

הוראות: יש לענות על כל ארבע השאלות, על גבי טופס המבחן במקום המתאים בדפים הבאים. אפשר לכתוב משני צידי הדף.
שאלה 1 (30 נק'): נביט במטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ונביט במרחבי השורות, העמודות והאפס $R(A), C(A), N(A) \subseteq \mathbb{R}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית והנורמה המושרית ממנה.

סעיף א': מצאו בסיסים אורתוגונליים לכל אחד משלושת המרחבים $R(A), C(A), N(A)$.

סעיף ב': מצאו את ההיטל של הוקטור $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ על מרחב השורות $R(A)$.

סעיף ג': מצאו את $\min\{\|v - w\| \mid w \in R(A)\}$.

שאלה 2 (30 נק'): נביט במרחב המכפלה הפנימית $V = \mathbb{R}^2$ עם המכפלה הפנימית הבאה

$$\langle v, w \rangle = v^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} w$$

ונביט באופרטור $T: V \rightarrow V$ המוגדר ע"י

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y \\ a^2x - 3ay \end{pmatrix}$$

כאשר $a \in \mathbb{R}$ פרמטר.

שימו לב: כלל הסעיפים מתייחסים למכפלה הפנימית הנתונה בשאלה ולא המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

סעיף א': מצאו את כל ערכי הפרמטר a עבורם האופרטור T נורמלי.

סעיף ב': מצאו את כל ערכי הפרמטר a עבורם האופרטור T הרמיטי ($T^* = T$).

סעיף ג': מצאו את כל ערכי הפרמטר a עבורם האופרטור T אוניטרי ($T^* = T^{-1}$).

שאלה 3 (24 נק'): תהי מטריצה $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ כך שהריבוי האלגברי של $\lambda = 0$ הוא מספר זוגי.

עוד נניח כי קיים $a \in \mathbb{R}$ עבורו $A^2(A - aI) = -A$.

סעיף א': הוכיחו כי A דומה לצורת ז'ורדן מעל שדה הממשיים.

סעיף ב': הוכיחו או הפריכו: A לכסינה מעל שדה הממשיים.

שאלה 4 (24 נק'):

סעיף א': תהי מטריצה הרמיטית $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (כלומר $H^* = H$). הוכיחו כי שלושת התנאים שקולים:

תנאי 1: לכל $\lambda \in \mathbb{R}$ ע"ע של H מתקיים כי $\lambda \geq 0$.

תנאי 2: לכל $v \in \mathbb{C}^n$ מתקיים כי $\langle v, Hv \rangle \in \mathbb{R}$ וכן $\langle v, Hv \rangle \geq 0$.

(כאשר $\langle v, w \rangle = v^t \bar{w}$ המכפלה הפנימית הסטנדרטית)

תנאי 3: קיימת מטריצה $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ כך ש $H = B^*B$.

סעיף ב': תהיינה זוג מטריצות $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ חיוביות (כלומר הרמיטיות עם ע"ע גדולים או שווים לאפס)

הוכיחו כי $tr(AB) \geq 0$ (רמזים: זכרו כי $tr(ABCD) = tr(BCDA)$ או הביטו ב $\langle v, BABv \rangle$)