6 תרגיל בית - פתרון

1. תהי X קבוצה מדידה עם מידה סופית ותהי $f\in L^1\left(X,\mu\right)$ (אינטגרבילית ביחס ל μ) אי שלילית. הראו ש $\lim\limits_{\alpha\to 1-}\int\limits_X f^{\alpha}d\mu=\int\limits_X fd\mu$. האם התוצאה נכונה גם עבור $\alpha\to 1+$?

פתרון: נגדיר $A=\left\{x:f\left(x\right)>1\right\}$. אזי, מכיוון ש $0<\alpha<1$ נובע כי $f^{\alpha}\left(x\right)\uparrow f\left(x\right)$ כאשר $\alpha\to 1$.
כמו כן, על A^c נובע כי f^{α} נשלטת ע"י הפונקציה 1_{A^c} אשר אינטגרבילית כיוון שהמידה הינה סופית. מכאן שעפ"י משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג ומשפט ההתכנסות הנשלטת נובע כי

$$\lim_{\alpha\to 1-}\left(\int\limits_{A^c}f^{\alpha}d\mu+\int\limits_A f^{\alpha}d\mu\right)=\lim_{\alpha\to 1-}\int\limits_X f^{\alpha}d\mu=\int\limits_X fd\mu .$$

2. תהי $\phi\left(x\right)$ פונקציה המקיימת $\phi\left(x\right)=\phi\left(x+1\right)$ לכל $x\in\mathbb{R}$ ובנוסף $\int\limits_{[0,1]}\phi\left(x\right)dx<\infty$. נגדיר

$$f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi\left(nx\right)}{n^2}$$

הראו ש f סופית כמעט בכל מקום.

פתרון: קל לראות כי $f\left(x\right)$ מחזורית 1, כלומר $f\left(x+1\right)=f\left(x\right)$. מכאן שמספיק להראות כי f סופית כב"מ על הקטע $[0,1]$. נשים לב כי

$$\int\limits_{[0,1]}f\left(x\right)dm=\int\limits_{[0,1]}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi\left(nx\right)}{n^2}dm=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{[0,1]}\frac{\phi\left(nx\right)}{n^2}dm$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{[0,n]}\frac{\phi\left(x\right)}{n^3}dm=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{[0,1]}\frac{\phi\left(x\right)}{n^2}dm<\infty$$

מכאן נובע כי f סופית כב"מ.

3. יהיו $f,f_n:X\to[0,\infty]$ פונקציות מדידות כך ש $f_n\to f$ כב"מ ו $f\geq f_n$ לכל n . הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n=\int f$.

פתרון:

נחלק לשני מקרים:

(1) $\int f=\infty$: עפ"י למת פאטו נובע כי $\int\underline{\lim}f_n=\int f\leq\underline{\lim}\int f_n\Rightarrow\lim\int f=\infty$

(2) $\int f<\infty$: אזי הסדרה f_n נשלטת ע"י פונקציה אינטגרבילית f ולכן ממשפט ההתכנסות הנשלטת נובע כי $\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n=\int f$.

4. יהי (Ω, S, μ) מרחב מידה. נניח כי $X \subset \Omega$ כך ש $\mu(X)=1$ וכך ש $A, B, C \subseteq X$ כך ש
$\mu(A)+\mu(B)+\mu(C) \geq 2.5$. האם ייתכן כי $A \cap B \cap C = \emptyset$?

פתרון: נניח בשלילה כי $A \cap B \cap C = \emptyset$ ונגדיר את הפונקציות $f = 1_A, g = 1_B, h = 1_C$. מצד אחד
$h + f + g \leq 2$ בגלל ש $A \cap B \cap C = \emptyset$ ולכן $\int f + g + h d\mu \leq 2$. מצד שני
$\int f + g + h d\mu = \mu(A)+\mu(B)+\mu(C) \geq 2.5$ ולכן סתירה.