אנליזה 1 למורים- פתרון תרגיל 2

שאלה 1

פתרו את האי שוויונות הבאות:

1. $\log_{x+1}(x^2-1)<\log_{x+1}(2x+2)$

נחלק למקרים:

א. $0<x+1<1$

$-1<x<0$

במקרה זה, זה שקול לפתירת האי שוויון הבא:

$x^2-1>2x+2$

$x^2-2x-3>0$

$(x+1)(x-3)>0$

ולכן: $x<-1$ או $x>3$

סך הכל קיבלנו: $-1<x<0$ וגם ($x<-1$ או $x>3$)

ולכן אין פתרון במקרה זה.

ב. $x+1>1$

$x>0$

במקרה זה, זה שקול לפתירת האי שוויון הבא:

$x^2-1<2x+2$

$x^2-2x-3<0$

$(x+1)(x-3)<0$

ולכן: $-1<x<3$

סך הכל קיבלנו: $x>0$ וגם $-1<x<3$

ולכן הפתרון במקרה זה: $0<x<3$

2. $(x+1)^{x^2}<(x+1)^{2x}$

נחלק למקרים:

א. $x+1>1$

$x>0$

במקרה זה, זה שקול לפתירת האי שוויון הבא:

$x^2<2x$

$x^2-2x<0$

$x(x-2)<0$

ולכן $0<x<2$

סך הכל קיבלנו: $x>0$ וגם $0<x<2$

ולכן הפתרון במקרה זה: $0<x<2$

ב. $0<x+1<1$
$-1<x<0$
במקרה זה, זה שקול לפתירת האי שוויון הבא:
$x^2>2x$
$x^2-2x>0$
$x(x-2)>0$
ולכן $0<x<2$
סך הכל קיבלנו: $-1<x<0$ וגם ($x<0$ או $x>2$)
ולכן במקרה זה הפתרון הוא $-1<x<0$

פתרון שאלה 2

הוכיחו שהגבול של הסדרה $a_n=\frac{2n-1}{3n}$ הוא: $\frac{2}{3}$

<u>הוכחה:</u>

יהי $\varepsilon>0$ ונרצה להראות שקיים n_0 כל שלכל $n\ge n_0$ מתקיים: $\left|\frac{2n-1}{3n}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$

נשים לי כי: $\left|\frac{2n-1}{3n}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{2}{3}-\frac{1}{n}-\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{n}$

ולכן: $\left|\frac{2n-1}{3n}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{1}{n}<\varepsilon$

נבחר $n_0>\frac{1}{\varepsilon}$ ואכן יתקיים כי לכל $n\ge n_0$ מתקיים:

$$\left|\frac{2n-1}{3n}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{2}{3}-\frac{1}{n}-\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{n}\le\frac{1}{n_0}<\varepsilon$$