פתרון 9

שאלה 1

$U=\{(a_1,a_2,a_3,a_4)^t\in R^4 \mid \sum_{i=1}^{4}a_i=0,\ \ a_i\in R\}$,

אוסף הפתרונות של המערכת (משוואה אחת, 4 נעלמים) $\sum_{i=1}^{4}a_i=0$ הוא: $Sp\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

(בדקו זאת בעצמכם--- יש במערכת משתנה קשור a_1 ושאר המשתנים הם חופשיים. אוסף הפתרונות הוא כפי שרשמנו כאן).

הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ היא בסיס ל- U.

הסבר: קבוצה זו בלתי תלויה לינארית כי הוקטורים בקבוצה יכולים לשמש כחלק מהעמודות של מטריצה משולשית עם אלכסון ללא אפסים. לכן היא בסיס ל- $Sp\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

שאלה 2

הוכיחו כי $W=\{p(x)\in R_2[x]\ \mid\ p(-1)=p'(-1)=0\}$ הוא תת מרחב של $R_2[X]$ ומצאו לו בסיס.

פתרון

לכל $p(x)\in R_2[x]$ מתקיים:

$$p(x)=a+bx+cx^2\Rightarrow p(-1)=a-b+c$$
$$p'(x)=b+2cx\Rightarrow p'(-1)=b-2c$$

אצלנו,

$$p(x)\in U\Leftrightarrow p(-1)=p'(-1)=0$$

לכן,

$$U=\{p(x)\in R_2[x]\ \mid\ p(1)=p'(1)=0\}=\{a+bx+cx^2 \mid a-b+c=0\ ,\ b-2c=0\}$$

נפתור את המערכת:

$$\begin{cases} a-b+c=0 \\ b-2c=0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$c=t \quad , \quad b=2t \quad , \quad a=t$$

מכאן,

$$U=\left\{t+2t\cdot x+tx^2 \;\middle|\; t\in R\right\}=\left\{t\left(1+2x+x^2\right) \;\middle|\; t\in R\right\}=Sp\left\{1+2x+x^2\right\}$$

קיבלנו:

$$U=Sp\left\{1+2x+x^2\right\}$$

לכן, U הוא ת"מ של $R_2[X]$,

והקבוצה $A=\left\{1+2x+x^2\right\}$ פורשת את U.

ברור ש A בת"ל (יש בה רק וקטור אחד והוא שונה מווקטור האפס)

מכאן: $\left\{1+2x+x^2\right\}$ בסיס של U, $\dim U=1$

שאלה 3

הוכיחו שהקבוצה הסדורה $S=\{1,\ x-2,\ (x-2)^2,\ (x-2)^3\}$ מהווה בסיס של $R_3[x]$.

$\dim R_3[x]=4$, $S\subset R_3[x]$ ומספר האיברים ב-S הוא גם כן 4 . לכן כדי להראות ש- S היא בסיס, מספיק להראות שהיא בלתי תלויה לינארית.

נפתח את הסוגריים $S=\{1,\ x-2,\ x^2-4x+4,\ x^3-6x^2+12x-8\}$.

נראה שהצירוף הלינארי היחיד של איברי הקבוצה שנותן $\vec{0}$ הוא הצירוף הטריוויאלי:

נניח ש- $a_1\cdot 1+a_2\left(x-2\right)+a_3\left(x^2-4x+4\right)+a_4\left(x^3-6x^2+12x-8\right)=\vec{0}$

אז $\left(a_1-2a_2+4a_3-8a_4\right)+\left(a_2-4a_3+12a_4\right)x+\left(a_3-6a_4\right)x^2+a_4x^3=\vec{0}$

מכאן ש $\begin{cases} a_1-2a_2+4a_3-8a_4=0 \\ a_2-4a_3+12a_4=0 \\ a_3-6a_4=0 \\ a_4=0 \end{cases}$ ולכן $a_1=a_2=a_3=a_4=0$.

שאלה 4

יהי U מרחב הפולינומים האי זוגיים ממעלה קטנה או שווה ל- 5, בתוספת פולינום האפס
ותהי $S=\{2x+x^5,\ \ x^3-x^5,\ \ x+x^3\}$.
הוכיחו שהקבוצה S מהווה בסיס ל- U.

פתרון

מכיוון ש- U הוא אוסף כל הפולינומים מהצורה $a_1x+a_3x^3+a_5x^5$, $U=Sp\left\{x,x^3,x^5\right\}$

ולכן $\dim U=3$. $S\subset U$ ומספר האיברים ב- S הוא גם כן 3, לכן כדי להראות ש- S היא בסיס, מספיק להראות שהיא בלתי תלויה לינארית.

נראה שהצירוף הלינארי היחיד של איברי הקבוצה שנותן $\vec{0}$ הוא הצירוף הטריוויאלי:
נניח ש

$$a_1\left(2x+x^5\right)+a_2\left(x^3-x^5\right)+a_3\left(x+x^3\right)=\vec{0}$$

אז $\left(2a_1+a_3\right)x+(a_2+a_3)x^3+(a_1-a_2)x^5=\vec{0}$ ולכן $\begin{cases}2a_1+a_3=0\\ a_2+a_3=0\\ a_1-a_2=0\end{cases} \Leftrightarrow \quad a_1=a_2=a_3=0$

שאלה 5

א.מצאו בסיס ל- $V=Sp\left\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4\right\}$ **והשלימו לבסיס של** R^3

$$\begin{array}{c} \vec{v}_1^{\,t}\rightarrow\\ \vec{v}_2^{\,t}\rightarrow\\ \vec{v}_3^{\,t}\rightarrow\\ \vec{v}_4^{\,t}\rightarrow\end{array}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\3&1&4\\-1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{L_2\to L_2-L_1\\ L_3\to L_3-3L_1\\ L_4\to L_4+L_1}]{}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\\0&2&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1&0&1\\0&1&1\end{matrix}}\\ \begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\end{matrix}\end{pmatrix}$$

לכן: $Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}=Sp\left\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4\right\}$. קבוצת שני הוקטורים באגף ימין היא בסיס ל- $Sp\left\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4\right\}$.

הסבר: **הקבוצה היא פורשת** כי פעולות אלמנטריות (פעולות גאוס) על קבוצת וקטורים לא גורמות לשינויי המרחב הנפרש.
היא בת"ל כי הוקטורים בקבוצה יכולים לשמש כחלק מהעמודות של מטריצה משולשת עם אלכסון ללא אפסים.

השלמה לבסיס של R^3 : $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

ב.מצאו בסיס של $W=Sp\left\{\vec{v}_5,\vec{v}_6,\vec{v}_7\right\}$ **והשלימו לבסיס של** R^3

$$\begin{array}{c} \vec{v}_5^{\,t} \rightarrow \\ \vec{v}_6^{\,t} \rightarrow \\ \vec{v}_7^{\,t} \rightarrow \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -3 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן: $Sp\left\{\vec{v}_5, \vec{v}_6, \vec{v}_7\right\} = Sp\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. קבוצת הוקטורים באגף ימין היא בסיס ל- W.

הסבר: **הקבוצה היא פורשת** כי פעולות אלמנטריות (פעולות גאוס) על קבוצת וקטורים לא גורמות לשינויי המרחב הנפרש.
היא בת"ל כי הוקטורים בקבוצה יכולים לשמש כחלק מהעמודות של מטריצה משולשית עם אלכסון ללא אפסים.

השלמה לבסיס של R^3 : $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

ג. מצאו בסיס של $V \cap W$ והשלימו לבסיס של R^3

נחפש תנאי לכך שוקטור $\vec{u}$ יהיה שייך ל- $V \cap W$:

$\vec{u} \in V \cap W$ אם ורק אם $\vec{u} \in V$ וגם $\vec{u} \in W$

$$\vec{u} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \vec{u} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נפתור את המערכת הבאה:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נרשום את המערכת בעזרת מטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

נפתור:

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&-3\\1&1&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&-3\\0&1&2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&-3\\0&0&1&2\end{pmatrix}$$

משתנה חופשי $\beta_2=t$, השאר משתנים קשורים.

נקבל:
$$\beta_1=-2\beta_2=-2t$$
$$\alpha_2=3\beta_2-\beta_1=3t+2t=5t$$
$$\alpha_1=\beta_1=-2t$$

כעת קיימות שתי אפשרויות להמשיך:

דרך א':
$$\vec{u}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=-2t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+5t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-2\\5\\3\end{pmatrix}\in Sp\left\{\begin{pmatrix}-2\\5\\3\end{pmatrix}\right\}$$

דרך ב':
$$\vec{u}=\beta_1\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+\beta_2\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}=-2t\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-2\\5\\3\end{pmatrix}\in Sp\left\{\begin{pmatrix}-2\\5\\3\end{pmatrix}\right\}$$

נקבל:

$V\cap W=Sp\left\{\begin{pmatrix}-2\\5\\3\end{pmatrix}\right\}$. הוקטור באגף ימין הוא בסיס ל- $V\cap W$.

שאלה 6

המטריצה הנתונה A מצאו בסיס למרחב השורות, מצאו בסיס למרחב העמודות ובדקו שאכן דרגת השורות = דרגת העמודות.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&9&-1\\-3&8&3\\-2&3&2\end{pmatrix}$$

כדי למצוא בסיס למרחב השורות, נבצע פעולות גאוס על השורות:

$$\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&9&-1\\-3&8&3\\-2&3&2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\to R_4+2R_1]{\substack{R_2\to R_2-R_1\\R_3\to R_3+3R_1}}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&7&0\\0&14&0\\0&7&0\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\to R_4-R_2]{R_3\to R_3-2R_2}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&7&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

קבוצת הוקטורים $\{(1\quad 2\quad -1),(0\quad 7\quad 0)\}$ היא בסיס למרחב השורות של A (לכן דרגת השורות=2).

הסבר:

הקבוצה היא פורשת כי פעולות אלמנטריות (פעולות גאוס) על קבוצת וקטורים לא גורמות לשינויי המרחב הנפרש.

הקבוצה **היא בת"ל** כי הוקטורים בקבוצה יכולים לשמש כחלק מהשורות של מטריצה משולשית עם אלכסון ללא אפסים.

מרחב העמודות של A: :

כדי למצוא בסיס למרחב העמודות, נבצע פעולות גאוס על העמודות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 9 & -1 \\ -3 & 8 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{C_2 \to C_2 - 2C_1 \\ C_3 \to C_3 + C_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ -3 & 14 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

קבוצת הוקטורים $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ היא בסיס למרחב העמודות (לכן דרגת העמודות =2).

הסבר:

הקבוצה היא פורשת כי פעולות אלמנטריות (פעולות גאוס) על קבוצת וקטורים לא גורמות לשינויי המרחב הנפרש.

הקבוצה **היא בת"ל** כי הוקטורים בקבוצה יכולים לשמש כחלק מהעמודות של מטריצה משולשית עם אלכסון ללא אפסים.

<u>שאלה 7</u>

תהי A מטריצה מסדר 7×3 כך ש- $rank\, A = 3$.

א. האם שורות A תלויות או בלתי תלויות לינארית?

דרגת השורות= דרגת המטריצה=3.

יש ב- A 7 שורות השייכות למרחב ממימד קטן מ- 7 ולכן השורות תלויות לינארית.

ב. האם עמודות A תלויות או בילתי תלויות לינארית?

דרגת העמודות= דרגת המטריצה=3.

3 העמודות פורשות מרחב ממימד 3 ולכן הן בת"ל.

ג. מהו מימד מרחב הפתרונות של מערכת המשוואות ההומוגנית $A\vec{x} = \vec{0}$?

מכיוון ש- $rank\, A = 3$, דרגת השורות היא $r = 3$. במערכת הנתונה מספר המשתנים הוא $n = 3$. מתקיים $p = n - r$ לכן נקבל $p = 3 - 3 = 0$. כלומר מימד מרחב הפתרונות הוא 0.

הערה: למערכת קיים פתרון יחיד, הפתרון הטריוויאלי.

<u>שאלה 8</u>

יהיו $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

א. הוכיחו שאוסף כל הוקטורים ב- R^4 האורתוגונלים לשני הוקטורים האלו,

הוא תת-מרחב של R^4. נסמן תת מרחב זה ע"י W.

וקטור $\vec{x} \in R^4$ אורתוגונלי לוקטורים $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ אם ורק אם שתי המשוואות הבאות מתקיימות:

$$\left(\vec{u_1}, \vec{x}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 + x_4 = 0 \quad , \quad \left(\vec{u_2}, \vec{x}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 + x_4 = 0$$

לכן $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in R^4 \quad / \quad \begin{matrix} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{matrix} \right\}$. מכיוון ש- W הוא אוסף הפתרונות של מערכת הומוגנית של משוואות לינאריות הוא תת מרחב של R^4.

את מערכת המשוואות $\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$ אפשר לפתור אותה בעזרת שיטת החילוץ של גאוס ולקבל (בדקו!)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_4 \\ -x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = -x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

לכן $W = sp\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

ב. מצאו בסיס ל- W.

הקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ היא בסיס ל- W (ויתר על כן, זהו בסיס אורתוגונלי).

שאלה 9

הוכיחו שלכל $\vec{u},\vec{v}\in R^n$ מתקיים:

$\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$ אם ורק אם $\vec{u}+\vec{v}$ ו- $\vec{u}-\vec{v}$ אורתוגונלים.

הוכחה:

$$\left(\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v}\right)=\left\|\vec{u}\right\|^2-(\vec{u}.\vec{v})+(\vec{v},\vec{u})-\left\|\vec{v}\right\|^2=\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2$$

$\vec{u}+\vec{v}$ ו- $\vec{u}-\vec{v}$ אורתוגונלים אם ורק אם $\left(\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v}\right)=0$. מהשוויון למעלה נובע שזה מתקיים אם ורק אם $\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2=0$ כלומר $\left\|\vec{u}\right\|=\left\|\vec{v}\right\|$.

(*) מה המשמעות הגיאומטרית של מה שהוכחתם עבור המקרה הפרטי $\vec{u},\vec{v}\in R^3$?

תשובה: אלכסוני מקבילית הם אורתוגונלים $\Leftrightarrow$ המקבילית היא מעוין.

הסבר: שימו לב ש- $\vec{u},\vec{v}\in R^3$ הם צלעות (עם קודקוד משותף) של מקבילית שאלכסוניה הם $\vec{u}-\vec{v}$, $\vec{u}+\vec{v}$. הוכחנו כאן שהאלכסונים אורתוגונלים אם ורק אם צלעות המקבילית שוות באורכן, כלומר המקבילית היא מעויין.

<u>שאלה 10</u>

תהי $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ מערכת אורתונורמלית במרחב מכפלה פנימית.

חשבו את $\|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\|^2$.

$$\left\|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\right\|^2=\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w},\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\right)=$$

$$=\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2+\left\|\vec{w}\right\|^2+2\left(\vec{u},\vec{v}\right)+2\left(\vec{u},\vec{w}\right)+2\left(\vec{v},\vec{w}\right)=\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2+\left\|\vec{w}\right\|^2=1+1+1=3$$

<u>שאלה 11</u>

מצאו בסיס אורתונורמלי למרחב הפתרונות של מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&3\\1&2&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\2&1&3&0\\1&2&-6&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\0&-1&5&0\\0&-1&5&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\0&-1&5&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&4&0\\0&1&-5&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$x=-4z,\qquad y=5z,$$

$\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}-4\\5\\1\end{pmatrix}$, מרחב הפתרונות הוא $Sp\left\{\begin{pmatrix}-4\\5\\1\end{pmatrix}\right\}$.

בסיס אורתונורמלי הוא $\left\{\frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}-4\\5\\1\end{pmatrix}\right\}$