תרגול 11 – טופולוגיה 2014

**מכפלה אינסופית**

תהי  קבוצת אינדקסים ויהי  אוסף של קבוצות. נגדיר את המכפלה הקרטזית באופן הבא: 

הסבר במקרה הסופי: תהיינה שתי קבוצות. יהיאיבר במכפלה, אזי ניתן לכתוב: . במקרה האינסופי: .

בנוסף, ניתן להגדיר את פונקציות ההטלה  על-ידי.

**טופולוגיית המכפלה**

יהיו  מרחבים טופולוגיים. נגדיר על  את **טופולוגיית המכפלה** אשר בסיסה הוא: .

ראיתם בכיתה שיחד עם הטופולוגיה הנ"ל, ההטלות הן רציפות. נראה כעת שזו הטופולוגיה המינימלית עבורה זה מתקיים.

כמו כן, נזכיר שראיתם בכיתה שיחד עם הטופולוגיה הנ"ל ההטלות הן פתוחות.

**טענה**

יהיו  מרחבים טופולוגיים. תהי  טופולוגיה על  (לאו דווקא טופולוגיית המכפלה). נניח שההטלות  רציפות. אזי .

הוכחה

על פי תרגיל שהוכחתם בשיעורי הבית, מספיק להראות שכל קבוצה בסיסית של  שייכת ל-. נסמן ב- את הבסיס ל-. תהי . אם  אזי  שכן  היא טופולוגיה. אחרת, יש מספר סופי של אינדקסים בהם ; משמע, קיים  כך שלכל  מתקיים . בנוסף, יש לזכור כי לכל  מתקיים .

נראה כעת ש-. נתון שפונקציית ההטלה  רציפה ולכן לכל  מתקיים . אם נסמן  אז מתקיים . נחשב כעת את :  (והמכפלה הזאת שייכת לטופולוגיה כחיתוך סופי של קבוצות פתוחות).

מש"ל

**טענה**

יהיו  מרחבים טופולוגיים מטריזביליים, אזי  מטריזבילי (עם טופולוגיית המכפלה).

הוכחה

מכיוון שהמרחבים מטריזביליים קיימות  המשרות את בהתאמה (והן לאו דווקא יחידות, אבל לכל טופולוגיה כזאת קיימת לפחות מטריקה אחת המשרה אותה). נגדיר מטריקה על קבוצת המכפלה:  ונראה שטופולוגיית המכפלה  מתלכדת עם  (הטופולוגיה המושרית על-ידי ).

טענת עזר 1:  רציפה לכל .

הוכחת טענת עזר 1: נוכיח רציפות ב-. יהי  וניקח  אזי אם  מתקיים .

מסקנה 1: .

הסבר: זו הטופולוגיה החלשה ביותר בה ההטלות רציפות, ולכן נקבל הדרוש מטענת עזר 1.

טענת עזר 2: 

הוכחת טענת עזר 2: 

מסקנה 2: .

הסבר:  זה בסיס ל-. כמו כן,  הוא בסיס לטופולוגיית המכפלה (מדוע? הוכחנו בתרגול קודם). לפי טענת עזר 2 נקבל  ולכן  (לפי תרגיל שהוכחתם בשיעורי הבית).

מסקנה סופית: אבל  מושרית מ- ולכן  מטריזבילי.

מש"ל

מסקנה מהטענה האחרונה

נבחר בטענה ,  לכל . נקבל מיידית שטופולוגיית המכפלה על  מתלכדת עם הטופולוגיה הרגילה (המטרית).

**טופולוגיית מנה**

הגדרה- **טופולוגיית מנה**

יהי  מ"ט ותהי  קבוצה כלשהי. תהי  פונקציה **על**. אזי הטופולוגיה החזקה ביותר על  כך ש- רציפה היא טופולוגיית המנה על , נסמנה . ניתן להגדיר אותה באופן הבא:  אמ"מ  פתוחה ב-.

[חזקה ביותר:=  רציפה **וגם** לכל טופולוגיה  על , אם  רציפה אזי .]

הגדרה – **העתקת מנה**

יהיו  מ"ט. תהי . נאמר ש- היא "העתקת מנה" אם:

1. **על**;
2.  פתוחה אמ"מ  פתוחה ב-.

דוגמה

יהי  מ"ט דיסקרטי ותהי  קבוצה כלשהי. תהי  פונקציה **על**. אזי טופולוגיית המנה על  היא הטופולוגיה הדיסקרטית (להסביר בכמה מילים מדוע).

למשל: נתבונן במרחב הטופולוגי (הדיסקרטי)  ובפונקציה **על** המוגדרת על-ידי . אזי טופולוגיית המנה על  היא הטופולוגיה הדיסקרטית.

דיון

יהיו  מ"ט. יהי  יחס שקילות על . נסמן ב- את אוסף מחלקות השקילות.נתבונן בפונקציה הטבעית  המוגדרת על-ידי . שימו לב ש- היא **על**. נניח מעתה ואילך ש- מצוייד בטופולוגיית המנה.

המטרה שלנו היא להראות ש- (עבור מ"ט  כלשהו).

תהי  פונקציה. נאמר ש-מכבדת את יחס השקילות אם מתקיים: .

נתבונן כעת בדיאגרמה הבאה:



אם  מכבדת את יחס השקילות אזי היא מגדירה פונקציה  המוגדרת על-ידי , או בצורה מפורשת: . נרצה להראות ש- הומיאומורפיזם.

תכונות

*  מוגדרת היטב אמ"מ  מכבדת את יחס השקילות;
*  אמ"מ  חח"ע;
* **על** אמ"מ **על**;
[הסבר: מתקיים . אם **על** אזי **על** (אם הרכבת שתי פונקציות היא על, אזי הפונקציה השמאלית היא על). לחלופין, אם **על** אזי **על**(כהרכבה של שתי פונקציות על).]

**טענה** (הוכחתם בכיתה)

יהיו ****מ"ט ו-יח"ש על ותהי  פונקציה המכבדת את יחס השקילות, אזי:

1.  רציפה אמ"מ  רציפה;
2.  מנה אמ"מ  מנה.

**טענה** (תוכיחו בבית)

תהי  העתקת מנה. אזי  חח"ע אמ"מ  הומיאומורפיזם.

דוגמה

נתבונן ב-(הדיסקרטי) עם יחס השקילות הבא:  אמ"מ . זהו יחס שקילות המשרה חלוקה על  (חלוקה היא אוסף מחלקות השקילות שאיחודן נותן הכל). האיברים של קבוצת המנה הם 3 מחלקות השקילות. נסמן . העתקת המנה הטבעית היא  המוגדרת על-ידי .

נתבונן בפונקציה  המוגדרת על-ידי , כאשר  נלקח עם הטופולוגיה הדיסקרטית.

נשים לב ש-מכבדת את יחס השקילות ~ ולכן היא מגדירה פונקציה  המוגדרת על-ידי .



מתקיים: . לכן  חח"ע. בנוסף,  על ולכן  על. לכן  הפיכה.

ראינו ש- היא העתקת מנה (קל לראות שפונקציה בין מרחבים דיסקרטיים היא מנה)ולכן  מנה. לבסוף, לפי הטענה האחרונה,  הומיאומורפיזם.

**קריטריון מספיק ולא הכרחי לכך שהעתקה היא העתקת מנה**

אם רציפה, **על** ופתוחה (או סגורה) אזי  העתקת מנה.

למשל: העתקות ההטלה מטופולוגיית המכפלה לכל רכיב הן העתקות מנה היות והן רציפות, **על** ופתוחות. דוגמה נוספת: פונקציה רציפה ו**על** מקומפקטי להאוסדורף.

**סיכום ביניים**

שלבי הפעולה בפועל כאשר מבקשים להוכיח ש-:

1. מציאת פונקציה **על**, המקיימת בנוסף(לכן  תהיה חח"ע ו**על** ולכן הפיכה);
2. א) אם קל להראות זאת, מוכיחים ש- מנה ולכןמנה (ואז מנה+חח"ע זה הומיאומורפיזם); אחרת,

ב) מראים רק ש- רציפה ומסיקים ש-רציפה. כאן יש שתי אפשרויות:

- במקרה המיוחד שבו  רציפה והפיכה מקומפקטי להאוסדורף, היא
תהיה אוטומטית הומיאומורפיזם; אחרת,

-נמצא את הפונקציה ההופכית של  ונוכיח שגם היא רציפה.

**תרגיל**

נגדיר יחס שקילות על : . הוכיחו כי  הומיאומורפי ל-.

פתרון

עלינו לבנות פונקציה המקיימת . המועמד הטבעי: ההטלה על הרכיב השני. שימו לב שמתקיים:  (\*). כעת נרצה להראות ש- הומיאומורפיזם.

*  חח"ע: נובע מ-(\*);
*  העתקת מנה: רציפה, פתוחה ו**על** כהטלה ממרחב מכפלה;
* מכיוון ש- מנה אמ"מ  מנה, נסיק ש- מנה;
*  חח"ע ומנה  הומיאומורפיזם.

דרך נוספת להראות ש- הומיאומורפיזם: מכיון ש- רציפה, גם  רציפה. לכן מספיק להראות שקיימת לה העתקה הופכית רציפה.

תהי  מוגדרת ע"י .  היא הרכבה של שתי פונקציות רציפות ולכן רציפה (רכיב-רכיב לתוך מרחב מכפלה,  מנה). כמו כן מתקיים: ,  כי  ולכן:  ולכן  הומיאומורפיזם.

מש"ל