יחד.

ב-(1), היות מס' הבנים = מס' הבנות, בת בין כל
שתי בנות בן. כל סידור כזה בשורה יהיה סידור
כזה במעגל ולהיפך. לכן:
בשורה: $2!\cdot6!\cdot6! \Rightarrow$ במעגל: $6!\cdot6!\cdot2!$
אך זהו סידור של 6 זוגות: $5!$, ולכל אחד 6 אופ', 5 אופ', ...
~~12~~ ב-(2), האפ' (3 בנים) (6 בנות) (3 בנים) איננה שונה על הבריכה

3) מס' פתרונות שלמים אי שליליים ל-

$$x_1+x_2+x_3+x_4=30$$

א) כך ש- $x_i\geq 0$

$$\binom{30+4-1}{4-1}$$

ב) $x_1\geq 0,\ x_2\geq 2,\ x_3,x_4\geq 3$

$\sum y_i=\sum x_i-2-6=22 \Leftarrow y_1=x_1\geq 0,\ y_2=x_2-2\geq 0,\ y_i=x_i-3\geq 0\quad i=3,4$

$\binom{22+4-1}{4-1} \Leftarrow$

ג) $x_i\leq 20$

$\sum y_i=80-\sum x_i=50 \Leftarrow y_i=20-x_i\geq 0$

$\binom{50+4-1}{4-1} \Leftarrow$

ד) $y_i=x_i-1\geq 0 \Leftarrow x_i\geq 1 \Leftarrow x_i>0$

$\binom{26+4-1}{4-1} \Leftarrow \sum y_i=\sum x_i-4=26 \Leftarrow$

ה) $\sum_1^4 x_i\leq 10 \qquad x_i\geq 0$

שקול ל: $\sum_1^4 x_i+y=10$

$(\forall y=0,\dots,10 \quad 10-y=10,\dots,0$ as needed$)$

$$\binom{10+5-1}{5-1}$$

4) ראינו שמס' האפ' לסידור n בשורה הוא $n!$. מה מס' האפ' לסידור n במעגל?

דוגמא: מס' הפתרונות השלמים ואי שליליים עבור: $x_1+x_2+\dots+x_n=k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

נסתכל על k כ- $1+\dots+1$ k פעמים, אזי נמקם k אחדים ב- n תאים $x_1,\dots,x_n$ ללא חשיבות הסדר (בין האחדים) ועם חזרות (תא יכול להכנס יותר מאחד בודד).

לכן זה כמו מיקום k אחדים ו- $n-1$ עמודים בקטע מאורך $k+n-1$ ללא חשיבות הסדר (בין האחדים או בין העמודים) וללא חזרות: $\binom{k+n-1}{k}$.

$$x_1+x_2+x_3=4,\ x_i\geq 0 \Rightarrow \binom{4+3-1}{4}$$

תרגילים:

1) בריצה ל- 400 מ' 8 מתמודדים. כמה רשימות זוכי מדליות אפשריים?
ללא חזרות ועם סדר: $\frac{8!}{5!}$

2) כמה מילים בנות 9 אותיות ניתן לבנות מ- 7 א'-ים ו- 2 ב'-ים?
7 מ- 9 ללא חזרות וללא סדר: $\binom{9}{7}$
או 2 " " " " : $\binom{9}{2}$
או תמורה של 9 ואז ביטול סדר פנימי: $\frac{9!}{2!\,7!}$

שכבר פתרנו ע"י חלוקת k כדורים
<u>זהים</u> ל-n תאים המופרדים ב-$n-1$
מחיצות. כלומר, כל חלוקה כזו תיצור
רצף של $n-1$ מחיצות ו-k כדורים
כאשר מס' הכדורים בכל תא i מסמן
את מס' הפעמים שבחרנו את האיבר
ה-i:

דוגמא 5 מ-4:

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4$

000||00|

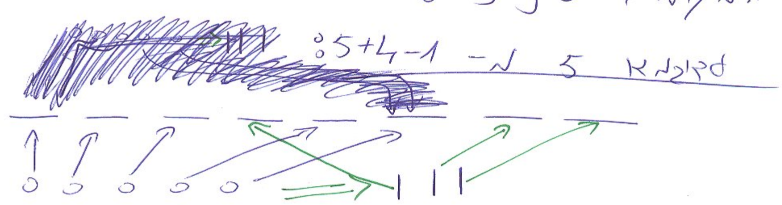
a_1, a_1, a_1, a_3, a_3

0|00||00

a_1, a_2, a_2, a_4, a_4.

אני בוחרים k תאים מתוך n ללא חשי', כאשר ניתן לבחור תא
הסבר בין הכדורים
יותר מפעם אחת (← עם חזרות).
זה שקול לבחירת k מיקומים ללא חזרו— מתוך
$k+n-1$ עבור הכדורים (⇐ ללא חשי— לסדר).
המחיצות יהיו חייבו להיות ממוקמו— ב-$(n-1)$
המיקומים שנותר:

דוגמא 5 מ- $5+4-1$:



000|00||

a_1, a_1, a_1, a_2, a_2

עם k מ-n בלי חשיבות ועם חזרו— $\equiv$ k מ-$k+n-1$ " " ובלי " " : $\binom{k+n-1}{n-1}=\binom{k+n-1}{k}$

2) ללא חזרות וללא חשיבות לסדר:

צירוף של k מ-n הוא אוסף לא סדור (תת קבוצה) בגודל k מתוך קבוצה בגודל n.

נשים לב שעבור כל אוסף של k איברים שונים יש $k!$ תמורות $\Leftarrow$ מס' צירופים $\cdot\, k! =$ מס' חליפות

טענה: מס' תתי הקבוצות בגודל k בתוך A בגודל n הוא:

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!}=\binom{n}{k}$$

דוגמאות:

1) ועד של 3 תלמידים מ-20: $\binom{20}{3}$

2) ועד של 2 בנות ו-3 בנים מתוך כתה 4 בנות ו-9 בנים: $\binom{4}{2}\binom{9}{3}$

3) עם חשיבות לסדר ועם חזרות:

$$\underbrace{n \quad n \quad \cdots \quad n}_{n^k}$$

דוגמא: מילוי לוח טוטו בן 16 טורים ב-1,2,X.

$\Leftarrow$ בחירת 16 מ-3 עם ... ועם ...: 3^{16}.

4) בלי חשיבות לסדר ועם חזרות:

בפתרון זה נמיר את הבעיה למקרה (2)

	עם חשיבות לסדר (תמורות)	בלי חשיבות לסדר
בלי חזרות	1 $\dfrac{n!}{(n-k)!}$	2 (צירופים) $\dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}=\dbinom{n}{k}$
עם חזרות	3 n^k	4 (חלוקות) $\dbinom{k+n-1}{n-1}$

נמלא את הטבלה עבור כל מקרה.

* ראשית נציין שעבור $n=|A|$, תמורה של A היא סידרה מאורך n שכל איברי A מופיעים בה.
כלומר, זו פונ' של מ-A לעצמה, ולכן גם חח"ע.
כתוצאה מכך מספר התמורות האפשרי הוא:

$$\left.\begin{array}{lll} a_1 & \longrightarrow & n \text{ אפ'} \\ a_2 & \longrightarrow & n-1 \text{ אפ'} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & \longrightarrow & 1 \text{ אפ'} \end{array}\right\} 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n = n!$$

<u>דוגמא:</u> מס' המילים בנות 6 אותיות שונות מ-A,B,C,D,E,F כך ש-C,D צמודות: $2!\cdot 5!$

* חליפה של k מ-n היא אוסף סדור מאורך k מתוך n איברים.

1) חליפות ללא חזרות:

$$\underbrace{\underset{n}{\overset{1}{\downarrow}}\quad \underset{n-1}{\overset{2}{\downarrow}}\quad \cdots \quad \underset{n-k+1}{\overset{k}{\downarrow}}}$$

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot(n-k)\cdots 1}{(n-k)\cdots 1}=\frac{n!}{(n-k)!}$$

<u>דוגמא:</u> בחירת יו"ר, סגן ומזכיר לוועד מתוך 20 תלמידים: $\frac{20!}{17!}$