

מתמטיקה בדידה

תיכונים סטים קיץ תשפ"ד
יונתן סמידוברסקי

תוכן העניינים

3	1 תרגול 1	
3	1.1	לוגיקה מתמטית
3	1.1.1	פסוקים וקשרים, הצרנה וטבלאות אמת
3	1.1.2	קשרים
3	1.1.3	פסוקים מורכבים
4	1.1.4	הצרנה
4	1.1.5	טאוטולוגיות
5	1.1.6	טענת גרירה
6	1.1.7	תנאי הכרחי ומספיק
6	1.1.8	דרכי הוכחה
6	1.1.9	פרדיקטים וכמתים
8	1.1.10	שלילת פסוקים
9	2 תרגול 2	
9	2.1	אינדוקציה
12	2.2	מבוא לתורת הקבוצות
12	3 תרגול 3	
12	3.1	שיטות הוכחה בסיסיות
13	3.2	פעולות על קבוצות
15	3.3	איחוד וחיתוך כלליים
17	3.4	קבוצת החזקה
18	4 תרגול 4	
18	4.1	מכפלה קרטזית
19	4.2	יחסים
19	4.3	יחס שקילות
22	5 תרגול 5	
22	5.1	יחסי סדר
23	5.2	איברים מיוחדים ביחס סדר, יחס סדר קווי
24	6 תרגול 6	
24	6.1	פונקציות
25	6.2	תכונות של פונקציות (חד-חד ערכיות, על), תמונה ותמונה הפוכה

26	7	תרגול 7
26	7.1	הרכבת פונקציות
27	7.2	פונקציות הפיכות
27	7.3	פונקציה מצומצמת
28	8	תרגול 8
28	8.1	עוצמות
29	8.2	עוצמת הטבעיים, הרציונאליים והשלמים
30	9	תרגול 9
30	9.1	משפט קנטור שרדר ברנשטיין
30	9.2	עוצמת הממשיים
31	9.3	קבוצות בנות מנייה
31	9.4	תרגילים נוספים
32	10	תרגול 10
32	10.1	אריתמטיקה של עוצמות
34	10.2	איחוד בן מנייה של קבוצות בנות מנייה

1 תרגול 1

1.1 לוגיקה מתמטית

1.1.1 פסוקים וקשרים, הצרנה וטבלאות אמת

השפה העברית מורכבת ממשפטים. המקבילה בשפה המתמטית נקראת "פסוק".
 האוטמים הם חלק מאבני היסוד של הפסוקים.
 למשל, "סמסטר הקיץ החל ויש 2 קורסים" מורכב משני אוטמים.
אוטמים הם יחידות תוכן בסיסית, פסוקים הם יחידות יותר מורכבות המורכבות מאוטמים וקשרים.
 אטום מקבל ערך אמת: T/F (אמיתי או שקרי).
 פסוקים יקבלו ערך אמת לפי ערכי האמת של האוטמים והקשרים המעורבים בפסוק.

1.1.2 קשרים

היו A, B אוטמים (או פסוקים), הם יכולים להיות אמת (T) או שקר (F). נגדיר את הקשרים באמצעות טבלת אמת:

p	$\neg p$ ("שלילה")
T	F
F	T

p	q	$p \vee q$ ("או")	$p \wedge q$ ("וגם")	$p \rightarrow q$ ("גרירה")	$p \leftrightarrow q$ ("כיוונית")
T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	F
F	F	F	F	T	T

1.1 דוגמה

(א) אם נסיים את החומר של השיעור אז נלך הביתה מוקדם.
 אם סיימנו את החומר מוקדם ולא הלכנו הביתה מוקדם, אז ערך האמת של הפסוק יקבל F .
 (ב) 3 הוא מספר ראשוני או 4 הוא מספר ראשוני.
 הפסוק הזה מקבל ערך אמת T .
 (ג) מספר טבעי ניתן להצגה באמצעות שתי ספרות אם ורק אם הוא קטן מ-100.

1.1.3 פסוקים מורכבים

פסוקים יכולים להיות מורכבים יותר מאשר האוטמים או חיבור של אוטמים על ידי קשרים. המורכבת נוצרת על ידי הפעלה חוזרת של קשרים.

1.2 דוגמה

$$(\neg p \vee q) \wedge ((p \rightarrow q) \rightarrow p)$$

דוגמה 1.3. אם $\mathbb{F}$ הוא שדה, אז אם a לא שווה לאפס וגם b לא שווה לאפס אזי ab לא שווה לאפס.

1.1.4 הצרנה

כתיבת רעיון בעזרת ניסוח פורמלי.

דוגמה 1.4. נצריך את דוגמה 1.3.

נסמן $F - \mathbb{F}$ הוא שדה, $A - a$ שווה לאפס, $B - b$ שווה לאפס, $Z - ab$ שווה לאפס. אז הפסוק אומר $F \rightarrow ((\neg A \wedge \neg B) \rightarrow (\neg Z))$.

דוגמה 1.5. נצריך: "ערן לובש חולצה סגולה בכל פעם שהוא לובש מכנסיים בצבע שחור" נסמן A - ערן לובש חולצה סגולה, B - ערן לובש מכנסיים שחורות. ההצגה תהיה:

$$B \rightarrow A$$

1.1.5 טאוטולוגיות

הגדרה 1.6. טאוטולוגיה הינה ביטוי שנכון תמיד ללא תלות בערכים שמציבים בו.

דוגמה 1.7.

$$p \vee \neg p, T \vee p, \neg (F \wedge p)$$

הגדרה 1.8. נאמר שביטוי A שקול לביטוי B (ונסמן $A \equiv B$) אם הביטוי $A \leftrightarrow B$ הוא טאוטולוגיה.

דוגמה 1.9. הראו את השקילות הבאות:

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

$$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \rightarrow \neg p$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

תכונות

הקשרים $\vee, \wedge$ הם קיבוציים, חילופיים...
בנוסף, מתקיים פילוג

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \equiv p \wedge (q \vee r)$$

$$(p \vee q) \wedge (p \vee r) \equiv p \vee (q \wedge r)$$

כללי דה-מורגן

$$\neg (p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$$

$$\neg (p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$$

אפשר גם להוכיח:

$$(p \leftrightarrow q) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

תרגיל 1.10. האם המשפטים הבאים שקולים:

- א. אם אייל שמח אז ענת גבוהה, ואם ענת לא גבוהה אז אייל לא שמח.
ב. אייל שמח אם ורק אם ענת גבוהה.

פתרון. המשפטים לא שקולים.

נצטרך, נסמן A - אייל שמח, E - ענת גבוהה.

א' אומר: $(A \rightarrow E) \wedge (\neg E \rightarrow \neg A)$

ב' אומר: $A \leftrightarrow E$

$$(A \rightarrow E) \wedge (\neg E \rightarrow \neg A) \equiv (A \rightarrow E) \wedge (A \rightarrow E) \equiv (A \rightarrow E)$$

אז מספיק למצוא דוגמה: שבה $A \rightarrow E$ מקבל ערך אמת מסוים, $A \leftrightarrow E$ מקבל ערך אחר.

A - לא נכון, B - נכון. אז $A \rightarrow E$ מקבל ערך אמת T , אבל $A \leftrightarrow E$ מקבל ערך אמת F .

1.1.6 טענת גרירה

טענות גרירה הן טענות נפוצות במתמטיקה, הן טוענות שמתקיים כי אם (משהו) אז (משהו).

אם הפסוק $A \rightarrow B$ הינו אמת, נסמן $A \Rightarrow B$.

איך מוכיחים או מפריכים טענות גרירה?

הוכחה נניח A נכון ונוכיח שגם B נכון.

הפרכה למצוא דוגמה מפריכה, מקיימת A נכון אבל B לא נכון.

תרגיל 1.11. האם משני הנתונים:

א. אם אני מנגן בחצוצרה אז אני לא מנגן בתופים ובפסנתר יחד.

ב. אם אני לא מנגן בחצוצרה אז אני לא מנגן בפסנתר.

ניתן להסיק: אני לא מנגן בפסנתר אז אני מנגן בתופים.

פתרון. הפרכה. לא ניתן להסיק זאת.

נמצא דוגמה שעונה על נתוני השאלה אבל לא גוררת את ההסקה.

נניח שאני לא מנגן באף אחד מהכלים (לא בחצוצרה, לא בתופים ולא בפסנתר), אז א'

נכון כי שקר גורר כל דבר.

בנוסף, ב' הוא גם נכון כי אני לא מנגן בחצוצרה וגם לא מנגן בפסנתר.

אבל לא ניתן להסיק את ההסקה: כי אני לא מנגן בפסנתר אבל עדיין אני לא מנגן

בתופים.

תרגיל 1.12. האם משני הנתונים:

א. אם אני מנגן בחצוצרה אז אני לא מנגן בתופים ובפסנתר יחד.

ב. אם אני לא מנגן בחצוצרה אז אני לא מנגן בפסנתר.

ניתן להסיק: אם אני מנגן בפסנתר אני לא מנגן בתופים.

פתרון. הוכחה, ניתן להסיק.

נניח שאני מנגן בפסנתר, ננסה להראות שאני לא מנגן בתופים.

נשים לב כי לא ייתכן שאני לא מנגן בחצוצרה (כי אז לפי נתון ב', לא הייתי מנגן בפסנתר

והנחתי שזה המצב)

עכשיו, לפי נתון א' בגלל שאני בחצוצרה, אני לא מנגן בתופים ובפסנתר יחד. אבל הנחנו

שאני מנגן בפסנתר, לכן אני לא מנגן בתופים. כנדרש.

1.1.7 תנאי הכרחי ומספיק

כאשר אומרים ש B הוא תנאי הכרחי ל A פירושו הוא שהפסוק $A \rightarrow B$ נכון. לעיתים, לצורך הדגשה מסמנים $A \Rightarrow B$.
כאשר אומרים ש B הוא תנאי מספיק ל A , פירושו הוא שהפסוק $B \rightarrow A$ נכון. לעיתים, לצורך הדגשה מסמנים $B \Rightarrow A$.

1.1.3 תרגיל

מצאו דוגמאות לבאים:
(א) תנאי הכרחי ולא מספיק - בשביל לנצח בשחמט, צריך לעשות שח (הכרחי) אך לא מספיק (כי לא בהכרח שחמט). בשביל לנצח ביורו, ספרד חייבת לנצח ברבע הגמר אבל זה לא בהכרח מספיק כי היא תצטרך גם לנצח בחצי ובגמר.
(ב) תנאי לא הכרחי אך מספיק - אם מספר מתחלק ב 4 הוא מתחלק ב 2.
(ג) תנאי הכרחי ומספיק - מספר מתחלק ב 3 אם ורק אם סכום הספרות שלו מתחלק ב 3.
(ד) תנאי לא הכרחי ולא מספיק - היום יום ראשון, יורד היום גשם.

1.1.8 דרכי הוכחה

כאשר רוצים להוכיח טענה, לפעמים יותר נוח להוכיח ניסוח שקול (לוגית) אליה. דוגמאות נפוצות:

$$(A \rightarrow B) \equiv (\neg B \rightarrow \neg A) \equiv ((\neg A) \vee B)$$

הנחה בשלילה: $A \equiv (\neg A \rightarrow F)$

$$(A \vee B) \equiv (\neg A \rightarrow B)$$

1.1.9 פרדיקטים וכמתים

בניגוד לאטומים שהם ללא משתנים, הפרדיקטים הינם פונקציות התלויות במשתנים. לדוגמה ניתן להגדיר את הפרדיקט $S(x)$ להיות פרדיקט המביע כי x הינו סטודנט באוניברסיטה ("מביע" פירושו שאם x הוא סטודנט אזי $S(x)$ הוא T ואם x אינו סטודנט $S(x)$ הוא F). כיוון שאטומים הם ללא משתנים הם יכולים להיות T או F אבל לא שניהם. לעומתם פרדיקטים הם תלויים במשתנים ולכן ערך האמת שלהם יקבע לפי ההצבה במשתנים. למשל, הפרדיקט $S(x, y)$ שמביע כי $x < y$ מקיים כי $S(2, 3) = T$ אבל $S(3, 2) = F$. לכל הצבה במשתני הפרדיקטים נקבל פסוק! בנוסף, ניתן להוסיף כמתים. כמת "לכל" $\forall$ וכמת "קיים" $\exists$.

דוגמה 1.14 - נסמן $S(x, y)$ - "המכסה y מתאים לסיר x "

$$\forall x \exists y S(x, y)$$

1.1.5 דוגמה

נגדיר $S(x)$ - x הוא סטודנט

$C(x)$ - x מסכם את ההרצאות

$H(x, y)$ - x נעזר ב y

מה פירוש הביטוי הבא?

$$\forall x [S(x) \rightarrow (\exists y [S(y) \wedge C(y) \wedge H(x, y)])]$$

לכל סטודנט קיים סטודנט שמסכם את ההרצאות והסטודנט נעזר בו.

1.1.6 דוגמה

הצרך: (א) לכל שני מספרים x, y (נניח $x < y$) קיים מספר שגדול מ x וקטן מ y .

$$\forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y))$$

(ב) לכל איבר בשדה קיים ביחידות איבר הופכי.

$$\forall a \in \mathbb{F} \exists a^{-1} \in \mathbb{F} (aa^{-1} = 1 \wedge \forall b \in \mathbb{F} ab = 1 \rightarrow b = a^{-1})$$

תרגיל 1.17. האם נכון להגיד לכל פרדיקט $S(x, y)$ את הבאים?

$$\begin{aligned} \text{א) } & \forall x \exists y S(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x S(x, y) \\ \text{ב) } & \exists y \forall x S(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y S(x, y) \end{aligned}$$

פתרון.

א) לא נכון. אומרים שלכל x קיים y שמתאים לו, זה לא בהכרח אומר שיש איזשהו y שמתאים לכל x -ים.

לדוגמה, בואו נסתכל על המספרים השלמים $\mathbb{Z}$, נתבונן בפרדיקט $S(x, y)$ שאומר $x > y$. אז נכון להגיד $\forall x \exists y S(x, y)$ (לכל מספר שלם, קיים מספר שלם שקטן ממנו, למשל $y = x - 1$)

מנגד, לא נכון להגיד $\exists y \forall x S(x, y)$ (אין מספר y שקטן מכל x)
 ב) נכון. אם מניחים $\exists y \forall x S(x, y)$, נסמן את y הזה שמתאים לכולם להיות y' (עבורו לכל x מתקיים $S(x, y') = T$)
 אז אפשר להוכיח את $\forall x \exists y S(x, y)$. איך מוכיחים? יהי x , קיים $y = y'$ שעבורו $S(x, y) = T$.
 במילים, אם קיים איבר y שמתאים לכל x -ים, בפרט לכל x קיים y (זה שמתאים לכולם).

מסקנה 1.18. סדר הכמתים משנה!

הערה 1.19. חשוב לדעת מאיפה מגיעים משתני הפרדיקט, למשל הביטוי

$$\forall x \forall_{x < y} \exists z x < z \wedge z < y$$

הוא נכון כשהמשתנים מגיעים מהרציונאליים, אבל שקרי בשלמים. לעומת זאת, שמות המשתנים לא משנים:

$$\forall y \forall z \exists x y < x \wedge x < z$$

תרגיל 1.20. הוכיחו $\forall y \forall z \exists x y < x \wedge x < z$ כשהמשתנים מגיעים מ $\mathbb{Q}$, הפריכו מ $\mathbb{Z}$.

פתרון.

הוכחה ב $\mathbb{Q}$ יהי x , יהי y , נרצה להראות שקיים z עבורו $x < z < y$. ניקח $z = \frac{x+y}{2}$ (הממוצע שלהם).

הפרכה ב $\mathbb{Z}$ ניקח $x = 3, y = 4$, אין שום מספר שלם בין 3 ל 4.

תרגיל 1.21. הוכח או הפרך: לכל פרדיקטים P, Q

$$\begin{aligned} \text{א) } & (\forall x P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \\ \text{ב) } & (\forall x P(x) \vee Q(x)) \Leftarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \\ \text{ג) } & (\forall x P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x)) \\ \text{ד) } & (\forall x P(x) \wedge Q(x)) \Leftarrow (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x)) \end{aligned}$$

פתרון.

א) לא נכון. נניח ש x הם טבעיים, נגדיר P - המספר זוגי, Q - המספר אי-זוגי. אכן, לכל מספר או שהוא זוגי או שהוא אי-זוגי. אבל לא נכון להגיד שאם שכל המספרים הם זוגיים או שכל המספרים אי-זוגיים.

ב) כן נכון. הטענה משמאל היא חזקה יותר, היא אומרת שכל x מקיימים P או שכל x -ים מקיימים Q .

נוכיח פורמלית: נניח כי מתקיים $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$.

בגלל שזה פסוק "או", על מנת שיתקיים חייב שאחד מהביטויים יקבל ערך אמת T .
 אם מתקיים $\forall x P(x)$ אז מתקיים גם $\forall x (P(x) \vee Q(x))$ (כי לכל x , $P(x)$ מקבל T
 ובפרט $P(x) \vee Q(x)$ מקבל T)
 אם מתקיים $\forall x Q(x)$ אז מתקיים גם $\forall x (P(x) \vee Q(x))$ (כי לכל x , $Q(x)$ מקבל T
 ובפרט $P(x) \vee Q(x)$ מקבל T)
 ג-ד) שני הביטויים הם שקולים. (תרגיל - להוכיח פורמלית!)
 הערה 1.22. נשים לב שהכמת $\wedge$ "מסתדר" עם $\forall$, אפשר באותו אופן להראות כי $\vee$ "מסתדר"
 עם $\exists$.
 כלומר

$$(\exists x P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x))$$

אבל

$$(\exists x P(x) \wedge Q(x)) \not\equiv (\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))$$

כן יש גרירה משמאל לימין (אם קיים x שמקיים את P, Q , בפרט קיים אחד שיקיים את P
 וגם קיים אחד שיקיים את Q).
 הכיוון השני לא נכון, למשל P - המספר זוגי, Q - המספר אי-זוגי, זה נכון שקיים מספר
 זוגי וקיים מספר אי-זוגי אבל לא קיים מספר שמקיים את שניהם.
 (שימו לב - אפשר להסיק את זה גם מקונטרה-פוזיבי, מושאר כתרגיל)

1.1.10 שלילת פסוקים

דוגמה 1.23. מהי השלילה של הפסוק: "לכל סיר יש מכסה המתאים לו".
 קיים סיר שאין לו מכסה, כלומר, קיים סיר שכל המכסים לא מתאימים לו.
 בעת שלילה של פסוק לוגי, הכמתים "לכל" ו"קיים" מתחלפים זה עם זה, השלילה עוברת
 הלאה. את השלילה של הקשרים ניתן לבצע באמצעות טאוטולוגיות וטבלאות אמת.

דוגמה 1.24. שללו את הבאים:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n n \geq N \rightarrow ([a_n - L < \epsilon] \wedge [a_n - L > -\epsilon]) \quad (א)$$

$$\neg (\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n n \geq N \rightarrow ([a_n - L < \epsilon] \wedge [a_n - L > -\epsilon]))$$

$$\equiv \exists \epsilon > 0 (\neg \exists N \forall n n \geq N \rightarrow ([a_n - L < \epsilon] \wedge [a_n - L > -\epsilon]))$$

$$\equiv \exists \epsilon > 0 \forall N (\neg \forall n n \geq N \rightarrow ([a_n - L < \epsilon] \wedge [a_n - L > -\epsilon]))$$

$$\equiv \exists \epsilon > 0 \forall N \exists n (\neg [n \geq N \rightarrow ([a_n - L < \epsilon] \wedge [a_n - L > -\epsilon]))$$

$$\neg (p \rightarrow q) \equiv \neg (\neg p \vee q) \equiv (\neg \neg p) \wedge \neg q \equiv p \wedge \neg q \quad \text{ניזכר כי } q$$

$$\equiv \exists \epsilon > 0 \forall N \exists n (n \geq N \wedge \neg ([a_n - L < \epsilon] \wedge [a_n - L > -\epsilon]))$$

$$\equiv \exists \epsilon > 0 \forall N \exists n (n \geq N \wedge ((\neg [a_n - L < \epsilon]) \vee \neg [a_n - L > -\epsilon]))$$

$$\forall x [S(x) \rightarrow (\exists y [S(y) \wedge C(y) \wedge H(x, y)])] \quad (ב)$$

$$\neg (\forall x [S(x) \rightarrow (\exists y [S(y) \wedge C(y) \wedge H(x, y)])])$$

$$\equiv \exists x [S(x) \wedge \neg (\exists y [S(y) \wedge C(y) \wedge H(x, y)])]$$

$$\equiv \exists x [S(x) \wedge \forall y (\neg (S(y) \wedge C(y) \wedge H(x, y)))]$$

$$\equiv \exists x [S(x) \wedge \forall y ((\neg S(y) \vee \neg C(y) \vee \neg H(x, y)))]$$

2 תרגול 2

2.1 אינדוקציה

אינדוקציה מתמטית תהי סדרת טענות T_n כך שמתקיימים:
(א) T_1 מתקיימת.

(ב) לכל n , אם T_n מתקיימת אזי T_{n+1} מתקיימת.
אזי לכל $n \in \mathbb{N}$ הטענה T_n מתקיימת.

אינדוקציה שלמה תהי סדרת טענות T_n כך שמתקיימים:
(א) T_1 מתקיימת.

(ב) לכל $n \in \mathbb{N}$ אם לכל $k < n$ הטענה T_k מתקיימת אזי T_n מתקיימת.
אזי לכל $n \in \mathbb{N}$ הטענה T_n מתקיימת.

דוגמה 2.1. נוכיח כי הטענה

$$(1 + 2 + \dots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$$

נכונה לכל $n \in \mathbb{N}$.

בסיס עבור $n = 1$, אכן מתקיים $1^2 = 1^3$.

צעד נניח שהטענה נכונה עבור n כלשהו, כלומר מתקיים

$$(1 + 2 + \dots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$$

נוכיח נכונות עבור $n + 1$, כלומר

$$(1 + 2 + \dots + n + n + 1)^2 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n + 1)^3$$

נשים לב כי

$$(1 + 2 + \dots + n + n + 1)^2 = ((1 + 2 + \dots + n) + (n + 1))^2$$

$$= (1 + 2 + \dots + n)^2 + 2(1 + 2 + \dots + n)(n + 1) + (n + 1)^2$$

מהנחת האינדוקציה

$$= 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot (n+1) + (n+1)^2$$

$$= 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^2(n+1) = 1^3 + 2^3 + \dots + (n+1)^3$$

כנדרש.

$$F_n := \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & n \geq 2 \end{cases}$$

דוגמה 2.2. מגדירים את מספר פיבונאצ'י להיות

הוכיחו כי לכל n מתקיים

$$\sum_{i=0}^n (F_i)^2 = F_n \cdot F_{n+1}$$

בסיס עבור $n = 0$ ברור כי $F_0^2 = 0 = 0 \cdot 1 = F_0 \cdot F_1$.

צעד נניח נכונות עבור n , נוכיח עבור $n + 1$.

$$\sum_{i=0}^{n+1} (F_i)^2 = \sum_{i=0}^n (F_i)^2 + F_{n+1}^2$$

מהנחת האינדוקציה

$$= F_n \cdot F_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1} (F_n + F_{n+1}) = F_{n+1} \cdot F_{n+2}$$

כנדרש.

תרגיל 2.3. נגדיר $a_0 = 0, a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$. הוכיחו כי לכל n מתקיים $a_n < 1$.

פתרון. אכן $a_0 < 1$, ננסה להוכיח את הצעד:

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$$

אם מהנחת האינדוקציה $a_n^2 < 1$ אז נקבל

$$a_{n+1} < 1^2 + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}$$

ונתקענו...

לפעמים כדאי להניח הנחות חזקות יותר.

נוכיח את טענה חזקה יותר: $\forall_n a_n < \frac{1}{2}$

בסיס $0 < \frac{1}{2}$

צעד נניח $a_n < \frac{1}{2}$ ונוכיח $a_{n+1} < \frac{1}{2}$, אכן:

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$$

מהנחת האינדוקציה

$$< \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

כנדרש.

תרגיל 2.4. (אי-שיויון ברנולי) הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים כי

$$(1+x)^n > 1+nx$$

לכל $n \geq 2$.

פתרון. יהי $x > 0$.

בסיס עבור $n = 2$

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x$$

צעד נניח נכונות עבור n , כלומר $(1+x)^n > 1+nx$, נוכיח עבור $n+1$.

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x)$$

מהנחת האינדוקציה

$$> (1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2 > 1+(n+1)x$$

כנדרש.

תרגיל 2.5. מצאו עבור אילו n -ים מתקיים $n^2 < 2^n$.

משפט 2.6. (המשפט היסודי של האריתמטיקה) כל מספר טבעי $n > 1$ ניתן להציגו כמכפלה (ייחודית) של מספרים ראשוניים.

הוכחה.

בסיס עבור $n = 2$ זה נכון כי הוא ראשוני (הוא הפירוק של עצמו).
צעד נניח שהטענה נכונה לכל $1 < k \leq n$ ונוכיח עבור $n + 1$.
 אם $n + 1$ ראשוני, סיימנו - הוא הפירוק של עצמו.
 אחרת, הוא מתפרק למכפלה $n + 1 = ab$, כאשר $1 < a, b < n + 1$. מהנחת האינדוקציה
 a, b מתפרקים למכפלה של מספרים ראשוניים

$$a = \prod_{k=1}^l p_k, b = \prod_{i=1}^r q_i$$

אזי

$$n + 1 = ab = \prod_{k=1}^l p_k \cdot \prod_{i=1}^r q_i$$

□

כנדרש.

מסקנה 2.7. יש אינסוף מספרים ראשוניים.

נניח בשלילה כי יש מספר סופי $p_1, \dots, p_n$.
 נתבונן במספר $p_1 p_2 \dots p_n + 1$, צריך להיות קיים לו פירוק לראשוניים אבל הוא לא מתחלק
 באף אחד מהם - לכן ראשוני, בסתירה.

תרגיל 2.8. תהי טבלה של $2^n \times 2^n$ שהוציאו ממנה משבצת, הראו שניתן לכסות אותה ב' (משבצות בצורת האות יוד).

תרגיל 2.9. הראו כי כל מספר טבעי ניתן לייצוג כסכום **ייחודי** של חזקות של 2.

פתרון. יש לנו טענת קיום ויחידות. נראה באינדוקציה את הטענה: עבור $n \in \mathbb{N}$, ניתן לייצג אותו כסכום חזקות של 2 באופן יחיד.
בסיס $n = 1$ ניתן לייצג כ- 2^0 , לכל סכום אחר של חזקות של 2 יהיה חייב להיות בו $2^i, i \geq 1$. אבל זה הופך את הסכום הזה לגדול מאחד...
צעד נניח נכונות עבור $k < n$, כלומר כל $k < n$ ניתן לייצג באופן יחיד על ידי חזקות של 2. עכשיו, נראה שזה נכון עבור n .

מקרה 1 - (קיום) אם n זוגי, אזי אפשר לכתוב $n = 2k$ עבור $k < n$.
 מהנחת האינדוקציה, אפשר לכתוב את k כסכום חזקות של 2: $2^{a_1} + \dots + 2^{a_t} = k$

$$n = 2k = 2(2^{a_1} + \dots + 2^{a_t}) = 2^{a_1+1} + \dots + 2^{a_t+1}$$

(יחידות) נניח בשלילה יש שני ייצוגים שונים ל- $2k$,

$$2^{b_1} + \dots + 2^{b_m} = 2k = 2^{c_1} + \dots + 2^{c_t}$$

(שימו לב, $2k$ זוגי ולכן $b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_t \geq 1$)
 עכשיו, נחלק ב-2 ונקבל

$$2^{b_1-1} + \dots + 2^{b_m-1} = k = 2^{c_1-1} + \dots + 2^{c_t-1}$$

ומצאנו שני ייצוגים ל- k , בסתירה להנחת האינדוקציה כי אמור להיות אחד.

מקרה 2 - אם n אי-זוגי, אזי אפשר לכתוב $n = 2k + 1$, עבור $k < n$.
 (קיום) מהנחת האינדוקציה, אפשר לכתוב את k , $2^{a_1} + \dots + 2^{a_t} = k$

$$n = 2k + 1 = 2(2^{a_1} + \dots + 2^{a_t}) + 2^0 = 2^0 + 2^{a_1+1} + \dots + 2^{a_t+1}$$

(יחידות) נניח בשלילה יש שני ייצוגים ל $n = 2k + 1$

$$2^{c_1} + \dots + 2^{c_q} = 2k + 1 = 2^{b_1} + \dots + 2^{b_m}$$

עכשיו, נשים לב שבשני האגפים חייב להופיע 2^0 , נניח $b_1 = c_1 = 0$ ונקבל

$$2^{c_2} + \dots + 2^{c_q} = 2k = 2^{b_2} + \dots + 2^{b_m}$$

$$2^{c_2-1} + \dots + 2^{c_q-1} = k = 2^{b_2-1} + \dots + 2^{b_m-1}$$

ושב סתירה, כי מהנחת האינדוקציה, ל k יש ייצוג יחיד ולא שניים שונים.



2.2 מבוא לתורת הקבוצות

ההגדרה האינטואיטיבית לקבוצה הינה אוסף של איברים בלי חשיבות לסדר ולחזרות. ההגדרה הזאת מובילה לסתירות לוגיות כמו "פרדוקס ראסל". ישנה הגדרה של "תורת הקבוצות האקסיומטית" כדי לטפל בבעיה הזו, ההגדרה האינטואיטיבית (הנאיבית) תספיק לו.

דוגמה 2.10. $\{2, \{1, 2, \{1\}\}, \{1\}, \{\}\}$

הגדרה 2.11. נסמן שאיבר שייך לקבוצה $\in$, לא שייך $\notin$.

דוגמה 2.12. $2 \in A, 1 \notin A, A = \{2, \{1, 2, \{1\}\}, \{1\}, \{\}\}$

הגדרה 2.13. אומרים שקבוצה A מוכלת בקבוצה B (ומסמנים $A \subseteq B$) אם כל האיברים A הם גם איברים ב B . כלומר, $\forall a \in A, a \in B$ או: $a \in A \rightarrow a \in B$.

דוגמה 2.14. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

תרגיל 2.15. מצאו קבוצות A, B כך שמתקיים:

א) $A \in B, A \subseteq B$

ב) $A \in B, A \not\subseteq B$

ג) $A \notin B, A \subseteq B$

ד) $A \notin B, A \not\subseteq B$

3 תרגול 3

3.1 שיטות הוכחה בסיסיות

ישנן מספר שיטות לפתרון תרגילים מתמטיים.

(1) הנחה בשלילה: נניח את הנתונים, נניח את השלילה של הטענה שצריך להוכיח, נסיק סתירה.

דוגמה 3.1. נוכיח כי $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

דוגמה 3.2. יהי מספר ממשי $x \geq 0$ כך שלכל מספר חיובי $\epsilon > 0$ מתקיים כי $x < \epsilon$. הוכיחו כי $x = 0$.

(2) הוכחת פסוק עם כמתים - על מנת להוכיח טענת **לכל**, לוקחים איבר כללי ללא תנאים ומראים כי הטענה נכונה לגביו. הוכחות כאלו מתחילות במילה "יהי". על מנת להוכיח טענת **קיים**, אנו מספקים דוגמה מסוימת או מוכיחים שדוגמה כזו קיימת (מבלי לספק אותה במפורש).

דוגמה 3.3. הוכיחו כי לכל מספר ממשי חיובי x קיים מספר טבעי n כך שמתקיים $\frac{1}{n} < x$.
(3) הוכחת הכלה ושיוויון בין קבוצות -

הכלה בין קבוצות היא מקרה פרטי של טענת לכל, יהי איבר בקבוצה המוכלת וצ"ל כי האיבר שייך לקבוצה המכילה.
על מנת להוכיח **שיוויון** בין שתי קבוצות אנו יכולים לפעול בשתי דרכים נפוצות. שיטה ראשונה היא להוכיח שלכל איבר x מתקיים כי x שייך לקבוצה הימנית אם ורק אם x שייך לשמאלית. שיטה שנייה היא הכלה דו-כיוונית, להוכיח שהימנית מוכלת בשמאלית וגם השמאלית מוכלת בימנית.

3.4 תרגיל

(א) נתונות $A = \{2n + 1 : n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{2m + 3 : m \in \mathbb{Z}\}$. הוכיחו כי $A = B$.
(ב) הוכיחו כי $\{n^2 : n \in \mathbb{N}\} = \{n \in \mathbb{N} : \sqrt{n} \in \mathbb{N}\}$.

(4) הוכחת שקילות לוגית (אם ורק אם) - על מנת להוכיח כי טענה א' מתקיימת אם ורק אם טענה ב' מתקיימת מספיק להוכיח כי טענה א' גוררת את טענה ב' וגם טענה ב' גוררת את טענה א'.
(5) חלוקה למקרים

3.2 פעולות על קבוצות

הגדרה 3.5. (פעולות על קבוצות)

תהיינה A, B קבוצות. נגדיר את (איחוד, חיתוך, הפרש, הפרש סימטרי)

$$A \cup B := \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B := \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \setminus B := \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

בנוסף, נגדיר את המשלים. תהי קבוצה U ונביט בתת-קבוצה שלה A . ניתן להגדיר את המשלים של A כאוסף האיברים ב- U שאינם ב- A (כלומר, $U \setminus A$), מסומן A^c .
לא ניתן לדבר על משלים אוניברסאלי ללא U מכיוון שאין קבוצה המכילה את כל האובייקטים בעולם (אחרת, מגיעים לסתירות כמו פרדוקס ראסל).
דרך נוחה לתאר את הפעולות האלו היא באמצעות דיאגרמת ון (נדגים בכיתה).

טענה 3.6. (תכונות בסיסיות של קבוצות)

שימו לב שהגדרנו את הקבוצות בצורה לוגית, לכן הבאים נובעים מתכונות לוגיות:
(א) האיחוד והחיתוך הם אסוציאטיביים וחילופיים.
(ב) בנוסף, יש דיסטריביוטיביות

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(ג) הקבוצה הריקה (מסומנת $\emptyset := \{\}$) מוכלת בכל קבוצה)

$$\emptyset \cup A = A, \emptyset \cap A = \emptyset$$

$$(A \cap B) \subseteq A, B, A \subseteq A \cup B$$

$$A \cup A^c = U$$

$$U^c = \emptyset, \emptyset^c = U$$

$$(A^c)^c = A$$

(ט) מדה-מורגן:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$A \triangle B = A^c \triangle B^c \quad (\text{אם})$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c \quad (\text{אם})$$

תרגיל 3.7. הוכח כי $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

פתרון. דרך גרירות לוגיות

$$x \in A \cap (B \setminus C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B \wedge x \notin C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin A)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge [x \notin C \vee x \notin A]$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge x \notin (A \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$$

תרגיל 3.8. תהינה A, B קבוצות כל שמתקיים $A \setminus B = B \setminus A$, הוכיחו כי $A = B$

פתרון. נניח בשלילה $A \neq B$, נחלק למקרים:

אם קיים $a \in A$ כך ש $a \notin B$ אזי $a \in A \setminus B$ אבל $a \notin B \setminus A$ בסתירה לשוויון ביניהן.
אם קיים $b \in B$ כך ש $b \notin A$ אזי $b \in B \setminus A$ אבל $b \notin A \setminus B$ בסתירה לשוויון ביניהן.

תרגיל 3.9. תהינה A, B, C קבוצות. הוכיחו כי $A \setminus (B \cup C) = A \setminus B \cap A \setminus C$ אם ורק אם $A \cap B = \emptyset$ וגם $A \cap C = \emptyset$.

פתרון. נוכיח בשני הכיוונים.

$\Leftarrow$ אם $A \setminus (B \cup C) = A \setminus B \cap A \setminus C$, נניח בשלילה קיים איבר $x \in A \cap C$ או קיים איבר $x \in A \cap B$. בחלוקה למקרים:

אם $x \in A \cap C$ אזי $x \in B \cup C$ אזי $x \notin A \setminus (B \cup C)$ אבל $x \in A \setminus B \cap A \setminus C$.

אם $x \in A \cap B$ אזי $x \in B \cup C$ אזי $x \notin A \setminus (B \cup C)$ אבל $x \in A \setminus B \cap A \setminus C$.

בשני המקרים מגיעים לסתירה.

$\Rightarrow$ נניח $A \cap B = A \cap C = \emptyset$. נוכיח $A \setminus (B \cup C) = A \setminus B \cap A \setminus C$.

ההכלה בכיוון $\subseteq$ ברורה (מדובר בחיתוך עם המשלים).

עכשיו, יהי $x \in A \setminus (B \cup C)$ אזי $x \notin B, x \notin C$ ולכן $x \notin B \cup C$ ולכן $x \in A \setminus B \cap A \setminus C$ כנדרש.

תרגיל 3.10. תהי $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ קבוצה של קבוצות, נגדיר

$$B_1 = A_1$$

$$\forall_n B_{n+1} = B_n \triangle A_{n+1}$$

כלומר, $B_n = A_1 \triangle A_2 \triangle \dots \triangle A_n$.

הוכיחו כי לכל n מתקיים כי $x \in B_n$ אם ורק אם x שייך למספר אי-זוגי של קבוצות

מבין $A_1, \dots, A_n$.

פתרון. נוכיח באינדוקציה על n .

בסיס ברור כי $x \in B_1 = A_1$ אם ורק אם x הוא נמצא במס' זוגי של קבוצות מבין A_1 .

צעד נניח כי $x \in B_n$ אם ורק אם x בכמות אי-זוגית של קבוצות מבין $A_1, \dots, A_n$, נוכיח

את הטענה עבור $x \in B_{n+1}$.

$\Rightarrow$ יהי $x \in B_{n+1}$, נחלק למקרים:

אם $x \in B_n, x \notin A_{n+1}$ מהנחת האינדוקציה הוא בכמות אי-זוגית של קבוצות מבין

$A_1, \dots, A_n$ וכך גם עבור $A_1, \dots, A_{n+1}$ (כי הוא לא ב A_{n+1}).

אם $x \notin B_n, x \in A_{n+1}$, מהנחת האינדוקציה הוא בכמות זוגית של קבוצות מבין

$A_1, \dots, A_n$, לכן בכמות אי-זוגית מבין $A_1, \dots, A_{n+1}$.

$\Leftarrow$ בכיוון השני, אם x בכמות אי-זוגית של קבוצות מבין $A_1, \dots, A_{n+1}$ נחלק למקרים:

אם הוא לא ב A_{n+1} , אז הוא בכמות אי-זוגית מבין $A_1, \dots, A_n$ לכן $x \in B_n$ וסך הכל $x \in B_n \triangle A_{n+1} = B_{n+1}$.
 אם הוא כן ב A_{n+1} אז הוא בכמות זוגית של קבוצות מבין $A_1, \dots, A_n$ לכן $x \notin B_n$ ושוב נקבל $x \in B_n \triangle A_{n+1} = B_{n+1}$. כנדרש.

תרגיל 3.11. (אתגר) נגדיר את הקבוצות $\{A_k := \{n \cdot k : n \in \mathbb{N} \wedge nk \leq 625\}\}$ מצאו את $A_1 \triangle A_2 \triangle \dots \triangle A_{625}$.

3.3 איחוד וחיתוך כלליים

הגדרה 3.12. יהיו $\{A_i\}_{i \in I}$ אוסף קבוצות כאשר I הוא קבוצה של אינדקסים, אזי נגדיר את האיחוד והחיתוך של אוסף הקבוצות כך:

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid \exists i \in I x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \mid \forall i \in I x \in A_i\}$$

דוגמה 3.13. נגדיר $\forall n \in \mathbb{N} A_n := [n, n+1]$ אזי

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = [1, \infty), \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \emptyset$$

תרגיל 3.14. (הכללת פילוג) יהי $\{A_i\}_{i \in I}$ אוסף קבוצות, B קבוצה. הוכיחו כי

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$$

פתרון. בכיוון הראשון,

$$x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap B \Rightarrow x \in \bigcup_{i \in I} A_i \wedge x \in B \Rightarrow \exists i x \in A_i \wedge x \in B$$

עכשיו $x \in A_i \cap B$ לכן קיים i כך ש $x \in A_i \cap B$ כלומר $x \in \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$ בכיוון השני, $x \in \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$ כלומר קיים $i \in I$ כך שמתקיים $x \in A_i \cap B$ אזי $x \in (A_i \cap B) \Rightarrow x \in A_i \wedge x \in B \Rightarrow x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap B$

תרגיל 3.15. תראו:

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$$

פתרון. נראה אחד מהם, השני דומה

$$x \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c \Leftrightarrow x \notin \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \neg (\forall i \in I x \in A_i) \Leftrightarrow \exists i \in I x \notin A_i$$

$$\Leftrightarrow \exists i \in I x \in A_i^c \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} A_i^c$$

תרגיל 3.16. נגדיר $A_n := (n, n+1) \cup (-n-1, -n)$ הראו כי:

(א) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

(ב) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

(ג) נגדיר $B_n = \mathbb{R} \setminus A_n$, חשבו את $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$. (רמז - היעזרו בדה-מורגן)

תרגיל 3.17. (תרגילים נוספים)

(א) תהי $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ קבוצה של קבוצות, הוכיחו כי $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ אם ורק אם $\{n \in \mathbb{N} : x \in A_n\}$ אינסופית.

(ב) תהי U קבוצה אוניברסלית, עבור מספר m טבעי וקבוצות $A_1, \dots, A_m$ נגדיר את הקבוצה הבאה:

$$\mathcal{F} := \{X_1 \cap \dots \cap X_m : \forall 1 \leq i \leq m, X_i = A_i \vee X_i = A_i^c\}$$

הראו כי כל שתי קבוצות ב $\mathcal{F}$ זרות, כלומר לכל $B_1, B_2 \in \mathcal{F}$ מתקיים $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

הראו כי $\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B = U$ (כלומר, איחוד כל הקבוצות ב $\mathcal{F}$ הוא בדיוק U).

מה יחס השקילות המושרה מהחלוקה הזאת (אם מסירים את הקבוצה הריקה)?

(ג) נתבונן בקבוצות $A_n := \{2n, 3n, (-1)^n\}$. נגדיר

$$A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{2n}, B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{3n}$$

חשבו את $A \cap B$.

(ד) נתבונן ב $\{a \in \mathbb{Z} : n = a^2\}$, $A_n := \{a \in \mathbb{Z} : n = a^2\}$, חשבו $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

פתרון.

(א)

$\Leftarrow$ נניח כי $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)$, נרצה להראות שקבוצת האינדקסים שהוא נמצא בקבוצות שלהן אינסופית.

נניח בשלילה, הקבוצה סופית $\{n \in \mathbb{N} : x \in A_n\}$, ניקח איזשהו N שגדול ממש מכל האיברים שם.

עכשיו נראה כי $x \notin \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$, שזו סתירה (כי אז הוא לא בחיתוך).

עכשיו, למה $x \notin \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$? כי כדי להיות באיחוד, צריך שתהיה איזשהי קבוצה A_k כך ש $x \in A_k$ (עבור $k \geq N$), אבל הנחנו $x \notin A_k$ לכל $k \geq N$.

$\Rightarrow$ נניח כי $\{n \in \mathbb{N} : x \in A_n\}$ אינסופית, נראה $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)$. צריך להראות שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. יהי $n \in \mathbb{N}$, נראה כי $x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

צריך להראות שקיים איזשהו $k \geq n$ כך ש $x \in A_k$.

חייב להיות קיים k כזה, כי קבוצת האינדקסים ש x נמצא בהן היא אינסופית. נניח בשלילה שלא קיים $k \geq n$ כך ש $x \in A_k$,

זה היה אומר שקבוצת האינדקסים היא חסומה (בין 1 ל k) ולכן סופית. בסתירה.

(ב) ראשית, יהיו $B_1 \neq B_2 \in \mathcal{F}$, למה החיתוך ביניהן ריק?

נכתוב $B_1 = X_1 \cap \dots \cap X_m, B_2 = Y_1 \cap \dots \cap Y_m$, עכשיו חייב להתקיים כי יש i כך ש $X_i = Y_i^c$.

עכשיו, כל האיברים ב B_i הם איברים של X_i (כי החיתוך מוכל ב X_i).

וכל האיברים ב C_i הם איברים של X_i^c . לכן הן זרות.

שנית, נרצה להראות $\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B = U$. קודם כל, ברור כי $\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subseteq U$.

צריך להראות שלכל $x \in U$ קיימת $B \in \mathcal{F}$ כך ש $x \in B$.

בהינתן x , נרצה להסביר איזה $B \in \mathcal{F}$ הוא נמצא בה, כלומר איזה חיתוך $X_1 \cap \dots \cap X_m$.

הוא בוודאות נמצא בו (עבור $X_i \in \{A_i, A_i^c\}$)

נגדיר $X_i := \begin{cases} A_i & x \in A_i \\ A_i^c & x \notin A_i \end{cases}$ עכשיו, $x \in X_1 \cap \dots \cap X_m$. למה $x \in X_1 \cap \dots \cap X_m$? צריך להראות שלכל i , $x \in X_i$. אבל X_i הוגדרו על מנת ש x יהיה שם, כלומר אם $x \in A_i$ אז $x \in X_i$ ואם $x \notin A_i$ אז $x \in X_i$. ואם $x \in A_i^c = X_i$ יחס השקילות המתאים יזהה כל שני איברים כשווים אם הם נמצאים בדיוק באותו קבוצות. כלומר, יחס השקילות הוא: $x \sim y$ אם ורק אם $\forall i, x, y \in A_i \vee x, y \in A_i^c$.

3.4 קבוצת החזקה

הגדרה 3.18. תהי קבוצה A . נגדיר את קבוצת החזקה של A בתור אוסף כל תתי הקבוצות של A . מסומן

$$P(A) = \{X : X \subseteq A\}$$

דוגמה 3.19. נחשב $P(\{1, 2\})$

$$P(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

טענה 3.20. לכל קבוצה סופית $|A| = n$ מתקיים $|P(A)| = 2^n$. (משיקולים קומבינטוריים או באינדוקציה)

תרגיל 3.21. הוכיחו או הפריכו: (א) לכל A, B מתקיים

$$P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$$

(ב) לכל A, B מתקיים

$$P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$$

(ג) לכל A, B מתקיים

$$P(A) \setminus P(B) \neq P(A \setminus B)$$

פתרון.

(א) הוכחה

$$X \in P(A) \cap P(B) \Leftrightarrow X \in P(A) \wedge x \in P(B)$$

$$\Leftrightarrow X \subseteq A \wedge X \subseteq B \Leftrightarrow X \subseteq A \cap B \Leftrightarrow X \in P(A \cap B)$$

(ב) הפרכה

$$A = \{1, 2\}, B = \{3, 4\}$$

$$\{1, 3\} \in P(A \cup B), \{1, 3\} \notin P(A) \cup P(B)$$

(ג) הוכחה

לכל קבוצה A מתקיים $\emptyset \subseteq A$.

לכן, $\emptyset \in P(A), P(B), P(A \cup B)$.

נקבל $\emptyset \in P(A \cup B)$ אבל $\emptyset \notin P(A) \setminus P(B)$.

תרגיל 3.22. הראו כי אם $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$ אז $A \subseteq B$ או $B \subseteq A$.

תרגיל 3.23. תהא $A \subseteq U$ הוכיחו כי

$$P(A^c) \setminus \{\emptyset\} \subseteq P(A)^c$$

4 תרגול 4

4.1 מכפלה קרטזית

הגדרה 4.1. נרצה להגדיר את הזוג הסדור (a, b) .
ההבדל בין זוג סדור לבין קבוצה המכילה זוג איברים היא שהאיברים יכולים להיות שווים בזוג סדור והסדר שלהם מהותי.

נסביר איך בונים בעזרת קבוצות בלבד זוג סדור (כל המתמטיקה פחות או יותר נבנית על קבוצות בלבד).
אפשר להכליל גם ל- n -יה סדורה...

תרגיל 4.2. הוכיחו או הפריכו:

$$\begin{aligned} \text{א) } [(a = c) \wedge (b = d)] &\Leftrightarrow \{\{a\}, b\} = \{\{c\}, d\} \\ \text{ב) } [(a = c) \wedge (b = d)] &\Leftrightarrow \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \end{aligned}$$

פתרון.

א) הפרכה, ניקח $a = 1, b = \{2\}, c = 2, d = \{1\}$
ב) בכיוון $\Rightarrow$ ברור. בכיוון השני, נניח שוות אזי

$$\{a\} = \{c\} \vee \{a\} = \{c, d\}$$

כלומר, $a = c$ או $a = c = d$, כך או כך $a = c$.
עכשיו, $\{a, b\} = \{c, d\}$ ונובע $b = d$. קיבלנו את הדרוש.

הגדרה 4.3. המכפלה הקרטזית של שתי קבוצות A, B הינה אוסף כל הזוגות הסדורים

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

4.4 דוגמה

$$\{1, 2, 3\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

תרגיל 4.5. הוכיחו או הפריכו:

א) יהיו A, B קבוצות, $C_1 \subseteq A, C_2 \subseteq B$ אזי

$$C_1 \times C_2 \subseteq A \times B$$

ב) כל קבוצה $C \subseteq A \times B$ ניתנת לכתיבה על ידי $C = C_1 \times C_2$ עבור $C_1 \subseteq A, C_2 \subseteq B$.

$$\text{ג) } A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$\text{ד) } (A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$$

פתרון.

א) הוכחה. יהי $(c_1, c_2) \in C_1 \times C_2$. מתקיים $c_1 \in A, c_2 \in B$. לכן $(c_1, c_2) \in A \times B$.

ב) הפרכה. $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2\}, C = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$.

ג) הוכחה.

$$(x, y) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \in A \times C \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$$

ד) הפרכה.

$$A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{3\}, D = \{4\}$$

$$(1, 4) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$$

$$(1, 4) \notin (A \times B) \cup (C \times D)$$

4.2 יחסים

הגדרה 4.6. יהיו A, B קבוצות, $R \subseteq A \times B$ יקרא יחס (A, B) אם זוג מסויים (a, b) נמצא בקבוצת היחס R נהוג לסמן aRb .

דוגמה 4.7. $A = \{1, 2, 3\}, B = \{0, 2, 6\}$

$$R = \{(1, 2), (1, 6), (2, 2), (2, 6), (3, 6)\}$$

הגדרה 4.8. נגדיר את היחס מחלק את | באופן הבא:

$$a|b \Leftrightarrow \exists k ak = b$$

הגדרה 4.9. (תכונות של יחסים על קבוצות) יחס R על קבוצה A פירושו $R \subseteq A \times A$. תהי קבוצה A ויחס R עליה אזי

(1) R נקרא רפלקסיבי אם כל איבר מתייחס לעצמו

$$\forall a \in A (a, a) \in R$$

(2) R נקרא סימטרי אם $aRb \rightarrow bRa$

$$\forall a, b \in A [(a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R]$$

(3) R נקרא טרנזיטיבי אם יחס בין ראשון לשני ושני לשלישי גורר יחס בין הראשון לשלישי

$$\forall a, b, c \in A [(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R]$$

(4) R נקרא אנטי-סימטרי (חלש) אם $aRb, bRa \rightarrow a = b$

$$\forall a, b \in A [(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \rightarrow a = b]$$

דוגמה 4.10. יחס "שיוויון" ($=$) הינו רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי ואנטי-סימטרי. יחס "קטן שווה" ($\leq$) הינו רפלקסיבי, טרנזיטיבי ואנטי סימטרי. יחס קטן ממש ($<$) הינו טרנזיטיבי ואנטי סימטרי. יחס "שיוויון מודולו n " הינו רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי. יחס " a מחלק את b " (על הטבעיים) הינו רפלקסיבי, טרנזיטיבי ואנטי-סימטרי. יחס " a מחלק את b " (על השלמים) הינו רפלקסיבי וטרנזיטיבי.

תרגיל 4.11. מצאו יחסים על הקבוצה $\{1, 2, 3\}$ עם התכונות הבאות:

(א) סימטרי ואנטי-סימטרי.

(ב) טרנזיטיבי וסימטרי.

(ג) רפלקסיבי, סימטרי ולא טרנזיטיבי.

תרגיל 4.12. לכל x ממשי, נגדיר את הערך התחתון שלו $\lfloor x \rfloor$ להיות המספר השלם הגדול ביותר z המקיים $z \leq x$.

$$R = \{(x, \lfloor x \rfloor) : x \in \mathbb{R}\}$$

הוכיחו שהוא לא רפלקסיבי, לא סימטרי, כן טרנזיטיבי.

4.3 יחס שקילות

הגדרה 4.13. תהא A קבוצה ויחס עליה, R יקרא יחס שקילות אם הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

תרגיל 4.14. נתבונן ביחס $\sim$ על $\mathbb{Z}$

$$a \sim b \Leftrightarrow 4 \mid a^2 - b^2$$

הוכיחו כי הוא יחס שקילות.

תרגיל 4.15. נאמר כי שתי מטריצות A, B הן דומות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש $P^{-1}AP = B$. הוכיחו כי דמיון מטריצות הוא יחס שקילות. אפשר להראות גם ששקילות שורה הוא יחס שקילות.

תרגיל 4.16. נגדיר את היחס $\sim$ על $\mathbb{R}$ לפי $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$. הוכיחו כי הוא יחס שקילות. (אפשר גם אם ההפרש ב $\mathbb{Q}$)

תרגיל 4.17. הסבירו מדוע הבאים אינם מהווים יחס שקילות על $\mathbb{R}$:

(א) $xQy \Leftrightarrow x - y = 17$

(ב) $xRy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

(ג) $xSy \Leftrightarrow x - y \in 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$

הגדרה 4.18. תהא A קבוצה, חלוקה של A היא אוסף תתי קבוצות לא ריקות $\{A_i\}_{i \in I}$ זרות בזוגות שמכסות את A , כלומר

(א) $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$

(ב) $\bigcup_{i \in I} A_i = A$

(ג) $\forall i \neq j \in I, A_i \cap A_j = \emptyset$

הגדרה 4.19. יהא R יחס שקילות על A אזי
(א) לכל $x \in A$ מוגדרת מחלקת השקילות של x להיות

$$\bar{x} = [x]_R := \{y \in A : (x, y) \in R\}$$

(ב) קבוצת המנה מוגדרת להיות

$$A/R = \{[x]_R : x \in A\}$$

טענה 4.20. (מההצאה)

(א) לכל $x, y \in A$ מתקיים $x = y$ או $[x] \cap [y] = \emptyset$.

(ב) $A = \bigcup_{[x] \in A/R} [x]$.

(ג) יש התאמה בין יחסי שקילות על A לחלוקות של A .

מהותו העיקרית של יחס שקילות הוא לשים לב לשקילות מסוימת בין אברים שונים (כמו שיויון) ולצמצם את החזרות המיותרות על ידי קיבוץ כל האיברים השקולים לקבוצה אחת.

תרגיל 4.21. כמה יחסי שקילות שונים יש על $\{1, 2, 3\}$?

פתרון. אפשר לספור לפי חלוקות, 5.

תרגיל 4.22. ראינו את היחס $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$ על $\mathbb{R}$.

(א) הראו כי $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Leftrightarrow [x]_{\sim} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(ב) הראו כי לכל $x \neq y \in [0, 1)$ מתקיים $[x]_{\sim} \neq [y]_{\sim}$.

(ג) הראו כי לכל $x \in \mathbb{R}$ קיים $y \in [0, 1)$ כך ש $[x]_{\sim} = [y]_{\sim}$.

פתרון.

(א) קודם כל, אם $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, נניח בשלילה קיים $a \in [x]_{\sim}$ שהוא רציונאלי, $a \in \mathbb{Q}$. נקבל כי קיים q כך ש $x - a = q$, כלומר $x = a + q$, סכום רציונאליים הוא רציונאלי בסתירה.

בכיוון השני, אם $[x]_{\sim} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, בגלל ש $x \in [x]_{\sim}$ ברור.

(ב) יהיו $x \neq y$, בלי הגבלת הכלליות $x > y$ ולכן $0 < x - y < 1$ ולכן ההפרש לא שלם.

(ג) נסתכל על המספר כשמחסירים ממנו את השלם התחתון שלו, זה מספר בין 0 ל 1

ששקול לו.

תרגיל 4.23. על $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ נגדיר יחס C לפי

$$(x_1, y_1) C (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$$

הוכיחו שזהו יחס שקילות.
 מהי מבחינה גיאומטרית מחלקת השקילות של קבוצה נתונה? (מעגל קונוי עם רדיוס שהוא סכום הריבועים שלה)
 מהי מבחינה גיאומטרית קבוצת המנה? (אוסף מעגלים מסביב לראשית)

דוגמה 4.24. (הגדרת הרציונאליים) נביט ב- $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, לא ניתן לבנות את הרציונאליים על ידי ההתאמה $(a, b) \leftrightarrow \frac{a}{b}$.
 ההתאמה הזאת תחת המכפלה הקרטזית לא מספיקה, למשל $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ואילו $(2, 6) \neq (1, 3)$. כלומר, המכפלה הקרטזית מכילה חזרות מיותרות לעומת הרציונאליים.
 נרצה להגדיר יחס שקילות על הזוגות הסדורים של מספרים שלמים כך שכל שני שברים שקולים יהיו ביחס, נגדיר R על $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ לפי

$$(x, y) R (z, w) \Leftrightarrow xw = zy$$

(כלומר $\frac{x}{y} = \frac{z}{w}$)
 כלומר, הרציונאליים הם קבוצת המנה של $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ביחס שהגדרנו לעיל. מאחורי כל שבר עומדת הקבוצה האינסופית של כל השברים השקולים לו, ופשוט אנחנו בוחרים לייצג קבוצה זו על ידי אחד השברים שבה באופן שרירותי (או באופן מסוים - בחירת השבר המצומצם).

תרגיל 4.25. (ממבחן)

(א) תהי A קבוצה לא ריקה ותהי $\{R_i\}_{i \in I}$ משפחה של יחסי שקילות על A , הוכיחו כי החיתוך הכללי $R = \bigcap_{i \in I} R_i$ הינו יחס שקילות על A .
 (ב) נסמן $R_n = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n \mid (x - y)\}$.
 מהם $R_1, R_2, R = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} R_n$? מהן קבוצות המנה $\mathbb{Z}/R, \mathbb{Z}/R_1, \mathbb{Z}/R_2$.

פתרון.

(א)

רפלקסיביות - יהי $a \in A$, נרצה להראות $(a, a) \in R = \bigcap_{i \in I} R_i$. בשביל להראות שהזוג בחיתוך, צריך להראות שלכל $i \in I$, $(a, a) \in R_i$. אבל בגלל ש- R_i הוא יחס, אזי $(a, a) \in R_i$ לכל $i \in I$ כנדרש.
 סימטריות - נניח $(a, b) \in R = \bigcap_{i \in I} R_i$ ונרצה להראות $(b, a) \in R$. בשביל להראות $(b, a) \in R_i$ לכל $i \in I$, צריך שלכל i מתקיים $(b, a) \in R_i$. עכשיו, בגלל ש- $(a, b) \in R_i$ לכל $i \in I$, ובגלל סימטריות של R_i גם $(b, a) \in R_i$ לכל i .
 סך הכל, הוא בחיתוך כנדרש.
 טרנזיטיביות - נניח $(a, b), (b, c) \in R$. זה אומר שלכל $i \in I$ מתקיים $(a, b), (b, c) \in R_i$.

בגלל ש- R_i טרנזיטיבי, אזי $(a, c) \in R_i$ לכל i , וכך גם $(a, c) \in R$.
 (ב) $R_n = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n \mid (x - y)\}$ הקבוצה הזאת היא קבוצת כל הזוגות ששקולים אחד לשני ביחס מודולו n .
 אז ב- R_1 , זה כל x, y כך ש- $1 \mid x - y$, אבל 1 מחלק כל דבר לכן $R_1 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
 ב- R_2 , יהיו כל x, y ששקולים אחד לשני מודולו 2, כלומר $2 \mid x - y$, זה אומר: או ששניהם זוגיים או ששניהם אי-זוגיים.
 ב- R_3 , כל x, y ששקולים אחד לשני מודולו 3, כלומר $3 \mid x - y$, זה אומר או $x, y \equiv 0 \pmod{3}$ או $x, y \equiv 1 \pmod{3}$ או $x, y \equiv 2 \pmod{3}$.
 יש לנו את כל הזוגות שכל מספר טבעי מחלק את ההפרש ביניהם, כל עוד שני המספרים שונים, אז הם לא מתחלקים בכל מספר.

כל שני מספרים שונים הם לא ב- R . לעומת זאת, כל שני מספרים שווים, ההפרש ביניהם הוא אפס וכל מספר טבעי הוא מחלק אפס, לכן $x - x = 0$ מתחלק בכל n ולכן ב- R .

$$R = \{(z, z) : z \in \mathbb{Z}\}$$

(ג) ב- R_1 יש מחלקת שקילות אחת, כולם שקולים לכולם.

$$\mathbb{Z}/R_1 = \{[0]_{R_1}\}$$

ב- R_2 יש לנו את כל הזוגיים וכל האי-זוגיים

$$\mathbb{Z}/R_2 = \{[0]_{R_2}, [1]_{R_2}\}$$

ושב ב- R_3

$$\mathbb{Z}/R_3 = \{[0]_{R_3}, [1]_{R_3}, [2]_{R_3}\}$$

עכשיו, כל איבר מתייחס אך ורק לעצמו לכן הוא מחלקת שקילות משל עצמו:

$$\mathbb{Z}/R = \{\dots, [-2]_R, [-1]_R, [0]_R, [1]_R, [2]_R, \dots\}$$

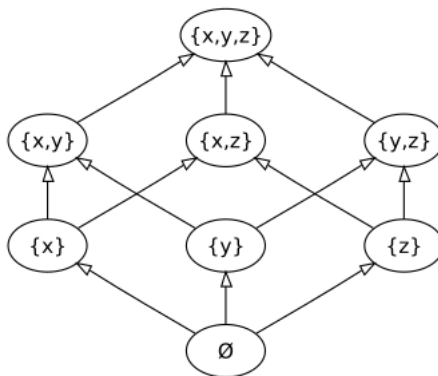
5 תרגול 5

5.1 יחסי סדר

הגדרה 5.1. יחס R על קבוצה A נקרא יחס סדר חלקי אם הוא רפלקסיבי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי.

דוגמה 5.2. $\leq$ על $\mathbb{R}$, $\subseteq$ על קבוצת קבוצות כלשהי, $|\cdot|$ על $\mathbb{N}$.

הגדרה 5.3. דיאגרמת הסה (Hasse) הינה דיאגרמה של יחס סדר חלקי על קבוצה, כל איבר המקושר לאיבר מתחתיו גדול ממנו ביחס.



תרגיל 5.4. יהי R יחס על A , נגדיר את היחס ההופכי $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$. הראו כי אם R יחס סדר חלקי גם ההופכי שלו יחס סדר חלקי.

5.2 איברים מיוחדים ביחס סדר, יחס סדר קווי

הגדרה 5.5. יהי R יחס סדר חלקי על קבוצה A .

- איבר $x \in A$ נקרא מינימלי אם $\forall y \in A (y, x) \in R \rightarrow y = x$ (אין איבר קטן ממנו).
 איבר $x \in A$ נקרא מקסימלי אם $\forall y \in A (x, y) \in R \rightarrow y = x$ (אין איבר גדול ממנו).
 איבר $x \in A$ נקרא איבר קטן ביותר אם $\forall y \in A (x, y) \in R$ (קטן מכל האיברים).
 איבר $x \in A$ נקרא גדול ביותר אם $\forall y \in A (y, x) \in R$ (גדול מכל האיברים).

תרגיל 5.6. הראו כי איבר קטן ביותר ביחס ההפוך הוא גדול ביותר ביחס. הראו כי איבר מקסימלי ביחס ההפוך הוא מינימלי ביחס.

טענה 5.7. הראו את הבאים:

- (א) אם איבר לא מתייחס לאף איבר, הוא מקסימלי. אם יש איבר שאף אחד לא מתייחס אליו הוא מינימלי. אבל לא בהכרח קטן ביותר (או גדול ביותר).
 (ב) קטן ביותר, גדול ביותר הם יחידים.
 (ג) כל קטן ביותר הוא מינימלי, כל גדול ביותר מקסימלי.

תרגיל 5.8. מיינו את האיברים ב $P(\{1, 2, 3\})$.

תרגיל 5.9. תהא $(A, \leq)$ קבוצה סדורה, הוכיחו או הפריכו:

- (א) אם x מינימלי יחיד אז הוא קטן ביותר.
 (ב) אם x מינימלי יחיד, y מקסימלי יחיד אזי $x \leq y$.
 (ג) אם A סופית לא ריקה אז קיים איבר מינימלי.

פתרון.

ניתן להפריך את שני הסעיפים הראשונים על ידי שרטוט של דיאגרמת הסה מתאימה. נוכיח את הטענה האחרונה. באינדוקציה על גודל הקבוצה $|A| = n$.

בסיס עבור $n = 1$ האיבר מינימלי.

צעד נניח עבור $|A| = n - 1$, נוכיח עבור $|A| = n$. ניקח $a \in A$ ונתבונן ב $(A \setminus \{a\}, \leq)$, יש שם מינימלי ונסמנו b .

אם $a \not\leq b$ אזי b מינימלי גם ב A , יהי $y \in A$ נניח $y \leq b$, עכשיו $y \neq a$ לכן $y \in A \setminus \{a\}$ ו b מינימלי שם לכן $y = b$.

אחרת, $a \leq b$ ונראה a מינימלי ב A . יהי $y \leq a$, נב"ש $y \neq a$ אזי $y \in A \setminus \{a\}$, נקבל $y \leq a$, $a \leq b$ זה אומר $y \leq b$ כלומר $y = b$. מקבלים $a = b$ בסתירה ($b \in A \setminus \{a\}$).

הגדרה 5.10. יהי R יחס סדר חלקי על A , אם כל שני איברים $a, b \in A$ מקיימים $(a, b) \in R \vee (b, a) \in R$ נקרא יחס סדר קווי (לינארי).

תרגיל 5.11. תהי X קבוצת כל יחסי השקילות על $\mathbb{N}$, נגדיר יחס S על X לפי:

$$(E, F) \in S \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} ([n]_E \subseteq [n]_F)$$

הוכיחו כי (X, S) היא קס"ח. האם לינארי? מהו האיבר הקטן והגדול ביותר בה?

תרגיל 5.12. הוכיחו שבקבוצה סדורה קווית איבר מינימלי הוא קטן ביותר.

הגדרה 5.13. (חסמים) תהי A קבוצה, $B \subseteq A$ ו R יחס סדר חלקי.

חסם מלעיל של B הוא איבר $x \in A$ כך שמתקיים $\forall y \in B (y, x) \in R$.

חסם מלרע של B הוא איבר $x \in A$ כך שמתקיים $\forall y \in B (x, y) \in R$.

החסם העליון (סופרמום) של B הינו הקטן ביותר בקבוצת חסמי המלעיל (אם קיים) ומסומן $\sup B$.

החסם התחתון (אינפמום) של B הינו הגדול ביותר בקבוצת חסמי המלרע (אם קיים) ומסומן $\inf B$.

דוגמה 5.14. נביט במספרים הממשיים ובתת הקבוצה של כל המספרים עם מספר סופי של ספרות, הספרות הראשונות של שורש 2.

$$\{1, 1.4, 1.41, 1.414, \dots\}$$

חסמי המלעיל של הקבוצה הם כל המספרים שגדולים או שווים ל $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ החסם העליון. שימו לב, כאשר B היא תת-קבוצה של המספרים הרציונאליים, אין חסם עליון.

תרגיל 5.15. עבור $\{A_i\}_{i \in I}$ אוסף תתי קבוצות של A , החסם העליון שלה ב $(P(A), \subseteq)$ הוא $\bigcup_{i \in I} A_i$ והחסם התחתון הוא $\bigcap_{i \in I} A_i$.

תרגיל 5.16. (יחס סדר מילוני) יהיו $(A, \leq)$, $(B, \preceq)$ שתי קבוצות סדורות חלקית. אפשר להגדיר על $A \times B$ את היחס המילוני R לפי

$$(a_1, b_1) R (a_2, b_2) \Leftrightarrow (a_1 < a_2) \vee (a_1 = a_2 \wedge b_1 \preceq b_2)$$

(א) הראו שזה יחס סדר.

(ב) נתבונן ביחס סדר המילוני על $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, נגדיר $B = \{(1, x) : (x, \mathbb{N})\}$ אז הראו

$$\sup B = (2, 1), \inf B = (1, 1)$$

נגדיר $C = \{(x, 1) : x \in \mathbb{N}\}$ אזי $\inf B = (1, 1)$ ו- $\sup C$ לא קיים.

תרגיל 5.17. (מכפלת יחסי סדר) יהיו $(A, \leq)$, $(B, \preceq)$ שתי קבוצות סדורות חלקית. אפשר להגדיר על $A \times B$ את היחס

$$(a_1, b_1) R (a_2, b_2) \Leftrightarrow (a_1 < a_2) \wedge (b_1 \leq b_2)$$

הראו שזה יחס סדר.

6 תרגול 6

6.1 פונקציות

הגדרה 6.1. יהיו A, B קבוצות ו- R יחס ביניהן אזי
התחום של R הינו $\text{dom} R = \{a \in A : \exists b \in B (a, b) \in R\} \subseteq A$
התמונה של R הינה $\text{im} R = \{b \in B : \exists a \in A (a, b) \in R\} \subseteq B$

דוגמה 6.2

(א) אם R יחס רפלקסיבי על A אזי $\text{dom} R = A$
(ב) אם R יחס לינארי על A אזי $\text{dom} R \cup \text{im} R = A$

הגדרה 6.3. יהיו A, B קבוצות ו- R יחס ביניהן אזי
התחום של R הינו $\text{dom} R = \{a \in A : \exists b \in B (a, b) \in R\} \subseteq A$
התמונה של R הינה $\text{im} R = \{b \in B : \exists a \in A (a, b) \in R\} \subseteq B$

הגדרה 6.4. יחס R מ- A ל- B נקרא ח"ע אם

$$[(x, b) \in R] \wedge [(x, d) \in R] \rightarrow b = d$$

היחס נקרא שלם אם

$$\forall a \in A \exists b \in B (a, b) \in R$$

כלומר, $\text{dom}(R) = A$

יחס f מ- A ל- B נקרא פונקציה אם הוא ח"ע ושלם, מסמנים $f : A \rightarrow B$ וכן $f(a) = b \Leftrightarrow (a, b) \in f$.
 $(a, b) \in f$. A נקרא תחום הפונקציה (או תחום ההגדרה), B נקרא הטווח של הפונקציה.

6.2 תכונות של פונקציות (חד-חד ערכיות, על), תמונה ותמונה הפוכה

הגדרה 6.5. תהי $f : A \rightarrow B$ פונקציה אזי
 f חח"ע אם לכל $x_1, x_2 \in A$ כך ש- $f(x_1) = f(x_2)$ מתקיים $x_1 = x_2$.
 f על אם לכל $y \in B$ קיים $x \in A$ כך ש- $f(x) = y$.
תהי $X \subseteq A$ נגדיר את קבוצת התמונה $f[X] = \{f(a) : a \in X\}$.
תהי $Y \subseteq B$ נגדיר את התמונה ההפוכה $f^{-1}[Y] = \{a \in A : f(a) \in Y\}$.
שימו לב, $f(x) \in Y \Leftrightarrow x \in f^{-1}[Y]$ אבל $y \in f[X] \Leftrightarrow \exists a \in X f(a) = y$.
נסמן את קבוצת כל הפונקציות מ- A ל- B כ- A^B .

6.6 דוגמה

(א) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ כאשר $f(a) = a^2$ אינה חח"ע ואינה על.
(ב) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ כאשר $f(a) = a^2$ חח"ע ואינה על.
(ג) לכל A , פונקצית הזהות $\text{id}_A : A \rightarrow A$ המוגדרת לפי $\text{id}_A(a) = a$ היא חח"ע ועל.
(ד) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ כאשר $f(x) = ax + b$ היא חח"ע ועל.
(ה) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת לפי $f(x) = \sin x$ לא חח"ע ולא על.
(ו) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ כאשר $f(x) = [x]$ היא על ואינה חח"ע.
(ז) $f : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_3$ כאשר $0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1$ היא חח"ע ואינה על.
(ח) אפשר להגדיר את פונקצית האינדיקטור $\mathcal{X}_B = \begin{cases} 1 & x \in B \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$ פונקצית האינדיקטור.
למשל, פונקצית דיריכלה $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ לפי $D = \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ היא לא חח"ע ולא על.
מתי $\mathcal{X}_B : A \rightarrow D$ היא חח"ע? מתי על?
(ט) תהא $f : A \rightarrow B$ אזי $g : A \rightarrow \text{im}(f)$ המוגדרת לפי $g(a) = f(a)$ היא על.
(י) תהא $A \subseteq B$ אזי הפונקציה $i : A \rightarrow B$ המוגדרת לפי $i(a) = a$ נקראת פונקצית ההכללה, היא חח"ע.

6.7 תרגיל

(א) יהיו A, B קבוצות סופיות בעלות עוצמה זהה. הוכח שכל פונקציה f מ- A ל- B הינה חח"ע אם ורק אם היא על.
(ב) הפריכו בקבוצות אינסופיות.

פתרון.

(א) אם f חח"ע אזי

$$B \supseteq |\{f(a_1), \dots, f(a_n)\}| = n \Rightarrow \text{im} f = B$$

אם g על אזי נניח בשלילה ש- f אינה חח"ע, לכן

$$B \supseteq |\{f(a_1), \dots, f(a_n)\}| < n, |B| = n \Rightarrow \text{im} f \neq B$$

(ב) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ המוגדרת לפי $f(n) = 2n$ היא חח"ע ולא על.
המוגדרת לפי $f(z) = z^2$ היא לא חח"ע אבל על.

תרגיל 6.8. תהא A קבוצה, הפונקציה $f : A \rightarrow P(P(A))$ המוגדרת לפי

$$f(x) = \{B \subseteq A : x \in B\}$$

היא לא על אבל כן חח"ע.

תרגיל 6.9. מצאו $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ על שאינה חח"ע.

תרגיל 6.10. תהא A קבוצה ופונקציה $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ פונקציה. נגדיר יחס R על A לפי $aRa' \Leftrightarrow f(a) \leq f(a')$. הוכיחו כי יחס סדר על A אם ורק אם f חח"ע.

תרגיל 6.11

- (א) תהא A קבוצה לא ריקה, מצאו פונקציה $F : A^A \rightarrow A$ שהיא על.
 (ב) תהא A קבוצה. מצאו פונקציה $F : A \rightarrow A^A$ שהיא חח"ע.
 למה בסעיף הראשון צריך דרישה שהקבוצה לא ריקה ובשני לא?

תרגיל 6.12. תהיינה $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ פונקציות כך שמתקיים $f(n) = g(3n - 1)$. הוכיחו כי אם f על אזי g לא חח"ע.

תרגיל 6.13. תהי $f : A \rightarrow B$ פונקציה כלשהי והיו X, Y קבוצות, הוכיחו או הפריכו:

- (א) $f[X \cup Y] = f[X] \cup f[Y]$ (הוכחה)
 (ב) $f[X \cap Y] = f[X] \cap f[Y]$ (הפרכה)
 (ג) $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}[X] \cap f^{-1}[Y]$ (הוכחה)

תרגיל 6.14. יהיו A, B קבוצות, תהי $f : A \rightarrow B$ פונקציה כלשהי. נגדיר פונקציה $g : g(X) = f^{-1}[X]$ לפי $P(B) \rightarrow P(A)$. הוכיחו כי חח"ע אם ורק אם g על.

תרגיל 6.15

- (א) תהא $f : X \rightarrow Y$ ותהא $A \subseteq X$, הוכיחו כי $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ וקיים שיוויון אם חח"ע.
 (ב) תהא $f : X \rightarrow Y$ ותהא $A \subseteq Y$, הוכיחו כי $f(f^{-1}(A)) \subseteq A$ וקיים שיוויון אם על.

7 תרגול 7

7.1 הרכבת פונקציות

הגדרה 7.1. יהיו $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ שתי פונקציות אזי ההרכבה של g על f היא פונקציה $g \circ f : A \rightarrow C$ המוגדרת על ידי הכלל $(g \circ f)(a) = g(f(a))$

הערה 7.2. ההרכבה היא קיבוצית אך אינה בהכרח חילופית.

תרגיל 7.3. תהא $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ פונקציה. נגדיר $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ על ידי $F(g) = g \circ f$. הוכיחו כי F חח"ע אם ורק אם g חח"ע.

פתרון.

נניח F חח"ע. עכשיו, נניח $g(n) = g(m)$, בפרט עבור הפונקציות הקבוצות $f \equiv n, f' \equiv m$ מתקיים

$$\forall k F(f') = (g \circ f')(k) = (g \circ f)(k) = F(f)$$

מחח"ע זה אומר $f = f'$ כלומר $n = m$.

נתון g חח"ע, תהיינה $f \neq f' \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ לכן יש $n \in \mathbb{N}$ שעבורו $f(n) \neq f'(n)$, לכן זה מתקיים גם אחרי ההרכבה $F(f) \neq F(f')$ (כי g ממפה שני איברים שונים לתמונות שונות).

תרגיל 7.4.

- (א) נניח $g \circ f$ חח"ע. הוכיחו או הפריכו: g חח"ע, f חח"ע.
 (ב) נניח $g \circ f$ על. הוכיחו או הפריכו: g על, f על.

פתרון. תנאי הכרחי לכך ש $g \circ f$ הוא חח"ע הוא ש f חח"ע (נוכחי), תנאי הכרחי לכך ש $g \circ f$ הוא על הוא ש g על (נוכחי). השאר הפרכה.

7.2 פונקציות הפיכות

7.5 הגדרה. תהא $f : A \rightarrow B$ פונקציה, $g : B \rightarrow A$ תקרא הפונקציה ההופכית ל- f אם

$$f \circ g = \text{id}_B$$

$$g \circ f = \text{id}_A$$

במקרה כזה נסמן את g על ידי f^{-1} ונאמר שהפונקציה f היא הפיכה.

משפט 7.6. פונקציה היא הפיכה אם ורק אם היא חח"ע ועל.

7.7 תרגיל. יהיו $f_1, \dots, f_k : A \rightarrow A$ הפיכות או חח"ע או על, הוכח שההרכבה $f_k \circ f_{k-1} \circ \dots \circ f_1$ הפיכה או חח"ע או על בהתאמה.

7.8 תרגיל. הוכח כי אם $g \circ f \circ g = \text{id}$ אז f הפיכה.

פתרון. השמאלית (g) חח"ע, הימנית (g) על ולכן הפיכה. נכפול ב- g^{-1} משמאל ומימין ונקבל

$$g^{-1} \circ g \circ f \circ g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ \text{id} \circ g^{-1}$$

$$f = g^{-1} \circ g^{-1}$$

הפיכה כהרכבת הפיכות.

7.9 תרגיל. (פונקציות המכבדות יחסי שקילות) תהי $f : A \rightarrow B$ ויהי R יחס שקילות על A . אומרים כי f מוגדרת היטב על A/R אם $\forall a, b \in A (a, b) \in R \Rightarrow f(a) = f(b)$. אם f מכבדת יח"ש אפשר להגדיר פונקציה על קבוצת המנה $A/R \rightarrow B$ לפי $[a]_R \mapsto f(a)$. הראו כי g אכן פונקציה.

דוגמה 7.10. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת לפי

$$f(x) = x + 1 \text{ (א) הפיכה וההופכית היא } f^{-1}(x) = x - 1$$

$$f(x) = x^3 \text{ (ב) הפיכה וההופכית היא } f^{-1}(x) = x^{1/3}$$

ג) $f : P(A) \rightarrow P(A)$ המוגדרת לפי $f(B) = B^c$ וההופכית שלה היא $f^{-1}(B) = B^c$. אפשר גם לקחת $C \subseteq A$ תת-קבוצה ולהגדיר $f(B) = B \triangle C$ הפיכה, ההופכית היא $f^{-1}(B) = B \triangle C$.

ד) תהא A קבוצה, הפונקציה שלוקחת יחסי שקילות לחלוקות מתאימות לפי $f(R) = A/R$ היא הפיכה.

מוטיבציה

$$f(x) = x^2, \text{ אין לה הפיכה כי היא לא חח"ע.}$$

$$f(x) = \sin x \text{ היא לא הפיכה כי היא לא חח"ע.}$$

$$\text{איך בכל זאת אפשר לדבר על } \arcsin, \sqrt{x}, \dots ?$$

7.3 פונקציה מצומצמת

7.11 הגדרה. תהי $f : X \rightarrow Y$ ותהי $A \subseteq X$. הפונקציה f מצומצמת ל- A מוגדרת על ידי $f|_A : A \rightarrow Y$ כך ש- $f|_A(a) = f(a)$.

דוגמה 7.12. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת לפי $f(x) = x^2$ אינה הפיכה, אבל $f|_{\mathbb{R}^+}$ כן הפיכה.

גם $f(x) = \sin x$ לא הפיכה אבל $f|_{[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]}$ כן הפיכה.

7.13 תרגיל. תהי $f : X \rightarrow Y$ פונקציה, הוכח שקיימת קבוצה A כך ש- $f|_A$ חח"ע עם אותה התמונה כמו הפונקציה המקורית ($\text{im}(f|_A) = \text{im}(f)$) (בהנחת אקסיומת הבחירה)

8 תרגול 8

8.1 עוצמות

הגדרה 8.1. יהיו A, B שתי קבוצות אזי:

- (א) A שקולת עוצמה ל- B או עוצמתה של A שווה ל- B אם קיימת פונקציה הפיכה (חח"ע ועל) $f : A \rightarrow B$. במקרה כזה, נסמן $|A| = |B|$.
 (ב) עוצמתה של A קטנה או שווה לזו של B אם קיימת פונקציה חח"ע $f : A \rightarrow B$. במקרה כזה, נסמן $|A| \leq |B|$.

הערה 8.2. בעזרת אקסיומת הבחירה מוכיחים כי אם קיימת $f : A \rightarrow B$ על אזי $|B| \leq |A|$ (באמצעות תרגיל 7.13).

טענה 8.3. (טענות בסיסיות)

- (א) שתי קבוצות סופיות הן שוות עוצמה. אם באחת מספר איברים גדול מהשנייה אז עוצמה גדולה יותר.
 (ב) כל קבוצה שקולת עוצמה לעצמה (פונקצית הזהות).
 (ג) אם $|A| = |B|$ אזי $|B| = |A|$ (הפונקציה ההופכית).
 (ד) אם $|A| = |B|$, $|B| = |C|$ אזי $|A| = |C|$ (הרכבת פונקציות).
 מסקנה - שקילות עוצמה זהו יחס שקילות (בערך, ישנה הבעיה שאין יחס על קבוצת כל הקבוצות כי לא קיימת קבוצת כל הקבוצות. אפשר להגדיר את היחס על קבוצה מסוימת של קבוצות).
 (ה) אם $A \subseteq B$ אזי $|A| \leq |B|$ (פונקצית ההכלה).

תרגיל 8.4. הוכיחו את הבאים:

- (א) $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \cup \{0\}|$
 (ב) $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \setminus \{1, \dots, k\}|$
 (ג) $|P(\mathbb{N})| = |P(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}|$
 (ד) $|P(\mathbb{N}) - \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\}| = |P(\mathbb{N})|$

פתרון.

- (א) נגדיר $f(n) = n - 1$, היא הופכית כי ההופכית שלה היא $f(n) = n + 1$.
 (ב) נגדיר $f(n) = n + k - 1$.
 (ג) נגדיר $f : P(\mathbb{N}) \rightarrow P(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ באופן הבא: $\emptyset \mapsto \{1\}$, $\{n\} \mapsto \{n + 1\}$ וכל B שאינה נקודון ואינה קבוצה ריקה נשלחת לעצמה.
 (ד) כל קבוצה שאינה מהצורה $\{k, 2k\}$ נשלחת לעצמה. קבוצות מצורה זאת:

$$\{2n, 4n\} \mapsto \{n, 2n\}$$

$$\{2n - 1, 2(2n - 1)\} \mapsto \{n\}$$

תרגיל 8.5. תהא A קבוצה, הוכיחו כי $|A^{\mathbb{N}}| = |A^{\mathbb{N}} \times A^{\mathbb{N}}|$.

פתרון. נגדיר $F : A^{\mathbb{N}} \times A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}$ באופן הבא

$$(f, g) \mapsto \{(2n, f(n)), (2n - 1, g(n)) : n \in \mathbb{N}\}$$

כלומר, פונקציה שעל זוגיים מפעילה f ואי-זוגיים g .

טענה 8.6. אם A קבוצה ו- R יחס שקילות על הקבוצה אזי $|A/R| \leq |A|$.

הוכחה. נגדיר $f : A \rightarrow A/R$ לפי $f(a) = [a]_R$, זוהי פונקציה על. □

טענה 8.7. אם $|A| = |A'|$, $|B| = |B'|$ אזי $|A \times B| = |A' \times B'|$.

הוכחה. קיימות פונקציה חח"ע ועל $f_1 : A \rightarrow A', f_2 : B \rightarrow B'$ ועל $f : A \times B \rightarrow A' \times B'$ לפי $(a, b) \mapsto (f_1(a), f_2(b))$.
 □

תרגיל 8.8. הוכיחו כי אם $|A| = |B|$ אזי $|P(A)| = |P(B)|$.
 פתרון. קיימת $f : A \rightarrow B$ הפיכה, נגדיר $g : P(A) \rightarrow P(B)$ לפי $X \mapsto f[X]$ (הפעלת הפונקציה על כל איבר)

תרגיל 8.9. נגדיר $A = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N} f(n) < f(n+1)\}$. הוכיחו $|A| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$.
 פתרון. נגדיר פונקציה $F : A \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ באופן הבא

$$F(f)(n) = \begin{cases} f(n) - f(n-1) & n > 1 \\ f(1) & n = 1 \end{cases}$$

חח"ע נניח $F(f_1) = F(f_2)$ אזי

$$f_1(1) = F(f_1)(1) = F(f_2)(1) = f_2(1)$$

ומהשיויון

$$f_1(2) - f_1(1) = F(f_1)(2) = F(f_2)(2) = f_2(2) - f_2(1)$$

מקבלים $f_1(2) = f_2(2)$. ממשיכים באינדוקציה ומראים כי

$$\forall n \in \mathbb{N} f_1(n) = f_2(n)$$

על תהא $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, נגדיר $f(n) = \sum_{k=1}^n g(k)$ ונקבל

$$F(f)(n) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n g(k) - \sum_{k=1}^{n-1} g(k) = g(n) & n > 1 \\ g(1) & n = 1 \end{cases}$$

כנדרש.

8.2 עוצמת הטבעיים, הרציונאליים והשלמים

8.10 הגדרה

כל קבוצה A ששקולת עוצמה לקבוצת הטבעיים מסומנת $|A| = \aleph_0$.

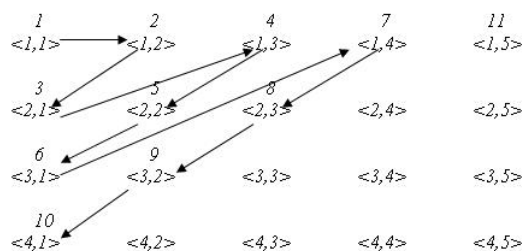
תרגיל 8.11. הוכיחו ש $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$. נוכיח בשלבים:

טענה 8.12. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$

הוכחה. נגדיר $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ לפי $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \equiv 0 \pmod{2} \\ -\frac{n-1}{2} & n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$
 □

טענה 8.13. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$.

הרעיון הוא כזה:



מסקנה 8.14. $|\mathbb{N}^n| = \aleph_0$, באינדוקציה.
 כדי להשלים את הטענה, צריך משפט קנטור שרדר ברנשטיין. נשלים בתרגול הבא.

9 תרגול 9

9.1 משפט קנטור שרדר ברנשטיין

משפט 9.1. אם $|A| \leq |B|$ וגם $|B| \leq |A|$ אזי $|A| = |B|$

טענה 9.2. עכשיו אפשר להשלים את הטענה, $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$.

הוכחה. ראינו כבר $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ וגם $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$, כמסקנה (ידוע כי מכפלה קרטזית של שתי קבוצות מאותה עוצמה של מכפלה קרטזית של שתי קבוצות מאותה עוצמה)

$$|\mathbb{N} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$$

אנחנו יודעים כי $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{Z}|$ (קבוצת מנה),
 מצד שני $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ ועל כן

$$\aleph_0 = |\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{Z}| = \aleph_0$$

□

מקנטור שרדר ברנשטיין, נקבל הדרוש.

תרגיל 9.3. חשבו את עוצמת $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

פתרון. מצד אחד $A \subseteq \mathbb{Q}$, מצד שני $A \supseteq \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Q}$, קל לראות $|B| = \aleph_0$.
 מקנטור שרדר ברנשטיין, נקבל הדרוש.

תרגיל 9.4. נסמן $A = \{1, 2, 3, 4\}$

(א) מהי את עוצמת הפונקציות החח"ע מ $\mathbb{N}$ ל A ?
 (ב) מהי עוצמת הפונקציות שאינן חח"ע מ $\mathbb{N}$ ל A ?

פתרון.

שתייהן מוכלות ב $\mathbb{N}^4$ (יותר מדויק להגיד שאפשר לשכן אותן ב $\mathbb{N}^4$ על ידי כתיבה של כל פונקציה כרביעיה $(f(1), f(2), f(3), f(4))$).

עכשיו, נשים לב שבראשונה כל הפונקציות מהצורה $f(1) = n, f(2) = n + 1, f(3) = n + 2, f(4) = n + 3$ נמצאות בה.

יש $\aleph_0$ פונקציות כאלו.

בקבוצה השנייה, כל הפונקציות הקבועות, גם כן $\aleph_0$.

סך הכל, שתייהן $\aleph_0$.

9.2 עוצמת הממשיים

הגדרה 9.5. כל קבוצה A ששקולת עוצמה לקבוצת הממשיים מסומנת $|A| = \aleph$.

תרגיל 9.6. כל הקטעים מהצורות הבאות שקולי עוצמה

$$[a, b], (a, b), (a, b], [a, b), (-\infty, a), (-\infty, a], (a, \infty), [a, \infty)$$

כלומר, שני קטעים מסוגים שונים וגם כל שני קטעים מאותו סוג עם פרמטרים שונים.

הוכחה. בתוך כל משפחה: $|[a, b]| = |[c, d]|, |[a, b]| = |[c, d]|, \dots$ ודומיהם אפשר לעשות באמצעות פונקציה לינארית.

באופן דומה בתוך כל משפחה קטעים מאותו סוג הם שווי עוצמה. נראה כמה שיויונות בין מספר משפחות נבחרות והשאר תרגיל. כדי להראות $|[a, b]| = |[c, d]|$, מספיק להראות על נציגים $|[0, 1]| = |[0, 1]|$. הרעיון הוא כזה - נרצה לבנות $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, היינו רוצים לשלוח כל איבר לעצמו, ואיכשהו לפתור את עניין 1... אבל אין להן לשלוח אותו בלי להפר את החח"ע. נשלח אותו ל $\frac{1}{2}$ ואת $\frac{1}{2}$ נשלח למקום אחר, נגיד $\frac{1}{3}$. עכשיו, נזיז את $\frac{1}{3}$ לרבע וכן הלאה...

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & x = \frac{1}{n} \\ x & \text{o.w} \end{cases} \text{ בעצם}$$

אפשר גם להראות $|(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})| = \mathbb{R}$ לפי הפונקציה $\tan$ וכן הלאה...

□

9.3 קבוצות בנות מנייה

הגדרה 9.7. קבוצה A נקראת בת מנייה אם $|A| \leq \aleph_0$.

משפט 9.8. בהנחת עיקרון המסוימות של האוסדורף אלף אפס היא העוצמה האינסופית הקטנה ביותר.

תהי A קבוצה אינסופית אזי $\aleph_0 \leq |A|$.

משפט 9.9. קבוצה היא בת-מנייה ואינסופית היא מעוצמה $\aleph_0$.

דוגמה 9.10. כל קבוצה סופית, הטבעיים $\mathbb{N}$, האי-זוגיים $2\mathbb{N} - 1$, השלמים $\mathbb{Z}$, הרציונאליים $\mathbb{Q}$ הן בנות מנייה...

9.4 תרגילים נוספים

תרגיל 9.11. יהיו C, W קבוצות ויהיו $A, B \subseteq C, X, Y \subseteq W$ תתי-קבוצות כך ש $A \cap B = X \cap Y = \emptyset$ וגם $A \cup B = C, X \cup Y = W$.

אזי אם קיימות פונק' חח"ע ועל $f : A \rightarrow X, g : B \rightarrow Y$ מתקיים כי $|C| = |W|$.

תרגיל 9.12.

(א) יהיו A, B קבוצות כך ש $|A \setminus B| = |B \setminus A|$, הוכיחו $|A| = |B|$.
(ב) הפריכו את הכיוון השני.

פתרון.

(א) מתקיים $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B), B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ עכשיו $|B \setminus A| = |A \setminus B|$ מהנתון וגם $|A \cap B| = |A \cap B|$, מסעיף קודם סיימנו. (ב) ניקח את $\mathbb{N} \setminus \{1\}$. הן שוות עוצמה אבל ההפרשים ביניהם הם $\emptyset, \{1\}$ מעוצמה שונה.

תרגיל 9.13. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$. איבר $a \in A$ נקרא חוצץ אם מתקיים

$$|\{b \in A : b < a\}| = |\{b \in A : b > a\}|$$

מצאו את עוצמת קבוצת החוצצים במקרים הבאים:

(א) $A \subseteq \mathbb{N}$ אינסופית.

(ב) A סופית.

(ג) $A = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ עבור שני מספרים ממשיים $a < b$.

פתרון.

(א) $A \subseteq \mathbb{N}$ והיא אינסופית, "כמה" חוצצים יש לה?
 נטען שאין לה אף חוצץ, נקבל קבוצת החוצצים - $\emptyset$ שעוצמתה 0.
 למה אין אף חוצץ? נניח בשלילה קיים $k \in A$ שהוא חוצץ שלה. נשים לב כי

$$\{b \in A : b < k\} \subseteq \{1, 2, 3, \dots, k-1\}$$

ולכן העוצמה סופית.
 מצד שני, $\{b \in A : b > k\}$ חייבת להיות אינסופית. לכן, לא ייתכן ש- k חוצץ כי העוצמה משמאל היא סופית ומימין אינסופית.
 (ב) A סופית: נסמן את האיברים שלה בסדר עולה $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.
 אם יש כמות זוגית של איברים - אין חוצץ. כי החוצץ מפריד את הקבוצה לשלוש קבוצות

$$\{a_1, \dots, a_{k-1}\}, \{a_k\}, \{a_{k+1}, \dots, a_n\}$$

עכשיו אם יש מספר זוגי - זה אומר שבצד ימין וצד שמאל יש כמות שונה של איברים.
 מה קורה אם יש כמות אי-זוגית? יש חוצץ שהוא החציון $a_{\frac{n+1}{2}}$ (ואז העוצמה ומשמאל ומימין תהיה $\frac{n-1}{2}$).
 לסיכום, נסמן C קבוצת החוצצים

$$|C| = \begin{cases} 0 & |A| \text{ even is} \\ 1 & |A| \text{ odd is} \end{cases}$$

(ג) $A = [a, b]$, "כמה" חוצצים יש?
 נשים לב כי הנקודות a, b אינן חוצץ.
 כי עבור a , מצד שמאל יש $\emptyset$ ומצד ימין $(a, b]$. ועבור b , מצד שמאל יש $[a, b)$ ומצד ימין $\emptyset$.

והן כמובן לא מאותה עוצמה...
 למרות זאת, לכל $k \in (a, b)$ הוא חוצץ. למה? כי מצד שמאל נקבל $[a, k)$ ומצד ימין $(k, b]$.
 ועוצמת שני הקטעים האלו היא $\aleph$.
 אז קבוצת כל החוצצים היא: (a, b) והעוצמה שלה היא $\aleph$.

10 תרגול 10

10.1 אריתמטיקה של עוצמות

תרגיל 10.1. תהיינה שתי עוצמות a, b ותהיינה שתי נציגות זרות לעוצמות A, B .
 נגדיר $a + b = |A \cup B|$.
 תהיינה שתי עוצמות a, b ותהיינה שתי נציגות לעוצמות A, B .
 נגדיר $a \cdot b = |A \times B|$.
 נגדיר גם את $a^b = |A^B|$.
 כל ההגדרות אינן תלויות בבחירת הנציגות.

דוגמה 10.2. ראינו כבר $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0, \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.
 אפשר לראות גם ש $a^0 = 1$ (יש פונקציה יחידה מהקבוצה הריקה, היחס הריק), למעשה $0^0 = 1$. בנוסף $1^a = 1$ (יש רק הפונקציה הקבוצה) וכן $0^a = 0$ עבור $a \neq 0$ כי אין פונקציות מקבוצה לא ריקה לקבוצה הריקה, היחס לא שלם.

משפט 10.3. $|P(A)| = 2^{|A|}$

טענה 10.4. (תכונות אריתמטיקה)

$$ab = ba, (ab)c = a(bc) \text{ (א)}$$

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}, (a^b)^c = a^{bc}, a^b \cdot c^b = (a \cdot c)^b \text{ (ב)}$$

(ג) כמו כן מתקיים עבור a, b, c, d עוצמות כך ש $a \leq c, b \leq d$ כי

$$a + b \leq c + d, a \cdot b \leq c \cdot d$$

(ד) בהנחת אקסיומת הבחירה, עבור a, b עוצמות שלפחות אחת מהן אינסופית

$$a + b = \max \{a, b\}$$

אם שתיהן שונות מאפס

$$a \cdot b = \max \{a, b\}$$

הוכחה. נוכיח למשל $a^b a^c = a^{bc}$, יהיו $|A| = a, |B| = b, |C| = c$ קבוצות זרות.

נגדיר פונקציה $A^{B \cup C} \rightarrow A^B \times A^C$ לפי $f \mapsto (f|_B, f|_C)$ והיא חח"ע ועל.

בנוסף, $(a^b)^c = a^{bc}$ כי אפשר להגדיר פונקציה $(A^B)^C \rightarrow A^{B \times C}$ לפי

$$f \mapsto g(b, c) = f(c)(b)$$

□

דוגמה 10.5. $\aleph_0 + \aleph = \aleph$.

נבחר $A = [0, 1], B = \mathbb{N}$ ועכשיו

$$\aleph = |A| \leq |A \cup B| \leq |\mathbb{R}| = \aleph$$

אפשר גם מתכונה ד'.

דוגמה 10.6. מהי עוצמת האי-רציונאליים? ראינו כבר $|\mathbb{Q}| = \aleph_0, |\mathbb{R}| = \aleph$.

$$\aleph = |\mathbb{R}| = |\mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}| + |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = \aleph_0 + |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}|$$

נניח בשלילה $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = a < \aleph$ ונקבל סתירה.

לכן $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| \geq \aleph$ ומוכלת ב $\mathbb{R}$, מק.ש.ב. נקבל הדרוש.

משפט 10.7. (הקשר בין עוצמת הטבעיים לעוצמת הממשיים) $2^{\aleph_0} = \aleph$ כלומר $|P(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$.

דוגמה 10.8. נוכיח

$$\aleph \cdot \aleph = \aleph$$

אכן,

$$\aleph \cdot \aleph = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$$

תרגיל 10.9. יהיו עוצמות a, b, c כך ש $a \leq b$ הוכיחו כי $a^c \leq b^c$.

פתרון. יהיו A, B, C קבוצות כך שמתקיים $|A| \leq |B|$. נראה $|A^C| \leq |B^C|$.

קיימת $f: A \rightarrow B$ חח"ע, נגדיר $g: A^C \rightarrow B^C$ על ידי $g(h) = f \circ h$.

אפשר להראות ש g חח"ע.

דוגמה 10.10. חשבו את $\aleph^{\aleph_0}, \aleph_0^{\aleph}, \aleph_0^{\aleph_0}$

$$\aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

$$2^{\aleph} \leq \aleph_0^{\aleph} \leq \aleph^{\aleph} = (2^{\aleph})^{\aleph} = 2^{\aleph \cdot \aleph} = 2^{\aleph}$$

$$\aleph = 2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq \aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$$

10.2 איחוד בן מנייה של קבוצות בנות מנייה

משפט 10.11. תהי S קבוצה בת מנייה של קבוצות בנות מנייה, כלומר $|S| \leq \aleph_0$, $\forall X \in S, |X| \leq \aleph_0$.

אזי גם האיחוד הכללי הוא בן מנייה $|\bigcup_{X \in S} X| \leq \aleph_0$.

תרגיל 10.12. אנחנו יודעים כי $|P(\mathbb{N})| = \aleph$, מהי העוצמה של הקבוצות הבאות

$$A = \{X \in P(\mathbb{N}) : |X| < \infty\}$$

$$B = \{X \in P(\mathbb{N}) : |X| = \infty\}$$

כלומר תתי-קבוצות הסופיות והאינסופיות.

פתרון. נראה כי $|A| = \aleph_0$, הן איחוד זר של $P(\mathbb{N})$ מעוצמה $\aleph$ ולכן $|B| = \aleph$.

נותר להראות $|A| = \aleph_0$, נגדיר $A_n := \{X \in P(\mathbb{N}) : |X| = n\}$.

נשים לב כי $|A_n| = \aleph_0$ לכל n , כי $A_n \subseteq \mathbb{N}^n$ ולכן $|A_n| \leq \aleph_0$.

מצד שני, היא מכילה את כל הקבוצות מהצורה $\{k+1, \dots, k+n\}$ ויש $\aleph_0$ כאלו.

עכשיו, $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ובת מנייה כאיחוד בן מנייה של קבוצות.

תרגיל 10.13. נגדיר $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ קבוצת כל הסדרות הבינאריות. נגדיר יחס $\sim$ על X לפי $f \sim g$ אם ורק אם הקבוצה $\{n \in \mathbb{N} : f(n) \neq g(n)\}$ סופית.

(א) הוכיחו כי זה יחס שקילות.

(ב) לכל $f \in X$, מהי העוצמה של $[f]$?

(ג) מהי עוצמת קבוצת המנה?

תרגיל 10.14. הגדרנו את $\mathbb{R}$ כהרחבה של $\mathbb{Q}$. ראינו כי $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. באופן דומה אפשר להראות על שורשים מסדרים שונים.

מספר נקרא אלגברי אם הוא שורש של פולינום בעל מקדמים רציונאליים.

למשל, כל מספר רציונאלי q הוא אלגברי, $x - q = 0$.

עכשיו למרות ש $\sqrt{2}$ לא רציונאלי הוא כן אלגברי כי הוא שורש של $x^2 - 2 = 0$.

זה נכון לכל שורש $\sqrt[n]{k}$ עם הפולינום $x^n - k$.

בנוסף, יחס הזהב הוא אלגברי כשורש של הפולינום $x^2 - x - 1 = 0$.

(נעיר כי אוסף כל המספרים האלגבריים הוא שדה)

נשאלת השאלה האם כל המספרים הממשיים הם אלגבריים והמעבר מ $\mathbb{Q}$ ל $\mathbb{R}$ היה הוספה רק שלהם.

מספר יקרא טרנסצדנטי אם הוא אינו מאפס אף פולינום בעל מקדמים רציונאליים (לא אלגברי), או בעברית: נעלה.

במבט ראשון, נראים המספרים הטרנסצדנטיים כחריגים ואין אנו מרבים לפגוש אותם בחיי היומיום, האם בכלל קיימים כאלו?

אנחנו נראה בתרגיל זה שקיימים מספרים כאלו ולמעשה שכמעט כל המספרים הם טרנסצדנטיים!

פתרון. נראה כי המספרים האלגבריים הם בני מנייה.

נסמן $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצת המספרים האלגבריים.

לכל מספר אלגברי יש פולינום שהוא שורש שלו, נתעניין בזה עם הדרגה המינימלית, למשל

עבור $\sqrt{2}$ הדרגה המינימלית היא 2 (ב1 אלו רק הרציונאליים).

נכתוב A_n להיות קבוצת המספרים האלגבריים שהדרגה המינימלית עבור פולינום שהוא

מאפס היא n .

עכשיו $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. נותר להראות כי A_n היא בת-מנייה.

אבל נשים לב שיש כמות בת-מנייה של פולינומים מדרגה n עם מקדמים רציונאליים $\mathbb{Q}^n$,

ולכל אחד מהם יש כמות סופית (לכל היותר n) של שורשים, לכן נקבל הדרוש.

סך הכל $|A| = \aleph_0$.

כמסקנה, יש $\aleph$ מספרים טרנסצדנטיים!

לא רק שקיימים כאלו, כמעט כל המספרים הם כאלו.

הערה 10.15. שימו לב - ההוכחה לא קונסטרוקטיבית, היא מסבירה שקיימים כאלו אך לא מאפיינת אותם. אפשר עם כלים יותר מתקדמים להראות e, π הם נעלים.

הערה 10.16. אבל e, π הם דוגמאות יותר מוכרות לנו - אנחנו יודעים לתאר במילים את המשמעות שלהן (יחס בין היקף המעגל שרדיוסו $\frac{1}{2}$ לקוטרו, הגבול של $(1 + \frac{1}{n})^n$ ויש כמובן אפיונים נוספים שתלמדו עליהם בהמשך).

מסתבר שהממשיים יותר גדולים מכל התיאורים שאנחנו יכולים לתת למספרים (יש רק מספר בן מנייה של משפטים ולכן אנחנו יודעים לתאר רק מספר בן מנייה של מספרים). כלומר, כמעט כל הממשיים אנחנו בכלל לא יכולים לתאר!

הערה 10.17. מספר ייקרא רקורסיבי (חשיב) אם הוא מספר ממשי שניתן לחשב אותו (בעזרת אלגוריתם, תוכנת מחשב), בכל דיוק רצוי, בזמן סופי, להחזיר את ספרות המספר בזו אחר זו...

למשל, כל המספרים האלגבריים הם חשיבים.

קבוצת המספרים החשיבי היא בת מנייה כי יש רק מספר בן מנייה של תוכניות, לכן כמעט כל המספרים הממשיים בכלל לא חשיבים.

בנוסף, לא קיים אלגוריתם שמונה את כל המספרים החשיבים! (אפשר להראות בטכניקת לכסון בדומה לאלכסון של קנטור)

בהצלחה רבה!