

מערכת משוואות ליניאריות

חלק 2

פירוק QR

"אב" של הפירוק QR הוא גראם (1883). מאוחר יותר שמידט (1907)

הוכיח את QR decomposition theorem.



Jørgen Pedersen Gram
(1850 – 1916)



Erhard Schmidt
(1876-1959)

אם A - מטריצה $m \times n$, עם עמודות בת"ל אזי היא ניתנת לפירוק

$$A = QR$$

אשר בו

Q – מטריצה $m \times m$ אשר עמודותיה הן בסיס אורתונורמאלי עבור
מרחב עמודות של A

R – מטריצה משולשת עליונה לא סינגולארית

- מוטיבציה :

- אלטרנטיבה לשיטת גאוס לפתרון $Ax = b$

- מציאת ערכים עצמיים של מטריצה

- מציאת בסיס של תת-מרחבים אורתוגונליים

- וכו'

- דוגמאות לאפשרות לבניית מטריצה אורתוגונלית:

- תהליך Gram-Schmidt

- Householder Reflection

- Givens Rotation

Alston Scott Householder



Born: 5 May 1904 in Rockford, Illinois, USA.

Died: 4 July 1993 in Malibu, California, USA.

5

משפט (Householder reflection): אם x, y - וקטורים בעלי אותה

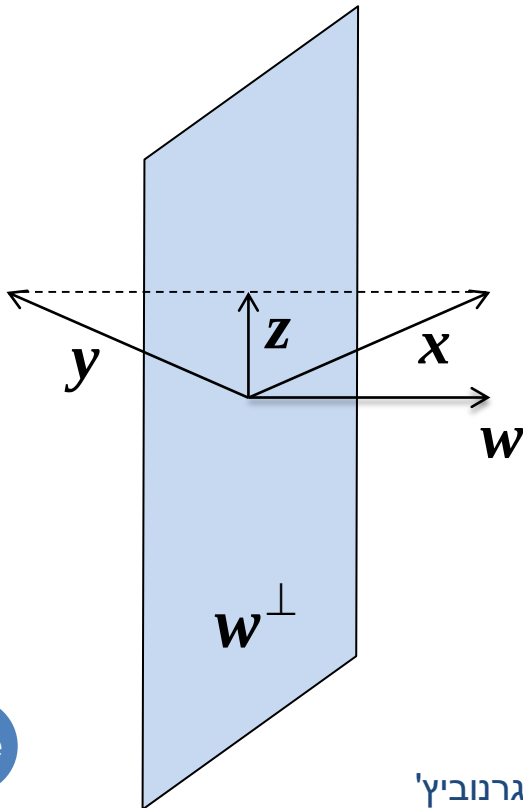
נורמה, אזי קיימת מטריצה אורתוגונלית סימטרית H המקיימת $y = Hx$

כאשר

$$H = I - 2ww^T$$

-I

$$w = \frac{1}{\|x - y\|_2} (x - y)$$



מהאורתוגונליות וסימטריות של H נובע כי

$$H^{-1} = H$$

מסקנה (מטריצה ה- k ית של Householder) : תהי A - מטריצה

ו- x - וקטור כלשהו. אם k - מספר שלם המקיים $1 \leq k \leq n-2$,

אזי אפשר לבנות וקטור w_k ומטריצה $H_k = I - 2w_k w_k^T$ כך ש

$$H_k x = H_k \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ -s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = y$$

תהליך הפירוק QR

בעזרת טרנספורמציות Householder

צעד 1

$$A = IA = \underbrace{IH^{(1)}}_{Q^{(1)}} \underbrace{H^{(1)}A}_{R^{(1)}}$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

צעד 2

$$A = Q^{(1)} R^{(1)} = \underbrace{Q^{(1)} H^{(2)}}_{Q^{(2)}} \underbrace{H^{(2)} R^{(1)}}_{R^{(2)}}$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

$$Q^{(2)} = Q^{(1)} H^{(2)} = H^{(1)} H^{(2)}$$

$$R^{(2)} = H^{(2)} R^{(1)} = H^{(2)} H^{(1)} A$$

$$A = Q^{(m)} R^{(m)} = QR$$

צעד m

$$Q = Q^{(m)} = H^{(1)} H^{(2)} \dots H^{(m)}$$

$$R = R^{(m)} = H^{(m)} \dots H^{(2)} H^{(1)} A$$

דוגמא 1 : מצא פירוק QR של המטריצה הבאה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

צעד 1

1. נגדיר $A^{(0)} = A$

2. $w_1 = \frac{1}{\|v_1\|_2} v_1, \quad v_1 = a_1 - s e_1, \quad s = \text{sign}(a_{11}) \sqrt{\|a_1\|_2^2}$

$$w_1 = \frac{1}{\|v_1\|_2} v_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, s = \sqrt{4} = 2$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{I} - 2\mathbf{w}_1\mathbf{w}_1^T \quad .3$$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{H}_1 \mathbf{A}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

צעד 2 : נתבונן רק בתת-מטריצה של $A^{(1)}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}_1^{(1)} = \frac{1}{\|\mathbf{v}_1^{(1)}\|_2} \mathbf{v}_1^{(1)}, \quad \mathbf{v}_1^{(1)} = \mathbf{a}_1^{(1)} - s^{(1)} \mathbf{e}_1^{(1)}, \quad s^{(1)} = \text{sign}(a_{11}^{(1)}) \sqrt{\|\mathbf{a}_1^{(1)}\|_2}$$

$$\mathbf{w}_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{50}} \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad s = \sqrt{25} = 5$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} - 2\mathbf{w}_1^{(1)}\mathbf{w}_1^{(1)T} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I} - 2\mathbf{w}_1^{(1)}\mathbf{w}_1^{(1)T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot [-1 \quad 0 \quad -1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{H}_2 \mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{R}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}^{(2)} = \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(2)} &= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

קיבלנו :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

שיטות איטרטביות

לפתרון מערכת משוואות ליניאריות

• השיטות שימושיות עבור מערכות גדולות ודלילות

• רעיון: $Ax = b$ ← $x_{k+1} = Bx_k + c, \quad k = 0, 1, 2, \dots$

• יהי $A = L + D + U$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}}_L + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}}_D + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_U$$

$$Ax = b$$



$$(L + D + U)x = b$$

שיטת גאוס-זיידל

Gauss-Seidel's Method



$$(L + D)x = -Ux + b$$



$$x = -(L + D)^{-1}Ux + (L + D)^{-1}b$$



$$x_{k+1} = -(L + D)^{-1}Ux_k + (L + D)^{-1}b$$

שיטת יעקובי

Jacobi's Method



$$Dx = -(L + U)x + b$$



$$x = -D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$$



$$x_{k+1} = -D^{-1}(L + U)x_k + D^{-1}b$$

שיטת גאוס-זיידל : צורה שקולה, שימושית יותר

$$(L + D)x = -Ux + b \quad \text{נחזור ל-}$$

$$\Downarrow$$

$$(L + D)x_{k+1} = -Ux_k + b$$

$$\Downarrow$$

$$Dx_{k+1} = -Lx_{k+1} - Ux_k + b$$

$$\Downarrow$$

$$x_{k+1} = -D^{-1}Lx_{k+1} - D^{-1}Ux_k + D^{-1}b$$

שוני בין שתי השיטות – צורת עדכון של איטרציה

$$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ x + 2y - z = 6 \\ x - y + 2z = -3 \end{cases}$$

• איטרציית יעקובי :

$$\begin{pmatrix} x^{k+1} \\ y^{k+1} \\ z^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^k \\ y^k \\ z^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.5 \\ 3 \\ -1.5 \end{pmatrix} \quad \text{או} \quad \begin{cases} x^{k+1} = 0.5y^k - 0.5z^k - 0.5 \\ y^{k+1} = -0.5x^k + 0.5z^k + 3 \\ z^{k+1} = -0.5x^k + 0.5y^k - 1.5 \end{cases}$$

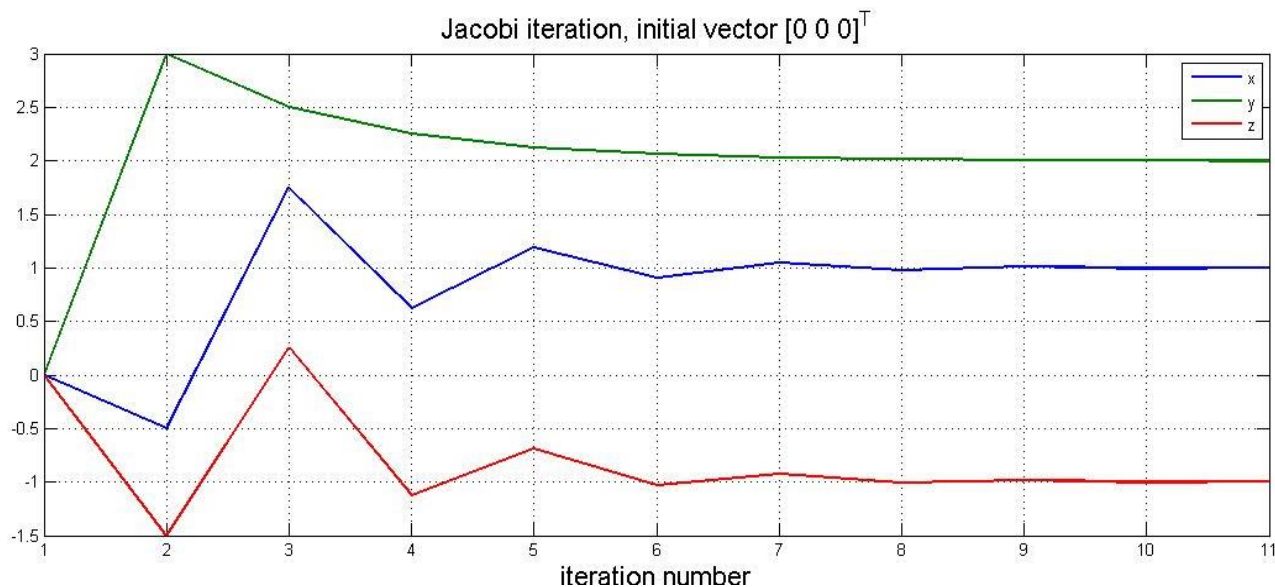
• איטרציית גאוס – זיידל :

$$\begin{cases} x^{k+1} = 0.5y^k - 0.5z^k - 0.5 \\ y^{k+1} = -0.5x^{k+1} + 0.5z^k + 3 \\ z^{k+1} = -0.5x^{k+1} + 0.5y^{k+1} - 1.5 \end{cases}$$

איטרציית יעקובי עם ניהוש התחלתי $[0 \ 0 \ 0]^T$

$$\begin{cases} x^{k+1} = 0.5y^k - 0.5z^k - 0.5 \\ y^{k+1} = -0.5x^k + 0.5z^k + 3 \\ z^{k+1} = -0.5x^k + 0.5y^k - 1.5 \end{cases}$$

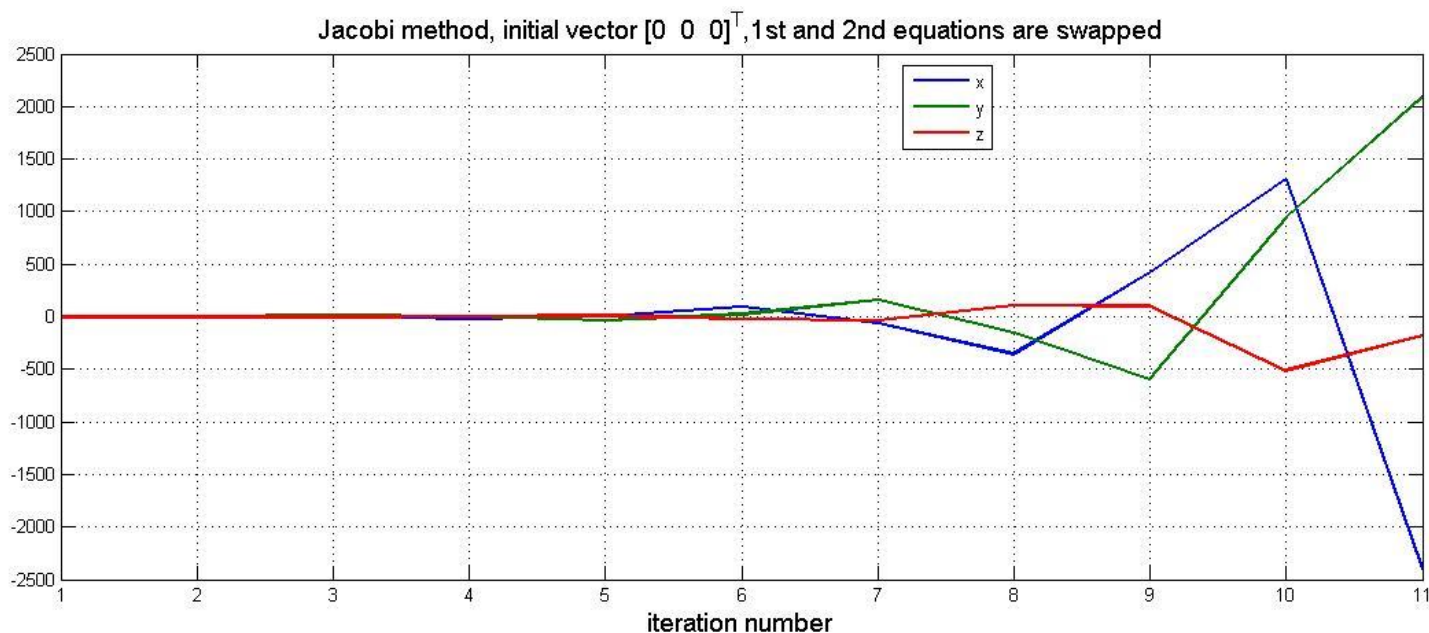
iteration	x	y	z
0	0	0	0
1	-0.5	3	-1.5
2	1.75	2.5	0.25
3	0.625	2.25	-1.125
4	1.1875	2.125	-0.6875
5	0.90625	2.0625	-1.03125
6	1.046875	2.03125	-0.92188
7	0.976563	2.015625	-1.00781
8	1.011719	2.007813	-0.98047
9	0.994141	2.003906	-1.00195
10	1.00293	2.001953	-0.99512



איטרציית יעקובי עם ניהוש
התחלתי $[0 \ 0 \ 0]^T$

$$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ x + 2y - z = 6 \\ x - y + 2z = -3 \end{cases}$$

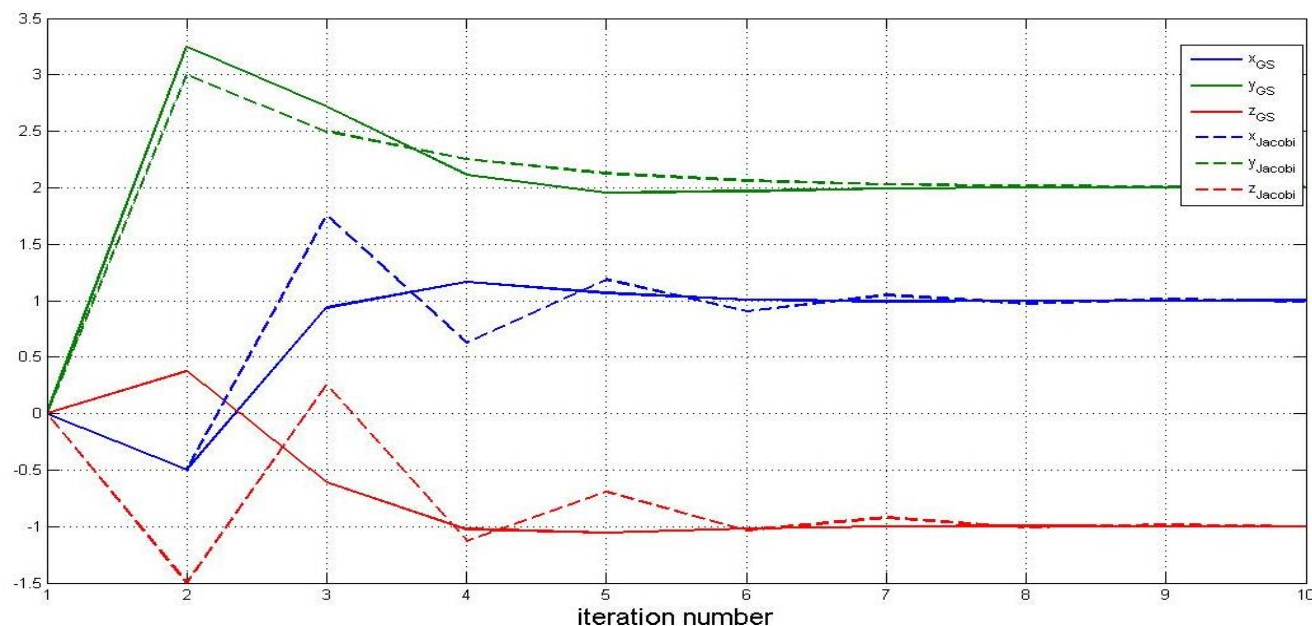
iteration	x	y	z
0	0	0	0
1	6	1	-1.5
2	2.5	11.5	-4
3	-21	2	3
4	5	-38	10
5	92	21	-23
6	-59	162	-37
7	-355	-154	109
8	423	-600	99
9	1305	946	-513
10	-2399	2098	-181



איטרציית גאוס - זיידל
עם ניחוש התחלתי $[0 \ 0 \ 0]^T$

$$\begin{cases} x^{k+1} = 0.5y^k - 0.5z^k - 0.5 \\ y^{k+1} = -0.5x^{k+1} + 0.5z^k + 3 \\ z^{k+1} = -0.5x^{k+1} + 0.5y^{k+1} - 1.5 \end{cases}$$

iteration	x	y	z
0	0	0	0
1	-0.5	3.25	0.375
2	0.9375	2.71875	-0.60938
3	1.164063	2.113281	-1.02539
4	1.069336	1.952637	-1.05835
5	1.005493	1.968079	-1.01871
6	0.993393	1.99395	-0.99972
7	0.996836	2.001721	-0.99756
8	0.999639	2.001402	-0.99912
9	1.00026	2.00031	-0.99997



תנאים להתכנסות השיטות האיטרטביות

• משפט (תנאי הכרחי ומספיק להתכנסות האיטרציה מהצורה
 $(x_{k+1} = Bx_k + c, \quad k = 0, 1, 2, \dots)$

בהינתן וקטור התחלתי כלשהו x_0 , האיטרציה הנ"ל תתכנס אם ורק אם

מתקיים $\rho(B) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(B)| < 1$ (הרדיוס הספקטראלי של B)

הוכחה :

$$x_{k+1} = Bx_k + c$$

—

$$\underline{x = Bx + c}$$

$$x_{k+1} - x = B(x_k - x)$$



$$x_{k+1} - x = B(x_k - x) = B^2(x_{k-1} - x) = \dots = B^{k+1}(x_0 - x)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x} = \mathbf{B}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}) = \mathbf{B}^2(\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}) = \dots = \mathbf{B}^{k+1}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})$$

יהיו $\lambda_i, i = 1..n$ ערכים עצמיים, $\mathbf{u}_i, i = 1..n$ וקטורים עצמיים בהתאמה (בת"ל). אזי אפשר לכתוב וקטור כצירוף ליניארי של ו"ע :

$$\mathbf{x}_0 - \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i$$

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x} = \mathbf{B} \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{B} \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \mathbf{u}_i$$

$$\mathbf{x}_2 - \mathbf{x} = \mathbf{B} \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \mathbf{B} \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^2 \mathbf{u}_i$$

...

$$\mathbf{x}_k - \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k \mathbf{u}_i$$

$$\mathbf{x}_k - \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k \mathbf{u}_i$$



$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| = \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k \mathbf{u}_i \right\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \iff \lambda_i^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \iff |\lambda_i| < 1$$

מ.ש.ל.

• תנאי מספיק להתכנסות האיטרציה $x_{k+1} = Bx_k + c, k = 0, 1, 2, \dots$

$$\|B\| < 1$$

הוכחה :

$$x_{k+1} - x = B(x_k - x) = B^2(x_{k-1} - x) = \dots = B^{k+1}(x_0 - x)$$



$$\|x_{k+1} - x\| = \|B^{k+1}(x_0 - x)\| \leq \|B^{k+1}\| \|x_0 - x\| \leq \|B\|^{k+1} \|x_0 - x\|$$



$$\|B\|^{k+1} \|x_0 - x\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \iff \|B\|^{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \iff \|B\| < 1$$

מ.ש.ל.

• משפט (תנאי מספיק להתכנסות שיטות איטרטיביות) :

תהי A – מטריצה עם אלכסון דומיננטי (שולט) ממש. אזי מערכת $Ax = b$ בעלת פתרון יחיד ואיטרציית יעקובי וגם איטרציית גאוס-זיידל יוצרות סדרת הניחושים המתכנסים לפתרון הזה לכל בחירה של ניחוש התחלתי.

הערות

- ברוב המקרים איטרציית גאוס – זיידל מתכנסת יותר מהר מאשר איטרציית יעקובי
- בחלק מהמקרים בהם איטרציית גאוס – זיידל לא תתכנס, איטרציית יעקובי כן תתכנס.

• **תנאי עצירה** עבור איטרציות : $\|x^k - x^{k-1}\| < \varepsilon$

מציאת ערכים עצמיים של מטריצה

• תהי מטריצה ריבועית A בגודל $n \times n$, v_i מקיימים

$$(A - \lambda_i I)v_i = 0, v_i \neq 0$$

משוואה אופיינית

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

• אם ידוע ו"ע, אפשר לקבל מיידית את ע"ע המתאים לפי

$$\lambda_i = \frac{v_i^T A v_i}{v_i^T v_i}$$

$$\frac{v_i^T A v_i}{v_i^T v_i} = \lambda_i$$

$$\Leftrightarrow v_i^T A v_i = \lambda_i v_i^T v_i \Leftrightarrow v_i^T A v_i = v_i^T \lambda_i v_i \Leftrightarrow A v_i = \lambda_i v_i$$

Power method

• שיטה למציאת ערך עצמי הגדול ביותר בערך מוחלט

• הנחה : $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$

• מטרה: למצוא λ_1 ו- $v^{(1)}$

• אלגוריתם

איטרציה 1 : (1) נבחר ניחוש התחלתי עבור $v^{(1)}$ ונקרא לו $z^{(0)}$.

(2) נגדיר $w^{(1)} = Az^{(0)}$ ונגדיר $\alpha_1 = \max_{i=1..n} |w_i^{(1)}|$.

(3) נגדיר $z^{(1)} = \frac{1}{\alpha_1} w^{(1)}$

(4) לחזור על התהליך

איטרציה m: $w^{(m)} = Az^{(m-1)}$, $\alpha_m = \max_{i=1..n} |w_i^{(m)}|$, נגדיר $z^{(m)} = \frac{1}{\alpha_m} w^{(m)}$

הוכחת אלגוריתם:

• הנחות נוספות – A בעלת n ו"ע בת"ל, מנורמלים ומהווים בסיס וגם

$$\max_{k=1..n} |z_k^{(0)}| = 1, \quad c_1 \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$z^{(0)} = \sum_{i=1}^n c_i v^{(i)}$$

צעד 1:

$$w^{(1)} = Az^{(0)} = A \sum_{i=1}^n c_i v^{(i)} = \sum_{i=1}^n c_i A v^{(i)} = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i v^{(i)} = \lambda_1 \sum_{i=1}^n c_i \frac{\lambda_i}{\lambda_1} v^{(i)}$$

$$z^{(1)} = \frac{\lambda_1}{\alpha_1} \sum_{i=1}^n c_i \frac{\lambda_i}{\lambda_1} v^{(i)}$$

וגם

צעד 2 :

$$\mathbf{w}^{(2)} = \mathbf{A}\mathbf{z}^{(1)} = \mathbf{A} \frac{\lambda_1}{\alpha_1} \sum_{i=1}^n \mathbf{c}_i \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \mathbf{v}^{(i)} = \frac{\lambda_1}{\alpha_1} \sum_{i=1}^n \mathbf{c}_i \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \mathbf{A} \mathbf{v}^{(i)} = \frac{\lambda_1}{\alpha_1} \sum_{i=1}^n \mathbf{c}_i \frac{\lambda_i^2}{\lambda_1} \mathbf{v}^{(i)} = \frac{\lambda_1^2}{\alpha_1} \sum_{i=1}^n \mathbf{c}_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^2 \mathbf{v}^{(i)}$$

$$\mathbf{z}^{(2)} = \frac{\lambda_1^2}{\alpha_1 \alpha_2} \sum_{i=1}^n \mathbf{c}_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^2 \mathbf{v}^{(i)}$$

וגם

צעד m :

$$\mathbf{w}^{(m)} = \frac{\lambda_1^m}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m-1}} \sum_{i=1}^n \mathbf{c}_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^m \mathbf{v}^{(i)}$$

$$\mathbf{z}^{(m)} = \frac{\lambda_1^m}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} \sum_{i=1}^n \mathbf{c}_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^m \mathbf{v}^{(i)}$$

וגם

$$\lim_{m \rightarrow \infty} c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^m \mathbf{v}^{(i)} = 0 \text{ for all } i = 2..n \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right| < 1$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{z}^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1^m}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} \sum_{i=1}^n c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^m \mathbf{v}^{(i)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{c_1 \lambda_1^m}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} \mathbf{v}^{(1)} \quad \Leftarrow$$

$$\checkmark \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{z}^{(m)} = \mathbf{v}^{(1)} \quad \Leftarrow \quad \underbrace{\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{c_1 \lambda_1^m}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} = 1}_{(*)} \quad \Leftarrow \quad \max_{i=1..n} |\mathbf{z}_i^{(m)}| = \max_{i=1..n} |\mathbf{v}_i^{(1)}| = 1, \quad m = 1..n$$

$$\underbrace{\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{c_1 \lambda_1^{m-1}}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m-1}} = 1}_{(**)} \quad \text{ב- } (*), \text{ נחליף } m-1 \leftarrow m$$

נחלק (*) ב- (**) :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1}{\alpha_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{c_1 \lambda_1^m}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}}{\frac{c_1 \lambda_1^{m-1}}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m-1}}} = 1$$



$$\lambda_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m$$

מ.ש.ל.

דוגמא : מצא ע"ע כלשהו של

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 11 & -5 \\ -2 & 17 & -7 \\ -4 & 26 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}^{(0)} = [1 \ 1 \ 1]^T \text{ כאשר}$$

צעד 1

$$\mathbf{w}^{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{z}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 11 & -5 \\ -2 & 17 & -7 \\ -4 & 26 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix} = 12 \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2/3 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \mathbf{z}^{(1)}$$

צעד 2

$$\mathbf{w}^{(2)} = \mathbf{A}\mathbf{z}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 11 & -5 \\ -2 & 17 & -7 \\ -4 & 26 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2/3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 10/3 \\ 16/3 \end{bmatrix} = \frac{16}{3} \begin{bmatrix} 7/16 \\ 5/8 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_2 \mathbf{z}^{(2)}$$

תוצאות של 6 צעדים ראשונים :

$$12 \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2/3 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{16}{3} \begin{bmatrix} 7/16 \\ 5/8 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{9}{2} \begin{bmatrix} 5/12 \\ 11/18 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{38}{9} \begin{bmatrix} 31/76 \\ 23/38 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{78}{19} \begin{bmatrix} 21/52 \\ 47/78 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{158}{39} \begin{bmatrix} 127/316 \\ 95/158 \\ 1 \end{bmatrix}$$

או במספרים עשרוניים:

$$12 \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.667 \\ 1 \end{bmatrix}, 5.333 \begin{bmatrix} 0.436 \\ 0.625 \\ 1 \end{bmatrix}, 4.5 \begin{bmatrix} 0.417 \\ 0.611 \\ 1 \end{bmatrix}, 4.222 \begin{bmatrix} 0.408 \\ 0.605 \\ 1 \end{bmatrix}, 4.105 \begin{bmatrix} 0.404 \\ 0.603 \\ 1 \end{bmatrix}, 4.051 \begin{bmatrix} 0.402 \\ 0.601 \\ 1 \end{bmatrix}$$

מסקנה : ע"ע מתכנס ל-4 וו"ע מתכנס ל- $[0.4 \ 0.6 \ 1]^T$



Inverse power method

- למציאת ע"ע הקטן בערך מוחלט.
- השיטה מתבססת על המשפט שערכים עצמיים של A^{-1} הם מספרים הופכיים לע"ע של מטריצה A .
- במקום חישוב $A^{-1}z = w$ למציאת קירוב הבא של ו"ע, נפתור $Aw = z$ עבור w . זה בדיוק מצב בו פירוק LU שימושי מאוד.

Shifted power method

- **משפט :** אם A בעלת ע"ע וו"ע λ_i, v_i בהתאמה אזי ע"ע של $A - bI$ הוא $\mu_i = \lambda_i - b$, הזזה לא משפיע על ו"ע.

הוכחה : $Av = \lambda v \Leftrightarrow Av - bv = \lambda v - bv \Leftrightarrow (A - bI)v = (\lambda - b)v$
 לפי הגדרה $v, (\lambda - b)$ ו"ע וע"ע בהתאמה של $A - bI$
 מ.ש.ל.

- **משפט :** בתנאים של המשפט הקודם, אפשר למצוא קבוע β , כך ש $\mu_i = 1/\lambda_i - \beta$ יהיה ערך עצמי הגדול ביותר בערך מוחלט של מטריצה $(A - \beta I)^{-1}$.



דוגמא : נחזור לדוגמא שראינו

$$B = A - 4I = \begin{bmatrix} -4 & 11 & -5 \\ -2 & 13 & -7 \\ -4 & 26 & -14 \end{bmatrix} \quad \text{נגדיר}$$

נבצע Power method :

$$\begin{bmatrix} -4 & 11 & -5 \\ -2 & 13 & -7 \\ -4 & 26 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 8 \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -4 & 11 & -5 \\ -2 & 13 & -7 \\ -4 & 26 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$8 \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, 115 \begin{bmatrix} 0.4261 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, -2.7043 \begin{bmatrix} 0.4453 \\ 0.5000 \\ 1.0000 \end{bmatrix}, -2.7814 \begin{bmatrix} 0.4607 \\ 0.5000 \\ 1.0000 \end{bmatrix}, -2.8428 \begin{bmatrix} 0.4723 \\ 0.5000 \\ 1.0000 \end{bmatrix},$$

$$-2.8894 \begin{bmatrix} 0.4809 \\ 0.5000 \\ 1.0000 \end{bmatrix}, -2.9234 \begin{bmatrix} 0.4869 \\ 0.5000 \\ 1.0000 \end{bmatrix}, -2.9476 \begin{bmatrix} 0.4911 \\ 0.5000 \\ 1.0000 \end{bmatrix}, -2.9645 \begin{bmatrix} 0.4940 \\ 0.5000 \\ 1.0000 \end{bmatrix}, -2.9760 \begin{bmatrix} 0.4960 \\ 0.5000 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$$

אם נבצע עוד מספר איטרציות, נראה כי ע"ע מתכנס ל

$$\mu_i = \lambda_i - 4 = -3$$

$$\lambda_i = 1$$

מכאן,

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} 0.5000 \\ 0.5000 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$$

מערכת משוואות לא ליניאריות

$$(2) \begin{cases} x_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ x_2 = g_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \vdots \\ x_m = g_m(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{cases} \quad \leftarrow \quad (1) \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \end{cases}$$

הגדרה : נקודת שבת של מערכת (2) היא נקודה $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$

המקיימת

$$(3) \begin{cases} \alpha_1 = g_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \\ \alpha_2 = g_2(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \\ \vdots \\ \alpha_m = g_m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x_1^{(n+1)} = g_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) \\ x_2^{(n+1)} = g_2(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) \\ \vdots \\ x_m^{(n+1)} = g_m(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) \end{cases}$$

עבור $n = 0, 1, \dots$

משפט : נניח כי פונקציות g_i ונגזרות החלקיות מסדר ראשון שלהן רציפות בסביבת נקודת השבת $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$. אם לבחור נקודה התחלתית קרוב מספיק לנקודת שבת, אזי יתקיים

$$\sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \right| < 1, \quad \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial g_2}{\partial x_i}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \right| < 1, \quad \dots, \quad \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \right| < 1$$

שיטת ניוטון – רפסון רב-מימדי

בהינתן מערכת

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \end{cases}$$

נסמן $\bar{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)^T$ קירוב התחלתי

שורש אמיתי $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)^T$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = f_1(\bar{x}^*) \approx f_1(\bar{x}^0) + \sum_{j=1}^m (\bar{x}_j^* - \bar{x}_j^0) \frac{df_1}{dx_j}(\bar{x}^0) \\ 0 = f_2(\bar{x}^*) \approx f_2(\bar{x}^0) + \sum_{j=1}^m (\bar{x}_j^* - \bar{x}_j^0) \frac{df_2}{dx_j}(\bar{x}^0) \\ \vdots \\ 0 = f_m(\bar{x}^*) \approx f_m(\bar{x}^0) + \sum_{j=1}^m (\bar{x}_j^* - \bar{x}_j^0) \frac{df_m}{dx_j}(\bar{x}^0) \end{array} \right.$$



$$\bar{0} = \begin{bmatrix} f_1(\bar{x}^*) \\ f_2(\bar{x}^*) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}^*) \end{bmatrix} \approx \underbrace{\begin{bmatrix} f_1(\bar{x}^0) \\ f_2(\bar{x}^0) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}^0) \end{bmatrix}}_{\bar{f}(\bar{x}^0)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}^0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}^0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(\bar{x}^0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}^0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}^0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(\bar{x}^0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{x}^0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\bar{x}^0) & \vdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(\bar{x}^0) \end{bmatrix}}_{J(\bar{x}^0)} \begin{bmatrix} \bar{x}_1^* - \bar{x}_1^0 \\ \bar{x}_2^* - \bar{x}_2^0 \\ \vdots \\ \bar{x}_m^* - \bar{x}_m^0 \end{bmatrix}$$



$$\bar{x}^* \approx -J^{-1}(\bar{x}^0) \bar{f}(\bar{x}^0) + \bar{x}^0$$

$$\text{או} \quad \bar{f}(\bar{x}^0) + J(\bar{x}^0)(\bar{x}^* - \bar{x}^0) \approx 0$$

נוסחת איטרציה :

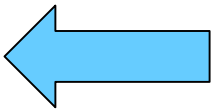
$$\bar{x}^{(n+1)} = \bar{x}^{(n)} - J^{-1}(\bar{x}^{(n)}) \bar{f}(\bar{x}^{(n)})$$

$$\Delta x$$

דוגמא : בהינתן מערכת

$$\begin{cases} x^2 - y - 1 = 0 \\ x + y^2 - 0.5 = 0 \end{cases}$$

עם קירוב ראשון $\begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

בניית איטרציה : $J = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1 & 2y \end{pmatrix}$  $J^{-1} = \frac{1}{4xy+1} \begin{pmatrix} 2y & 1 \\ -1 & 2x \end{pmatrix}$

$$\bar{x}^{(n+1)} = \bar{x}^{(n)} - \frac{1}{4x^{(n)}y^{(n)}+1} \begin{pmatrix} 2y^{(n)} & 1 \\ -1 & 2x^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(x^{(n)}\right)^2 - y^{(n)} - 1 \\ x^{(n)} + \left(y^{(n)}\right)^2 - 0.5 \end{pmatrix}$$

number of iteration	$J^{-1} \left(\bar{\mathbf{x}}^{(n-1)} \right)$	$\bar{\mathbf{x}}^{(n)}$	$\left\ \bar{\mathbf{x}}^{(n)} - \bar{\mathbf{x}}^{(n-1)} \right\ _2$
1	$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ -0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.2 \end{pmatrix}$	0.8062
2	$\begin{pmatrix} 0.2128 & 0.5319 \\ -0.5319 & 1.1702 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.7574 \\ -0.5436 \end{pmatrix}$	0.8187
3	$\begin{pmatrix} 1.6803 & -1.5455 \\ 1.5455 & -2.3413 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.4149 \\ 0.5697 \end{pmatrix}$	1.2929
4	$\begin{pmatrix} 0.2697 & 0.2367 \\ -0.2367 & 0.6699 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.0049 \\ -0.1583 \end{pmatrix}$	0.8355

עבור ניחוש התחלתי : $\begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

number of iteration	$\bar{x}^{(n)}$	$\ \bar{x}^{(n)} - \bar{x}^{(n-1)}\ _2$
1	$\begin{pmatrix} -0.5 \\ -1 \end{pmatrix}$	0.5
2	$\begin{pmatrix} -0.3333 \\ -0.9167 \end{pmatrix}$	0.1863
3	$\begin{pmatrix} -0.3135 \\ -0.9021 \end{pmatrix}$	0.0246
4	$\begin{pmatrix} -0.3133 \\ -0.9018 \end{pmatrix}$	0.00033826