שאלה 4 השיבו לשאלות הבאות **כן\נכון** או **לא\לא נכון** בלבד. אין צורך להוכחתם.

	כן	לא
1. אם $A\in M_{n\times n}(F)$ ו למערכת $Ax=0$ יש רק פתרון האפס אזי $m=n$. דוגמה: $A=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$		V
2. $rank(AB)=rank(A)$ אם ורק אם B הפיכה, $A,B\in M_{n\times n}(F)$. דוגמה: $A=B=0$		V
3. תהי $A\in M_{m\times n}(F)$. אם ל $Ax=0$, קיים רק פתרון האפס אזי $rank(A)=m$. דוגמה: $A=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$		V
4. אם $A\in M_{n\times n}(F)$ ו $\{v_1,...,v_n\}$ בסיס ל F^n, אזי $\{Av_1,...,Av_n\}$ גם בסיס ל F^n. דוגמה: $A=0$		V
5. קבוצה $U=\{A\in M_{n\times n}(F)\mid \text{rank(A)}<\text{n}\}\subseteq M_{n\times n}(F)$ הינו תת-מרחב. $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ ו $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A+B\notin U$ (אין סגירות ביחס לחיבור)		V
6. תהיו $\{v_1,...,v_k\}$ ו $\{v_{k+1},...,v_m\}$ שתי קבוצות בת"ל של וקטורים ב F^n. קבוצה $\{v_1,...,v_k,v_{k+1},...,v_m\}$ בת"ל. דוגמה: $n=2$, $m=k=1$, $v_1=v_2=(1,0)$.		V
7. תהי $A\in M_{n\times n}(F)$ עם $rank(A)=n$. A הינה כפל של מטריצות אלמנטריות $rank\ A=n \Leftarrow A$ הפיכה.	V	
8. מרחב פולינומים $p\in\mathbb{R}[x]$ עם $\deg(p)\le 4$ איזומורפי ל $\mathbb{R}^4$. $\dim R_4[x]=5 \Leftarrow R_4[x]\cong\mathbb{R}^5$.		V
9. יהיו $U,W\subseteq V$ שני תתי-מרחב ב מרחב V. $V=U\oplus W$ סכום ישר אם לכל $v\in V$ קיימת הצגה יחידה $v=u+w$ עם $u\in U,w\in W$.	V	
10. מתקיים $rank(A)\le rank(A^2)$ לכל $A\in M_{n\times n}(F)$. דוגמה: $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$		V
11. קיימת $0\ne A\in M_{n\times n}(F)$ כך ש $A^2=0$. דוגמה: $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$	V	
12. אם $Cspan(A)=Cspan(B)\subseteq F^n$ אזי $Rspan(A)=Rspan(B)\subseteq F^n$ לכל $A,B\in M_{n\times n}(F)$. דוגמה: $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ (*)		V
13. יהיו $\{x,y,z\}\subseteq V$ וקטורים בת"ל. וקטורים $\{x+y,y+z,z+x\}$ גם בהכרח בת"ל. $a(x+y)+b(y+z)+c(z+x)=0 \Rightarrow (a+c)x+(b+a)y+(c+b)z=0 \Rightarrow a+c=0,\ b+a=0,\ c+b=0 \Rightarrow a=b=c=0$ $F\ne\mathbb{Z}_2$ אם (**)	V	
14. יהיו $A,B\in M_{n\times n}(F)$ עם $rank(A)=rank(B)$. אזי $rank(AC)=rank(BC)$ לכל $C\in M_{n\times n}(F)$. דוגמה: $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$		V
15. תהי $A\in M_{m\times n}(F)$. קבוצה $U=\{Av\mid v\in F^n\}$ הינו תת-מרחב ב F^m.	V	

סגירות ביחס לפעולות:

$w_1=Av_1,\ w_2=Av_2 \Rightarrow w_1+w_2=A(v_1+v_2)$

$w=Av \Rightarrow a\cdot w=A(av)$

בהצלחה

(*) נוסח ב 12 עם מימדים כן נכון: $\dim Cspan A=\dim Cspan B \Leftrightarrow \dim Rspan A=\dim Rspan B$ כלומר מתקיים $Rank B=Rank A$.

(**) מעל F עם $char F=2$ זה לא נכון.

טופס פתרונות שאלון סגור

נא כתבו פתרון סופי מפורט בטופס זה. ההתייחסות למחברת היא כטיוטה בלבד. המחברת לא תיבדק.

נא כתבו רק על צד אחד של הטופס.

פתרון לשאלה 1: נדרג מטריצה.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & a \\ 2 & 4 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3'=R_3-2R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$

א. ל- $a\neq 0,2$ מטריצה. היא מדורגת עם 3 שורות $\neq 0$

$\Leftarrow$ ל- $a\neq 0,2$ מקבלים $\mathrm{rank}A=3$

ל- $a=0$ מטריצה. שקולה למטריצה מדורגת
ומקבלים $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathrm{rank}A=2$

ל- $a=2$ מקבלים $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו $\mathrm{rank}A=2$

אין ערכים של a כך ש- $\mathrm{rank}A=0$ או 1.

ב. קיים פתרון יחיד אם ורק אם $\mathrm{rank}A=3 \Leftarrow a\neq 2$ או 0

ג. מ $\mathbb{Z}_2$ מטריצה. היא

$$A=\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & a & a \\ \bar{0} & 0 & a \end{pmatrix}$$

ל- $a=\bar{0}$ מקבלים $A=\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$ $\mathrm{rank}A=1$!

$\Leftarrow \dim \mathrm{Null}A=2 \Leftarrow$ יש $2^2=4$ פתרונות

ל- $a=\bar{1}$ מקבלים $A=\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$! $\mathrm{rank}A=3$

$\Leftarrow$ קיים פתרון יחיד (פתרון ה-0).