

מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 8 (פתרון)

1. אפשר להניח ש- $M \neq \emptyset$ כי אחרת: $x^* \in M \Rightarrow f(x^*) = x^*$

מזה מיד נובע ש- $F_n \neq \emptyset$ (אינדוקציה)

א' אינדוקציה. בסיס: $F_1 \subseteq F_0 = M$. צעד:

$$F_k \subseteq F_{k-1} \Rightarrow F_{k+1} = f(F_k) \subseteq f(F_{k-1}) = F_k$$

ב' F_n קומפקטית כתמונה של קומפקטית בהעתקה רציפה (אינדוקציה). ולכן F_n סגורה כתת-קבוצה קומפקטית במרחב מטרי.

ג' הוכיחו ש- $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$

מ-א' נובע ש- $\bigcap_{1 \leq i \leq K} F_{n_i} = F_m$ כאשר $m = \max_{1 \leq i \leq K} n_i$

ולכן $\bigcap_{1 \leq i \leq K} F_{n_i} \neq \emptyset$ לכל קבוצה ספית $\{n_1, n_2, \dots, n_K\}$

של אינדקסים. מזה, מ-ב' ומקריטריון שהוכח בכיתה,

נובע ש- $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

ד' נניח ש- $x_n, y_n \in F_n$. אזי קיימים x_{n-1}, y_{n-1} כך ש-

$$f(x_{n-1}) = x_n \text{ ו- } f(y_{n-1}) = y_n \text{ אזי}$$

$$d(x_n, y_n) \leq a \cdot d(x_{n-1}, y_{n-1}) \leq a \cdot \text{diam}(F_{n-1})$$

$$\text{diam}(F_n) = \sup_{x_n, y_n \in F_n} d(x_n, y_n) \leq a \cdot \text{diam}(F_{n-1})$$

$$\Leftrightarrow \text{diam}(F_n) \leq a^n \cdot \text{diam}(M) \text{ 'ה-מ-ד':}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(F_n) = 0$$

ו' מ-ה' נובע ש- $\text{diam}(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n) = 0$ ומ-ג' נובע שקיימת

$x^* \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ ואינה קיימת עוד אחת כזאת.

ז' $f(x^*) \in f(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n) = \{x^*\}$

2. א' במקום τ נתבונן באוסף σ של משלימים
 לאיברי τ בקבוצה X ונוכיח שאוסף קבוצות σ בעל שלושת
 התכונות הבסיסיות של קבוצות סגורות במרחב טופולוגי.
 זה יוכיח ש- τ טופולוגיה.
 כלומר, יהי:

$$\sigma := \{F \cup \{p\} \mid F \subseteq \mathbb{R}^n \wedge F \text{ is closed in } \mathbb{R}^n\} \cup \\ \{G \subseteq \mathbb{R}^n \mid G \text{ is compact in } \mathbb{R}^n\}$$

$$(i) \quad \emptyset, \sigma \ni X = \mathbb{R}^n \cup \{p\} \text{ - קומפקטית ושייכת ל-}\sigma.$$

$$(ii) \quad \text{נתבונן בחיתוך כלשהו של איברי } \sigma. \text{ אם הם כולם}$$

מסוג $F \cup \{p\}$ אז גם החיתוך – מאותו סוג.

אחרת ביניהם ישנו איבר אחד G_0 שהוא קומפקטי
 ב- $\mathbb{R}^n$. אזי כל החיתוך הוא תת-קבוצה סגורה של G_0
 ולכן קומפקטית ב- $\mathbb{R}^n$.

$$(iii) \quad \text{נתבונן באיחוד סופי של איברי } \sigma. \text{ אם הם כולם מסוג}$$

$$"G \subseteq \mathbb{R}^n \mid G \text{ is compact in } \mathbb{R}^n" \text{ אז גם האיחוד –}$$

מאותו סוג. (הוכח בתרגול)

אחרת ביניהם ישנו איבר אחד או יותר מסוג $F \cup \{p\}$
 כך ש- F סגורה ב- $\mathbb{R}^n$. אזי כל האיחוד הסופי הוא
 תת-קבוצה סגורה ב- $\mathbb{R}^n$ המאוחדת עם הנקודון $\{p\}$
 כי כל קומפקט ב- $\mathbb{R}^n$ סגור ואיחוד סופי של קבוצות
 סגורות - סגור.

ב' הוכיחו ש- (X, τ) מרחב טופולוגי קומפקטי.
 נקח אוסף $\{H_\alpha\}_{\alpha \in I}$ של קבוצות סגורות ב- X כך שכל חיתוך
 סופי שלחן אינו ריק ונוכיח שהחיתוך של כל הקבוצות H_α גם
 אינו ריק (זה מספיק: הוכח בכיתה).

נניח –בדרך השלילה – ש- $\bigcap_{\alpha \in I} H_\alpha = \emptyset$. אזי קיימת $\beta \in I$.
 כך ש- H_β מסוג $G = H_\beta$ כאשר G קומפקטית ב- $\mathbb{R}^n$.
 (אחרת: $\bigcap_{\alpha \in I} H_\alpha \supseteq \{p\} \neq \emptyset$).
 נסמן $F_\alpha := G \cap H_\alpha$. ברור ש- F_α סגורות ב- G . אבל כל חיתוך
 סופי של F_α הוא גם חיתוך סופי של H_α ! ולכן הוא לא ריק.
 אזי, בגלל קומפקטיות של G , $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha \neq \emptyset$. אזי, כיוון
 ש- $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha \supseteq \bigcap_{\alpha \in I} H_\alpha$ – סתירה.

3. יהיו (X, τ) ו- (X, τ') מרחבים טופולוגיים, (X, τ) – מרחב
 האוסדורף ו- $\tau \subset \tau'$. יהיו $p \neq q \in X$. אזי לפי הגדרת
 האוסדורף קיימות שתי סביבות $U_p, U_q \in \tau$ כך ש-
 $U_p \cap U_q = \emptyset$ ו- $p \in U_p, q \in U_q$. אבל כיוון ש- $\tau \subset \tau'$,
 $U_p, U_q \in \tau'$ וזה מוכיח ש- τ' גם טופולוגית
 האוסדורף.

4. יהי תת-מרחב סופי $\{x_1, \dots, x_n\}$. אם $n = 1$ הכל חוכח.
 יהי $n > 1$. נוכיח ש- $\{x_1\}$ קבוצה פתוחה בטופולוגיה
 המושרתת. לכל $2 \leq i \leq n$ קיים זוג סביבות U_i, V_i כך ש-
 $x_i \in U_i, x_1 \in V_i$ ו- $U_i \cap V_i = \emptyset$. מזה מקבלים:

$$V_i \subseteq U_i^c \quad \text{לכל } 2 \leq i \leq n$$

$$\bigcap_{2 \leq i \leq n} V_i \subseteq \bigcap_{2 \leq i \leq n} U_i^c = (\bigcup_{2 \leq i \leq n} U_i)^c \Leftarrow$$
 אם נסמן $V := \bigcap_{2 \leq i \leq n} V_i$ ו- $U := \bigcup_{2 \leq i \leq n} U_i$ נקבל:
 $U \cap V = \emptyset$ כאשר V פתוחה בכל המרחב, $x_1 \in V$
 ו- $\{x_2, \dots, x_n\} \subseteq U$. מזה נובע ש- $\{x_1\}$ פתוחה בטופולוגיה
 המושרתת ל- $\{x_1, \dots, x_n\}$. באותה הלוגיקה – פתוח כל נקודון
 $\{x_i\}$ ולכן הטופולוגיה המושרתת ל- $\{x_1, \dots, x_n\}$ – דיסקרטית.

5. הערה-תזכורת. הגדרת גבול של סדרה במרחב טופולוגי מתלכד מילולית עם הגדרת גבול של סדרה במרחב מטרי בנוסח של סביבות פתוחות:

הגדרה. יהי X מרחב טופולוגי ו- $x_n \in X$ סדרה. נקודה $a \in X$ נקראת גבול של סדרה x_n אם לכל סביבה U_a של a קיים מספר טבעי N כך ש- $x_n \in U_a$ לכל $n \geq N$. הוכחה. יהי x_n – סדרה במרחב האוסדורף X ונניח בדרך השלילה ש- $x_n \rightarrow a$, $x_n \rightarrow b$, $a \neq b \in X$. אזי לפי האוסדורף קיימות סביבות לא נחתכות U ו- V ו- $a \in U$ ו- $b \in V$. אזי קיימים מספרים טבעיים N_1, N_2 כך ש- $x_n \in U$ אם $n \geq N_1$ ו- $x_n \in V$ אם $n \geq N_2$. מזה נובע ש- $x_n \in U \cap V$ אם $n \geq \max\{N_1, N_2\}$. אבל זאת סתירה כי $U \cap V = \emptyset$.

6. נסמן ב- $(*)$ את התנאי

$$\bigcap_{F^\circ \ni x} F = \{x\}$$

סגורה – F

$\Leftarrow$ יהי X מרחב האוסדורף ו- $x \in X$. ההכלה $\supseteq$ ב- $(*)$ ברורה. נוכיח את ההכלה $\subseteq$. יהי $y \in X$ ולא שייך לאגף ימין, ז"א, $y \neq x$. לפי האוסדורף קיימות סביבות U_x ו- V_y כך ש- $U_x \cap V_y = \emptyset$. אם נקח $F := V_y^c$, אז $y \notin F$ אבל F אחד מאברי החיתוך ב- $(*)$ ולכן y לא שייך לחיתוך, ז"א y לא שייך לאגף שמאל.

$\Rightarrow$ נניח שהשוויון $(*)$ מתקיים. אזי אם $y \neq x$, y לא שייך לחיתוך, ז"א, קיימת F סגורה כך ש- $x \in F^\circ$ ו- $y \notin F$. אם נקח $U_x := F^\circ$ ו- $V_y := F^c$ אז נקיים את תנאי האוסדורף.

7. יהיו $x \neq y \in X$ אזי לפי ההנחה קיים מרחב האוסדורף Y ופונקציה רציפה f כך ש- $f(x) \neq f(y)$. לכן קיימות שתי סבחות U, V ב- Y כך ש- $f(x) \in U$ ו- $f(y) \in V$ ו- $U \cap V = \emptyset$. אזי $x \in f^{-1}(U)$ ו- $y \in f^{-1}(V)$ ו- $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$. חוץ מזה $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ פתוחות כיוון ש- f רציפה. לכן X מרחב האוסדורף, מש"ל.

8. נוכיח ש- $\{x \in X | f(x) = g(x)\}^c$ קבוצה פתוחה. יהי $x_0 \in X$ כל ש- $f(x_0) \neq g(x_0)$. אזי מאקסיומת האוסדורף: קיימת סביבות U ו- V $f(x_0) \in U$ ו- $g(x_0) \in V$ כך ש- $U \cap V = \emptyset$. (*)
 מרציפות של הפונקציות בנקודה x_0 : קיימות סביבות W_1, W_2 כך ש- $f(W_1) \subseteq U$ ו- $f(W_2) \subseteq V$. אם נקח $W = W_1 \cap W_2$ אזי $f(W) \subseteq U$ ו- $f(W) \subseteq V$. לכן – בגלל (*) – לכל נקודה $z \in W$ מתקיים $f(z) \neq g(z)$. ז"א,

$$x_0 \in W \subseteq \{x \in X | f(x) \neq g(x)\}$$
 ולכן $\{x \in X | f(x) = g(x)\}^c$ קבוצה פתוחה, מש"ל.