תרגיל מס 2 - אינפי 4 תשע"ט

ניתן להניח שהאינגרל לפי אורך אינו תלוי בפרמטירזציה כל עוד היא פשוטה או בעלת מספר סופי של נקודות x עבורן $\left|\gamma^{-1}\left(\{x\}\right)\right|>0$. (כלמר בתרגילים חישוביים - מספיק למצוא פרמטריזציה פשוטה (עד או חח"ע פרט למספר סופי של נקודות). אין צורך להוכיח שהאינטגרל אינו תלוי בפרמטריזציה שנבחרה.

1. תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ מסילה בעלת אורך עם תמונה Γ ותהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ רציפה. הוכיחו ש f אינטגרבילית ביחס לאורך γ. (רמז: תנסו לחקות את ההוכחה עבור אינטגרל רימן ולהחליף את Δx ב $\left\|\gamma\left(t_k\right)-\gamma\left(t_{k-1}\right)\right\|$.)

פתרון: בהינתן חלוקה $p=t_0<t_1<\cdots<t_N=b$ נסמן:

$$m_i=\min\left\{f\left(\gamma\left(x_i\right)\right)|x_i\in\left[t_{i-1},t_i\right]\right\}$$
$$M_i=\min\left\{f\left(\gamma\left(x_i\right)\right)|x_i\in\left[t_{i-1},t_i\right]\right\}$$
$$\triangle l_i=L\left(\gamma\Big|_{\left[t_{i-1},t_i\right]}\right)$$
$$\overline{S\left(\gamma,f,p\right)}=\sum_{i=1}^{N}M_i\triangle l_i$$
$$\underline{S\left(\gamma,f,p\right)}=\sum_{i=1}^{N}m_i\triangle l_i.$$

עבור סדרה של נקודות $x=\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ כך ש $x_i\in\left[t_{i-1},t_i\right]$ נסמן

$$S\left(\gamma,f,p,x\right)=\sum_{i=1}^{N}f\left(\gamma\left(x_i\right)\right)\triangle l_i$$

קל לראות, שלכל שתי חלוקות יחד עם בחירות נקודות $\left(p^{(1)},x^{(1)}\right)$ ו $\left(p^{(2)},x^{(2)}\right)$ מתקיים אי-שוויון

$$\underline{S\left(f,\gamma,p^{(1)}\right)}\le S\left(f,\gamma,p^{(2)},x^{(2)}\right)\le\overline{S\left(f,\gamma,p^{(1)}\right)}.$$

נשים לב, שמכאן נובע ש

$$\underline{I}=\sup\left\{\underline{S\left(f,\gamma,p\right)}\right\}\le\inf\left\{\overline{S\left(f,\gamma,p\right)}\right\}=\overline{I}.$$

כזכור, פונקציה היא אינטגרבילית אם ורק אם לכל סדרה של חלוקות

$$p^{(n)}:a=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}\cdots<t_{N_n}^{(n)}=b$$

ובחירה של נקודות $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}\right)$ כך ש

$$x_k^{(n)} \in \left[t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}\right].$$

ו כך שעבורן $\lambda\left(p^{(n)}\right) \to 0$ (פרמטר חלוקה שואף לאפס) קיים הגבול

$$\lim_{n\to\infty} S\left(\gamma, f, p^{(n)}, x^{(n)}\right).$$

שאינו תלוי בבחירת הנקודות ובחלוקות. נשים לב שבהינתן חלקות. נשים לב ש f היא פונקציה רציפה ולכן $f \circ \gamma$ רציפה על $[a,b]$ ולכן רציפה במ"ש על $[a,b]$.
לכל $\epsilon > 0$ קיים δ כך שאם שאם

$$|x-y| < \delta$$

אזי

$$\left|f\left(\gamma\left(x\right)\right) - f\left(\gamma\left(y\right)\right)\right| < \frac{\epsilon}{L\left(\gamma\right)}.$$

לכן עם p היא חלוקה עם פרמטר חלוקה קטן מ δ אזי מתקיים

$$\begin{aligned}\overline{S\left(f,\gamma,p\right)} - \underline{S\left(f,\gamma,p\right)} &= \\ \sum_{i=1}^{N} M_i \triangle l_i - \sum_{i=1}^{N} m_i \triangle l_i &= \\ \sum_{i=1}^{N}\left(M_i - m_i\right)\triangle l_i &< \\ \sum_{i=1}^{N}\frac{\epsilon}{L\left(\gamma\right)}\triangle l_i &= \\ \frac{\epsilon}{L\left(\gamma\right)}\sum_{i=1}^{N}\triangle l_i &= \frac{\epsilon}{L\left(\gamma\right)}L\left(\gamma\right) = \epsilon\end{aligned}$$

מכאן נובע ש $\underline{I} = \overline{I}$. נסמן $I = \overline{I}$. נשים לב שמתקיים

$$\overline{S\left(f,\gamma,p\right)} \geq I \geq \underline{S\left(f,\gamma,p\right)}$$

ויחד עם האי-שוויון

$$\overline{S\left(f,\gamma,p\right)} - \underline{S\left(f,\gamma,p\right)} < \epsilon$$

נקבל

$$I - \epsilon < \underline{S\left(f,\gamma,p\right)} \leq I \leq \overline{S\left(f,\gamma,p\right)} < I + \epsilon.$$

עכשו, ניקח סדרה $\left(p^{(n)}, x^{(n)}\right)$ של חקוקות נקודות ובחירות נקודות כך

$$\lim_{n\to\infty}\lambda\left(p^{(n)}\right) = 0.$$

יהי $\epsilon > 0$. לפי הטיעון הקודם קיים δ כך שאם $\lambda(p) < \delta$ אזי $\overline{S(f,\gamma,p)} - \underline{S(f,\gamma,p)} < \epsilon$. קיים N כך שאם $n > N$, $\lambda\left(p^{(n)}\right) < \delta$ ולכן

$$I - \epsilon < \underline{S\left(f,\gamma,p^{(n)}\right)} \le \overline{S\left(f,\gamma,p^{(n)}\right)} < I + \epsilon$$

אבל

$$I - \epsilon < \underline{S\left(f,\gamma,p^{(n)}\right)} \le S\left(f,\gamma,p^{(n)},x^{(n)}\right) \le \overline{S\left(f,\gamma,p^{(n)}\right)} < I + \epsilon$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty} S\left(f,\gamma,p^{(n)},x^{(n)}\right) = I$$

על פי הגדרה של גבול, ולכן איטנגרל קיים ולא תלוי בחלוקות ובחירות נקודות.

2. תהי $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ מסילה בעלת אורך ו $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ כך ש $\int_\gamma f \mathrm{d}l$ קיים. (קיים אינטגרל של f על לפי אורך γ.)

(א) הוכיחו שכל $[c,d] \subseteq [a,b]$ עם $\tilde{\gamma} = \gamma|_{[c,d]}$ אזי $\int_{\tilde{\gamma}} f \mathrm{d}l$ קיים.

(ב) הוכיחו

$$\lim_{c\to a} \int_{\gamma|_{[c,b]}} f \mathrm{d}l = \lim_{c\to b} \int_{\gamma|_{[a,c]}} f \mathrm{d}l = \int_\gamma f \mathrm{d}l$$

(ג) הוכיחו שאם γ' קיימת פרט למספר סופי של נקודות $c_1,\ldots,c_{n-1}$ בקטע $[a,b]$ גזירה ברציפות בקטעים (c_{i-1},c_i) כאשר $a = c_0$ ו $b = c_n$ אזי האינטגרל אם האינטגרל $\int_{c_{i-1}}^{c_i} \|\gamma'(t)\| dt$ קיים לכל i ו f רציפה, אזי $\int_\gamma f \mathrm{d}l$ קיים ומתקיים

$$\int_\gamma f \mathrm{d}l = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \mathrm{d}t$$

כאשר $\int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \mathrm{d}t$ הוא סכום האינטגרלים $\sum_{i=1}^n \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \mathrm{d}t$.

פתרון:

(א) נניח בשלילה שקיים $[c,d] \subseteq [a,b]$ כך ש f אינה אינטגרבילית על $\gamma|_{[c,d]}$. אזי קיים $\epsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ קיימות חלוקות (בסימונים של הפתרון של התרגיל הקודם) ובחירות של נקודות $\left(P^{(1)},X^{(1)}\right)$ ו $\left(P^{(2)},X^{(2)}\right)$ כך שהפרמטר חלוקה $\lambda\left(P^{(1)}\right), \lambda\left(P^{(2)}\right) < \delta$ ומתקיים

$$\left|S\left(f,\gamma|_{[c,d]},P^{(1)},X^{(1)}\right) - S\left(f,\gamma|_{[c,d]},X^{(2)},P^{(2)}\right)\right| > \epsilon.$$

מצד שני, מכיוון ש f אינטגרבילית על γ, לכל ϵ קיים $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה ובחירה של נקודות (P,X) המקיימת $\lambda(P) < \delta$, מתקיים $\left|S(f,\gamma,P,X) - \int_\gamma f \mathrm{d}l\right| < \frac{\epsilon}{2}$. על פי ההנחה, קיימות שתי חלוקות $[c,d]$, $P^{(1)}$ ו $P^{(2)}$ המקיימות

עבורן ניתן לבחור סדרות של נקודות בתוך $\lambda\left(P^{(1)}\right),\lambda\left(P^{(2)}\right)<\delta$ קטעים של החלוקה $X^{(1)},X^{(2)}$ כך ש

$$\left|S\left(f,\gamma|_{[c,d]},P^{(1)},X^{(1)}\right)-S\left(f,\gamma|_{[c,d]},X^{(2)},P^{(2)}\right)\right|>\epsilon .$$

נשלים את שתיהן לחקוקה של $[a,b]$ על ידי הוספת אותן קטעים ואותן נקודות. ההפרש בין החלוקות הללו לא מתשנה, ונשאר גדול מ ϵ בסתירה לכך שהפרש של שתיהן מערך של האינטגרל קטן מ $\frac{\epsilon}{2}$.

(ב) נשתמש בתרגיל 3 ובאי-שוויון

$$\int_{\gamma}f\mathrm{d}l\leq ML\left(\gamma\right) .$$

נשים לב שאם γ בעלת אורך, אזי

$$\lim_{c\to a}L\left(\gamma|_{[a,c]}\right)=\lim_{c\to b}L\left(\gamma|_{[c,b]}\right)=0 .$$

כמו כן, נשתמש באדיטיביות של אינטגרל

$$\int_{\gamma}f\mathrm{d}l=\int_{\gamma|_{[a,c]}}f\mathrm{d}l+\int_{\gamma|_{[b,c]}}f\mathrm{d}l .$$

אם $c\to a$ אזי

$$\lim_{c\to a}\int_{\gamma|_{[a,c]}}f\mathrm{d}l\to0 .$$

(ג) ברור ש

$$\int_{a}^{b}f\left(\gamma\left(t\right)\right)\left\Vert \gamma'\left(t\right)\right\Vert \mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}\int_{c_{i-1}}^{c_{i}}f\left(\gamma\left(t\right)\right)\left\Vert \gamma'\left(t\right)\right\Vert \mathrm{d}t$$

כאשר $\int_{c_{i-1}}^{c_{i}}f\left(\gamma\left(t\right)\right)\left\Vert \gamma'\left(\mathrm{t}\right)\right\Vert \mathrm{d}t$הוא לא בהכרח אמיתי. במילים אחרות, תנאי הכרחי ומספיק לכל i האינטגרל מוגדר. למעשה, מספיק להראות את הנקודה עבור קטע יחיד (ופונקציה לא מוגדרת בקצוות הקטע) ולהשתמש באינדוקציה. יהי $c\in(a,b)$. לכל $a<x<c$ ולכל $c<y<b$ האינטגרלים $\int_{\gamma|_{[c,y]}}f\mathrm{d}l,\int_{\gamma|_{[x,c]}}f\mathrm{d}l$ האינטגרל קיים ומתקיים

$$\int_{\gamma|_{[c,y]}}f\mathrm{d}l=\int_{c}^{y}f\left(\gamma\left(t\right)\right)\left\Vert \gamma'\left(t\right)\right\Vert \mathrm{d}t$$

$$\int_{\gamma|_{[x,c]}}f\mathrm{d}l=\int_{x}^{c}f\left(\gamma\left(t\right)\right)\left\Vert \gamma'\left(t\right)\right\Vert \mathrm{d}t$$

על פי הסעיף הקודם מתקיים

$$\begin{aligned}\int_{c}^{b}f\left(\gamma\left(t\right)\right)\left\Vert \gamma'\left(t\right)\right\Vert \mathrm{d}t&=\lim_{y\to b}\int_{c}^{y}f\left(\gamma\left(t\right)\right)\left\Vert \gamma'\left(t\right)\right\Vert \mathrm{d}t\\&=\lim_{y\to b}\int_{\gamma|_{[y,b]}}f\mathrm{d}l\\&=\int_{\gamma|_{[c,b]}}f\mathrm{d}l.\end{aligned}$$

וגם

$$\begin{aligned}\int_a^c f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to a}\int_x^c f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t\\ &= \lim_{x\to a}\int_{\gamma|_{[x,c]}} f(\gamma(t))\,\mathrm{d}l\\ &= \int_{\gamma|_{[a,c]}} f\mathrm{d}l.\end{aligned}$$

נחבר את האינטגרלים ונשתמש באדיטיביות של האינטגרל ונקבל

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t &= \int_a^c f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t+\int_c^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{\gamma|_{[a,c]}} f\mathrm{d}l+\int_{\gamma|_{[c,b]}} f\mathrm{d}l\\ &= \int_\gamma f\mathrm{d}l.\end{aligned}$$

על מנת לקבל את הטענה הכללית נשים לב שהטענה שהוכחנו נכונה לכל קטע ופשוט נחבר.

3. תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ עקומה בעלת אורך.

(א) הוכיחו שאם f אינטגרבילית לפי אורך ביחס ל γ, אזי f חסומה.

(ב) הוכיחו שאם f אינטגרבילית אזי $\left|\int_\gamma f\mathrm{d}l\right|\leq ML(\gamma)$ כאשר M הוא חסם מלעיל של $|f|$.

פתרון:

(א) נניח ש f אינה חסומה. בה"כ נניח ש f אינה חסומה מלעיל. אזי לכל חלקוה $P: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ של הקטע $[a,b]$, קיים $1\leq i\leq n$ כך ש $f\circ\gamma$ אינה חסומה על $[t_{i-1},t_i]$ ולכן נוכל לבחור נקודות $(x_1,\ldots,x_n)$ כך ש $x_i\in[t_{i-1},t_i]$ והסכום

$$\sum_{i=1}^n f(\gamma(x_i))\triangle l_i$$

גדול כרצוננו ולכן הפונקציה אינה אינטגרבילית.

(ב) נזכר שאינטגרל $\int_\gamma f\mathrm{d}l$מוגדר על ידי גבול של סכומים מהצורה

$$\sum_{i=1}^n f(\gamma(x_i))\triangle l_i$$

ולכן $\left|\int_\gamma f\mathrm{d}l\right|$ הוא גבול מהצורה

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\gamma(x_i))\triangle l_i\right|.$$

התוצאה פשוט נובעת מאי-שוויון המשולש:

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n} f\left(\gamma\left(x_i\right)\right) \triangle l_i\right| &\leq \sum_{i=1}^{n}\left|f\left(\gamma\left(x_i\right)\right) \triangle l_i\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\left|f\left(\gamma\left(x_i\right)\right)\right| \triangle l_i \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} M \triangle l_i \\
&= M \sum_{i=1}^{n} \triangle l_i \\
& M L(\gamma) .
\end{aligned}
$$

4. חשבו את האינטגרלים הבאים:

(א) $\int_\Gamma (x+y)\,\mathrm{d}l$ כאשר $\gamma=\{(x,y):|x|+|y|=1\}$

(ב) $\int_\gamma (2x+y+z)\,\mathrm{d}l$ כאשר $\gamma(t)=(t+1,t+2,3)$ עבור $0\leq t\leq 2$.

(ג) $\int_\Gamma \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}l$ כאשר $\Gamma=\left\{(x,y)\,|x^2+y^2=4x\right\}$.

(ד) $\int_\Gamma xyz\mathrm{d}l$ כאשר $\Gamma=\left\{(x,y,z)\,|x=t,y=\frac{1}{3}\sqrt{8t^3},z=\frac{1}{2}t^2|0\leq t\leq 1\right\}$.

(ה) $\int_\Gamma |y|\,\mathrm{d}l$ כאשר $\Gamma=\left\{(x,y):y^2=4x,x\in[0,1]\right\}$.

פתרון:

(א) נשים שהפונקציה היא אי-זוגית והתחום הוא סימטרי ביחס לצירים. לכן האינטגל מתאפס.

(ב) $\gamma(t)$ הינה גזירה ברציפות ולכן נשתמש בנוסחא

$$
\int_\gamma f\mathrm{d}l=\int_a^b f(\gamma(t))\left\|\gamma'(t)\right\|\mathrm{d}t
$$

ונקבל

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma (2x+y+z)\,\mathrm{d}l &= \int_0^2 (2(t+1)+(t+2)+3)\sqrt{2}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^2 (3t+7)\sqrt{2}\mathrm{d}t \\
&= \left.\left(3\frac{t^2}{2}+7t\right)\sqrt{2}\right|_0^2 \\
&= \sqrt{2}(6+14)=20\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

(ג) על מנת לקבל פרמטריזציה ל Γ נעבור תחילה לקואורדינטות פולריות ונקבל

$$.r^2 = 4r\cos\theta$$

נעביר אגפים ונקבל $r = 4\cos\theta$. נשים לב Γ היא למעשה מעגל בעל רדיוס 2 שמרכזו ב $(2,0)$ ולכן הגבולות של θ הינם $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. הפרמטריזציה שנקבל על ידי החלפת r ב $4\cos\theta$ בקואורדינטות פולריות היא

$$.\gamma(\theta) = \left(4\cos^2\theta, 4\cos\theta\sin\theta\right)$$

שוב, כמו בסעיף הקודם נשתמש בנוסחא ונקבל '

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}l &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos t\,\left\|(2\cos 2t+2, 2\sin 2t)'\right\|\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos t\,\|(-4\sin 2t, 4\cos 2t)\|\,\mathrm{d}t \\
&= 16\int_{-\pi/2}^{/\pi/2} \cos t\mathrm{d}t = 32.
\end{aligned}$$

(ד) שוב נשתמש בנוסחא. הפרמטריזציה כבר נתונה ונותר רק להציב. נקבל:

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= \left(t, \frac{1}{3}\sqrt{8t^3}, \frac{1}{2}t^2\right) \\
\|\gamma'(t)\| &= \sqrt{1+2t+t^2} = (1+t) \\
\int_\Gamma xyz\mathrm{d}l &= \int_0^1 \frac{\sqrt{8t^9}}{6}(1+t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1 \sqrt{t^9}+\sqrt{t^{11}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{2}{11}+\frac{2}{13}\right)
\end{aligned}$$

(ה) נבחר פרמטריזציה $\gamma(t) = \left(\frac{t^2}{4}, t\right)$, $-2 \le t \le 2$. נקבל

$$\begin{aligned}
\|\gamma'(t)\| &= \left\|\left(\frac{t}{2}, 1\right)\right\| \\
&= \sqrt{\frac{t^2}{4}+1}.
\end{aligned}$$

נציב בנוסחא ונקבל

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma}|y|\,\mathrm{d}l&=\int_{-2}^{2}|t|\sqrt{\frac{t^2}{4}+1}\mathrm{d}t\\&=2\int_{0}^{2}t\sqrt{\frac{t^2}{4}+1}\mathrm{d}t\\&=\int_{0}^{2}\left(\frac{8}{3}\left(\frac{t^2}{4}+1\right)^{\frac{3}{2}}\right)'\mathrm{d}t\\&=\frac{8}{3}\left(\frac{t^2}{4}+1\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{2}\\&=\frac{8}{3}\left(\sqrt{8}-1\right)\end{aligned}$$

5. נתון קפיץ $\gamma(t)=(\cos t,\sin t,3t)$ כך שצפיפות המסה בנקודה (x,y,z) נתונה על ידי $x^2+y^2+z^2$. חשבו את מסת הקפיץ אם נתון שקצה אחד שלו נמצא ב $(1,0,0)$ ואורכו $\sqrt{360}\pi$.

פתרון: תחילה נמצא את התחום של γ. ברור שתחילת הקטע הוא 0. נשתמש על מנת לקבל את הסוף של הקטע, נשתמש בנוסחא לחישוב אורך קטע.

$$\begin{aligned}.\sqrt{360}\pi&=\int_{0}^{x}\left\|(\cos t,\sin t,3t)'\right\|\mathrm{d}t\\&=\int_{0}^{x}\sqrt{(-\sin^2 t)+\cos^2 t+9}\mathrm{d}t\\&=\int_{0}^{x}\sqrt{10}\mathrm{d}t=\sqrt{10}x.\end{aligned}$$

קיבלנו

$$\begin{gathered}\sqrt{10}x=\sqrt{360}\pi\\\Downarrow\\x=6\pi\end{gathered}$$

על ידי הצבה של $x=\cos t,y=\sin t,z=3t$ נקבל

$$x^2+y^2+z^2=1+9t^2$$

נציב הכל במקום

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma}x^2+y^2+z^2\mathrm{d}l&=\int_{0}^{6\pi}\left(1+9t^2\right)\sqrt{10}\mathrm{d}t\\&=\sqrt{10}\left(t+3t^3\Big|_{0}^{\sqrt{90}\pi}\right)\\&=\sqrt{10}\left(6\pi\left(1+36\pi^2\right)\right)\end{aligned}$$