

אלגברה לינארית 1

תיכוניםסטים קיץ תשפ"ד
יונתן סמידוברסקי

תוכן העניינים

3	1 תרגול 1	
3	1.1 מקרא מתמטי	
3	1.2 שדות	
5	1.3 שדה המרוכבים	
9	2 תרגול 2	
9	2.1 מערכות משוואות לינאריות	
13	3 תרגול 3	
13	3.1 אלגברת המטריצות	
14	3.2 קשר למערכת משוואות לינאריות	
15	3.3 סוגי כפל מטריצות	
17	3.4 השחלוף והעקבה	
19	4 תרגול 4	
19	4.1 מטריצות ריבועיות מיוחדות	
20	4.2 מטריצות הפיכות	
22	4.3 מטריצות פעולות שורה אלמנטריות ומציאת מטריצה הופכית	
23	5 תרגול 5	
23	5.1 מרחבים וקטוריים	
24	5.2 תתי-מרחבים	
25	5.3 חיתוך, איחוד, סכום, סכום ישר	
26	5.4 צירופים לינאריים והמרחב הנפרש (span)	
27	6 תרגול 6	
27	6.1 תלות לינארית	
28	6.2 הקשר בין צירוף לינארי לבין פתרון מערכת משוואות לינאריות	
29	6.3 בסיס ומימד, משפט השלישי חינם	
30	7 תרגול 7	
30	7.1 משפט המימדים	
31	7.2 מרחבי המטריצה, דרגת המטריצה, משפט הדרגה	
33	8 תרגול 8	
33	8.1 העתקות לינאריות	
34	8.2 משפט ההגדרה	
34	8.3 גרעין, תמונה ודרגה	
35	8.4 משפט הדרגה	

35	9 תרגול 9
35	9.1 קואורדינטות
36	9.2 מטריצה מייצגת, מטריצת מעבר בין בסיסים
39	9.3 תכונות של מטריצות מייצגות
39	10 תרגול 10
39	10.1 מציאת גרעין ותמונה בעזרת מטריצה מייצגת
41	10.2 תרגילים ממבחנים

1 תרגול 1

1.1 מקרא מתמטי

הגדרה 1.1. קבוצה היא אוסף של איברים בלי חשיבות לסדר ולחזרות. נסמן $\in$ (שייך לקבוצה), $\notin$ (לא שייך לקבוצה).

דוגמה 1.2. $3 \in A, 1 \notin A, A = \{3, 4, \{1, 2\}, \{1\}\}$

הגדרה 1.3. $\forall$ - לכל, $\exists$ - קיים.

דוגמה 1.4. הסיר מתאים למכסה מכסה סיר.

כמה קבוצות חשובות שכדאי להזכיר:

- המספרים הטבעיים $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- המספרים השלמים $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- המספרים הרציונאליים $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$
- המספרים הממשיים $\mathbb{R}$ היא קבוצת המספרים עם פיתוח עשרוני (סופי או אינסופי).
- המספרים המרוכבים $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$ (נדון בהם בתרגול זה).

הגדרה 1.5. $\sum$ מסמן סכום, $\prod$ מכפלה.

דוגמה 1.6. למשל, $\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}, \prod_{i=1}^n i = n!$

1.2 שדות

הגדרה 1.7. קבוצה $\mathbb{F}$ יחד עם זוג פעולות בינאריות הנקראות כפל וחיבור $(\mathbb{F}, \cdot, +)$ נקראת שדה אם מתקיימות התכונות הבאות:

1. סגירות - $\forall a, b \in \mathbb{F} a + b \in \mathbb{F}, a \cdot b \in \mathbb{F}$
2. קומוטטיביות (חילופיות) - $\forall a, b \in \mathbb{F} a + b = b + a, a \cdot b = b \cdot a$
3. אסוציאטיביות (קיבוציות) - $\forall a, b, c \in \mathbb{F} (a + b) + c = a + (b + c), (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
4. קיום איברים ניטרליים - קיימים איברים $0_{\mathbb{F}}, 1_{\mathbb{F}} \in \mathbb{F}$ (שונים) כך שמתקיים לכל $a \in \mathbb{F}$ $a + 0_{\mathbb{F}} = a, a \cdot 1_{\mathbb{F}} = a$
5. קיום איבר נגדי לחיבור - לכל איבר a , קיים איבר שנשמנו $(-a)$ כך שמתקיים $a + (-a) = 0_{\mathbb{F}}$
6. קיום איבר הופכי לכפל - לכל איבר $a \neq 0$ (פרט לאפס) קיים איבר שנשמנו a^{-1} כך שמתקיים $a \cdot a^{-1} = 1_{\mathbb{F}}$
7. דיסטריביוטיביות (פילוג) -

$$\forall a, b, c \in \mathbb{F} a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

דוגמה 1.8. אילו מהקבוצות לעיל הן שדות? (ביחס לפעולות החיבור והכפל המוכרות)
 $\mathbb{N}$ אינה שדה - למשל כי אין איבר ניטרלי לחיבור, אין נגדיים ואין הופכיים (פרט ל1).
 $\mathbb{Z}$ אינה שדה - למשל כי אין הופכי ל2.
 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ שדות - ודאו!

טענה 1.9. נזכיר ונוכיח כמה תכונות בסיסיות של שדות.

יהי שדה $\mathbb{F}$, הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) $\forall a \in \mathbb{F} \quad 0_{\mathbb{F}} \cdot a = 0_{\mathbb{F}}$.

(ב) בשדה $0_{\mathbb{F}}$ אין הופכי.

(ג) יש צמצום בחיבור, כלומר $\forall a, b, c \in \mathbb{F} \quad a + c = b + c \Rightarrow a = b$.

(ד) יש צמצום בכפל, כלומר, אם $ab = ac$ כאשר $a \neq 0_{\mathbb{F}}$ אז $b = c$.

(ה) $\forall a \in \mathbb{F} \quad -(-a) = a$ (הנגדי של הנגדי הוא האיבר עצמו).

(ו) $\forall a \in \mathbb{F} \quad (-1_{\mathbb{F}}) \cdot a = (-a)$ (הנגדי של האיבר הניטרלי הכפלי כפול איבר הוא הנגדי של אותו איבר).

(ז) $(-1_{\mathbb{F}}) \cdot (-1_{\mathbb{F}}) = 1_{\mathbb{F}}$.

(ח) יהי $\mathbb{F}$ שדה, אין לו מחלקי אפס. כלומר, לא קיימים $a, b \in \mathbb{F}$ ששניהם שונים מאפס ומקיימים $ab = 0_{\mathbb{F}}$.

(ט) בשדה ישנו רק איבר יחיד שניטרלי לכפל.

(י) בשדה ישנו רק איבר יחיד שניטרלי לחיבור.

(יא) בשדה לכל איבר יש הופכי יחיד.

(יב) בשדה לכל איבר יש נגדי יחיד.

הוכחה. נוכיח כמה טענות נבחרות, השאר מושארות כתרגיל.

(א) יהי $a \in \mathbb{F}$, נוכיח עבורו הדרוש. מניטרליות לחיבור צריך להתקיים

$$0_{\mathbb{F}} + 0_{\mathbb{F}} = 0_{\mathbb{F}}$$

לפיכך,

$$(0_{\mathbb{F}} + 0_{\mathbb{F}}) \cdot a = 0_{\mathbb{F}} \cdot a$$

מפילוג

$$0_{\mathbb{F}} \cdot a + 0_{\mathbb{F}} \cdot a = 0_{\mathbb{F}} \cdot a$$

קיים איבר נגדי לאיבר $0_{\mathbb{F}} \cdot a \in \mathbb{F}$, נחבר אותו לשני צידי המשוואה ונקבל

$$(0_{\mathbb{F}} \cdot a + 0_{\mathbb{F}} \cdot a) + (-0_{\mathbb{F}} \cdot a) = (0_{\mathbb{F}} \cdot a) + (-0_{\mathbb{F}} \cdot a)$$

מאסוציאטיביות,

$$0_{\mathbb{F}} \cdot a + (0_{\mathbb{F}} \cdot a - 0_{\mathbb{F}} \cdot a) = (0_{\mathbb{F}} \cdot a) + (-0_{\mathbb{F}} \cdot a)$$

מתכונת האיבר הנגדי

$$0_{\mathbb{F}} \cdot a + 0_{\mathbb{F}} = 0_{\mathbb{F}}$$

מניטרליות אפס לחיבור

$$0_{\mathbb{F}} \cdot a = a \cdot 0_{\mathbb{F}} = 0_{\mathbb{F}}$$

(ב) נניח בשלילה קיים איבר $a \in \mathbb{F}$ שהוא הופכי לאפס, צריך להתקיים

$$0_{\mathbb{F}} = a \cdot 0_{\mathbb{F}} = 1_{\mathbb{F}}$$

בסתירה.

(ג) מחברים את הנגדי של c בשני האגפים.

(ד) כופלים בהופכי של c בשני האגפים.

(ה) יהי $a \in \mathbb{F}$, רוצים להראות $-(-a) = a$.

בעצם מנסים להראות שהנגדי של $-a$ הוא a , כלומר צ"ל

$$-a + a = 0_{\mathbb{F}}$$

אבל זה נובע ישירות מקומוטטיביות והגדרת האיבר הנגדי.
(ו) נשים לב כי

$$0_{\mathbb{F}} = 0_{\mathbb{F}} \cdot a = (1_{\mathbb{F}} + (-1_{\mathbb{F}})) \cdot a = 1_{\mathbb{F}} \cdot a + (-1_{\mathbb{F}}) \cdot a$$

כלומר ש- $(-1_{\mathbb{F}}) \cdot a$ הוא הנגדי של $1_{\mathbb{F}} \cdot a = a$
(ז)

$$0_{\mathbb{F}} = (-1_{\mathbb{F}} + 1_{\mathbb{F}}) \cdot (-1_{\mathbb{F}}) = (-1_{\mathbb{F}}) \cdot (-1_{\mathbb{F}}) + 1_{\mathbb{F}} \cdot (-1_{\mathbb{F}})$$

מניטרליות לכפל

$$0_{\mathbb{F}} = (-1_{\mathbb{F}}) \cdot (-1_{\mathbb{F}}) + (-1_{\mathbb{F}})$$

כלומר $(-1_{\mathbb{F}}) \cdot (-1_{\mathbb{F}})$ הוא הנגדי של $(-1_{\mathbb{F}})$, כלומר $1_{\mathbb{F}}$.

(ח) הטענה אומרת $\forall a, b \in \mathbb{F}, b \neq 0_{\mathbb{F}} \Rightarrow ab \neq 0_{\mathbb{F}}$.

אפשר באופן שקול להניח $ab = 0_{\mathbb{F}}$ ולהראות שזה מכריח $a = 0_{\mathbb{F}}$ או $b = 0_{\mathbb{F}}$.
אם $a = 0_{\mathbb{F}}$, סיימנו. מעתה והלאה נניח שזה לא נכון. כלומר, $a \neq 0_{\mathbb{F}}$ ולפיכך יש לו הופכי a^{-1} , נכפול בשני הצדדים

$$a = 1_{\mathbb{F}}b = a^{-1}ab = a^{-1}0_{\mathbb{F}} = 0_{\mathbb{F}}$$

כנדרש.

(ט) נניח בשלילה שיש שני איברים ניטרלים לכפל $b, c \in \mathbb{F}$.
ניקח איבר שונה מאפס $a \neq 0$, יש לו הופכי a^{-1} אז צריך להתקיים

$$b = aa^{-1} = c$$

(יא) נניח בשלילה יש איבר a שגם b וגם c הופכיים שלו.

$$b = b \cdot 1_{\mathbb{F}} = b \cdot (a \cdot c) = (b \cdot a) \cdot c = 1_{\mathbb{F}} \cdot c = c$$

□

(אפשר גם מצמצום בכפל)

מסקנה 1.10. $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$, כאשר פעולות חיבור וכפל מתבצעות מודולו n (כלומר, שארית החלוקה).

$\mathbb{Z}_n$ הוא שדה (ונקרא שדה השאריות) אם ורק אם n ראשוני.

הוכחה.

נניח כי $\mathbb{Z}_n$ שדה, נרצה להראות n ראשוני. נניח בשלילה n פריק, כלומר קיימים

$$\boxed{\Leftarrow} \quad pq = n$$

עכשיו $\bar{p} \cdot \bar{q} = \bar{0}$, יש מחלקי אפס, בסתירה.

□

1.3 שדה המרוכבים

הגדרה 1.11. שדה המספרים המרוכבים הוא הקבוצה

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

כאשר אנחנו חושבים על i כעל מספר המקיים $i^2 = -1$.
הפעולות מוגדרות להיות:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

טענה 1.12. זהו אכן שדה.

הוכחה. רוב התכונות נובעות ישירות, נוודא הפיכות. יהי $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $0 \neq z$. היינו רוצים להראות שקיים לו הופכי, נבצע טריק של כפל בצמוד $\bar{z} = a - bi$

$$\left\{ \frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \right\}$$

(שימו לב שהמכנה שונה מאפס)
ואכן

$$(a + bi) \cdot \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

□

תרגיל 1.13. נניח משנים את פעולת הכפל להיות רכיב-רכיב, האם זהו שדה?

$$(a + bi)(c + di) = ac + bdi$$

פתרון. לא, אפשר בכמה דרכים. למשל באמצעות מחלקי אפס:

$$(1 + 0 \cdot i)(0 + 1 \cdot i) = 0$$

תרגיל 1.14. (חזרה על הגדרות וחימום)

הצג את הביטוי $\frac{5+2i}{2-3i}$ בצורה $z = a + bi$.
מהם $\bar{z}$, $|z|$, $\text{Im}(z)$, $\text{Re}(z)$?

פתרון. שוב, בכפל בצמוד

$$\frac{5 + 2i}{2 - 3i} \cdot \frac{2 + 3i}{2 + 3i} = \frac{10 + 15i + 4i - 6}{2^2 + 3^2} = \frac{4 + 19i}{13} = \frac{4}{13} + \frac{19}{3}i$$

(שימו לב, חילוק משמעו כפל בהופכי)
על כן,

$$\bar{z} = \frac{4}{13} - \frac{19}{3}i, \text{Re}(z) = \frac{4}{13}, \text{Im}(z) = \frac{19}{13}, |z| = \sqrt{\left(\frac{4}{13}\right)^2 + \left(\frac{19}{13}\right)^2}$$

הגדרה 1.15. ההצגה הקוטבית (או: פולרית) של מספר מרוכב $z = a + bi$ היא הצגה בצורה $z = r \text{cis} \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ כאשר $r = |z|$ הוא המרחק של z מאפס ו- θ היא הזווית בין z לכיוון החיובי של ציר ה- x .

ההמרה מהצורה הקרטזית לפולארית נעשית באופן הבא:

נסמן $z = a + bi$, אז $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. רוצים גם $\tan \theta = \frac{b}{a}$, מבין שתי האפשרויות בוחרים את θ שמתאים למספר שלנו (לפי הרביע בו נמצא).

כלומר, אם $a > 0$ לוקחים $\theta = \arctan \frac{b}{a}$ ואם $a < 0$ לוקחים $\theta = \arctan \frac{b}{a} + \pi$.
אם $a = 0$ אז לוקחים $\theta = \frac{\pi}{2}$ עבור $b > 0$ ו- $\theta = \frac{3\pi}{2}$ עבור $b < 0$.

תרגיל 1.16. מצאו את ההצגה הקוטבית של $1 + \sqrt{3}i$.

פתרון. קודם כל, הרדיוס הוא

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

עכשיו, אנחנו ברביעי הראשון אז

$$\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$$

ונקבל

$$1 + \sqrt{3}i = 2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

נוודא:

$$2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i$$

טענה 1.17. נייזר בתכונות חשובות של ההצגה הקוטבית שראיתם בהרצאה:

$$(r_1\operatorname{cis}\theta_1) \cdot (r_2\operatorname{cis}\theta_2) = (r_1r_2)\operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\frac{r_1\operatorname{cis}\theta_1}{r_2\operatorname{cis}\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$$

וכמובן נוסחת דה-מואבר: לכל $n \in \mathbb{N}$

$$(r\operatorname{cis}\theta)^n = r^n\operatorname{cis}(n\theta)$$

תרגיל 1.18. חשבו את $(1 + \sqrt{3}i)^{2024}$

פתרון. העלאה בחזקה היא פעולה פשוטה יותר בהצגה הקוטבית ולכן ניעזר בחישוב מהתרגיל הקודם:

$$(1 + \sqrt{3}i)^{2024} = \left(2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^{2024} = 2^{2024}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3} \cdot 2024\right)$$

יש לנו מחזוריות של 2π ב-cis ולכן נקבל

$$= 2^{2024}\operatorname{cis}\left(337 \cdot (2\pi) + \frac{2\pi}{3}\right) = 2^{2024}\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

טענה 1.19. הפתרונות של המשוואה $z^n = r\operatorname{cis}\theta$ הם

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right), 0 \leq k \leq n-1$$

שורשי היחידה הם מקרה פרטיים, פתרון של המשוואה $z^n = 1$ והם

$$\omega_n^k = \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi k}{n}\right), 0 \leq k \leq n-1$$

תרגיל 1.20. פתרו $z^5 = 3 + 4i$

פתרון. מקבלים $3 + 4i = 5\operatorname{cis}(0.927)$, ולכן

$$z^5 = 5\operatorname{cis}(0.927)$$

$$z_k = \sqrt[5]{5}\operatorname{cis}\left(\frac{0.927 + 2\pi k}{5}\right), 0 \leq k \leq 4$$

תרגיל 1.21. הוכיחו שמכפלת כל שורשי היחידה מסדר n מקיימת

$$\prod_{k=0}^{n-1} \omega_n^k = (-1)^{n-1}$$

פתרון. נשים לב כי

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} \omega_n^k &= \prod_{k=0}^{n-1} \operatorname{cis} \left(\frac{2\pi k}{n} \right) = \operatorname{cis} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\pi k}{n} \right) = \operatorname{cis} \left(\frac{2\pi}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k \right) \\ &= \operatorname{cis} \left(\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \right) = \operatorname{cis} (\pi(n-1)) \end{aligned}$$

עכשיו אם n זוגי, מקבלים $\operatorname{cis}(\pi) = -1$. אם n אי-זוגי, מקבלים $\operatorname{cis}(0) = 1$.

טענה 1.22. (תזכורת מההרצאה)

פולינום עם מקדמים משדה $\mathbb{F}$ ומשתנה x הוא $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, כאשר $a_k \in \mathbb{F}$. אפשר להציב בפולינום איבר a ונקבל $p(a) = \sum_{k=0}^n a_k a^k$. אומרים ש- a הוא שורש של הפולינום $p(x)$ אם $p(a) = 0$. ראיתם בהרצאה: (א) $z \in \mathbb{C}$ שורש של $p(x)$ אם ורק אם $\bar{z}$ הוא שורש שלו. (ב) המשפט היסודי של האלגברה - לכל פולינום $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ מעל $\mathbb{C}$ יש לפחות שורש מרוכב אחד. ניסוח שקול: כל פולינום מעל המרוכבים ניתן לכתוב כמכפלה של גורמים לינאריים $(z - z_1) \cdots (z - z_n)$.

תרגיל 1.23. הוכיחו שלפולינום ממעלה

$$p(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5$$

יש שורש ממשי. (למעשה לכל פולינום ממעלה אי-זוגית)

תרגיל 1.24. הפולינום הוא מדרגה 5 ועל כן יש לו (כולל ריבוי) 5 שורשים. מהטענה לעיל אפשר לכתוב:

$$z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3$$

כאשר צריך להתקיים $z_3 = \bar{z}_3$, לכן ממשי.

טענה 1.25. כל פולינום ממשי ניתן לפירוק לגורמים מדרגה קטנה שווה 2.

הוכחה. אפשר לפרק מעל המרוכבים את הפולינום ולאחד כל שני גורמים לינאריים מתאימים באופן הבא:

$$\begin{aligned} &(x - (a + bi))(x - (a - bi)) \\ &= (x^2 - (a - bi)x - (a + bi)x + (a + bi)(a - bi)) \\ &= (x^2 - 2ax + a^2 + b^2) \end{aligned}$$

□

2 תרגול 2

2.1 מערכות משוואות לינאריות

הגדרה 2.1. מערכות משוואות לינאריות של n משתנים עם m משוואות היא מערכת משוואות

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

כאשר $a_{ij}, b_i \in \mathbb{F}$ מקדמים קבועים ו- x_i נעלמים. אומרים שמערכת משוואות היא הומוגנית אם $b_1 = \dots = b_m = 0$. קבוצת הפתרונות של המערכת היא קבוצה ה- n יות המקיימות את כל המשוואות.

הגדרה 2.2. מטריצה מגודל $m \times n$ מעל $\mathbb{F}$ היא טבלה עם m שורות ו- n עמודות המכילה איברים מ- $\mathbb{F}$. כל מערכת משוואות לינאריות אפשר להציג במטריצה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

הגדרה 2.3. פעולת דירוג אלמנטרית (פעולה שורה) היא כל אחת מבין שלושת סוגי הפעולות הבאים:

- (א) החלפת שורות: $R_i \leftrightarrow R_j$
- (ב) כפל בסקלר: לכל $\alpha \neq 0$, $R_i \leftarrow \alpha R_i$
- (ג) הוספת כפולה של שורה: לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ ולכל $i \neq j$,

$$R_i \leftarrow R_i + \alpha R_j$$

טענה 2.4. אם אפשר להגיע ממטריצה A למטריצה B על ידי פעולות דירוג אלמנטריות, כל פתרון של A הוא פתרון של B . (הפעולות לעיל לא משנות את פתרונות מערכת המשוואות)

הגדרה 2.5. איבר מוביל הינו האיבר הראשון בשורה ששונה מאפס.

מטריצה נקראת מדורגת אם מתקיימים הבאים:

- (א) כל שורות האפסים שלה (אם יש) נמצאות בתחתית.
 - (ב) כל איבר מוביל נמצא מימין לאיבר המוביל שמעליו.
- למה קל לפתור מטריצות מדורגות?

דוגמה 2.6. פתרו את מערכת המשוואות המיוצגת על ידי המטריצה המדורגת $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array} \right)$.

המשוואה השלישית אומרת $z = 2 \Rightarrow 3z = 6$. עכשיו, נעבור למשוואה השנייה $2y + 2z = 4 \Rightarrow y = 0$.

מהמשוואה הראשונה $x + y + 2z = 6 \Rightarrow x = 2$ ונקבל שהפתרון הוא $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

הגדרה 2.7. מטריצה נקראת מדורגת קנונית אם היא מדורגת ובנוסף מתקיים:

- (א) כל האיברים המובילים הם 1.
- (ב) מעל כל איבר מוביל יש רק אפסים.

דוגמה 2.8. פתרו את מערכת המשוואות $z = 6, y = 4, x = 6$, $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \end{array} \right)$ (w חופשי).

אלגוריתם 2.9. (אלגוריתם לדירוג גאוס)

- מסתכלים על העמודה הראשונה ומחפשים בה איבר שונה מ-0. אם אין, ממשיכים לעמודה הבאה. אם יש, מעלים אותו לשורה הראשונה בעזרת החלפת שורות.
 - משתמשים באיבר הזה כדי לאפס את כל האיברים שמתחתיו.
 - ממשיכים באופן דומה בעמודות הבאות כשבכל פעם מעלים לשורה אחת מתחת, כך נקבל צורה מדורגת של A .
 - על מנת לקבל דירוג קנוני, כופלים בסקלר את השורות כדי לקבל איברים מובילים 1. לאחר מכן, מאפסים את העמודות עם איברים מובילים מהשורה התחתונה לעליונה.
- משפט 2.10.** לכל מטריצה קיימת צורה מדורגת קנונית יחידה.

דוגמה 2.11. פתרו את המערכות הבאות מעל $\mathbb{R}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 + 4R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1, -R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{array} \right)$$

הגדרה 2.12. כל משתנה שבעמודה שלו בצורה המדורגת יש איבר מוביל נקרא משתנה תלוי. שאר המשתנים נקראים משתנים חופשיים. שורת סתירה במערכת היא שורה שבה כל המקדמים הם 0 אבל המקדם החופשי אינו 0.

- טענה 2.13. (מספר פתרונות למערכת) נביט בצורה המדורגת.
- אם בצורה המדורגת יש שורת סתירה, אז אין פתרונות למערכת.
 - אחרת: אם אין משתנים חופשיים, למערכת יש פתרון יחיד. אם יש משתנים חופשיים, יש למערכת יותר מפתרון יחיד ובמקרה כזה מסמנים את המשתנים החופשיים כפרמטרים ואז מביעים את המשתנים התלויים באמצעותם.

דוגמה 2.14. פתרו את המערכות הבאות מעל $\mathbb{R}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - \frac{4}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

המשתנה החופשי הוא x, y, z הם תלויים. נסמן $z = t \in \mathbb{R}$

$$2x - \frac{4}{3}t = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = -\frac{1}{6} + \frac{2}{3}t$$

$$3y + t = 1 \Rightarrow y = \frac{1-t}{3}$$

קבוצת הפתרונות היא $\left\{ \left(\begin{array}{c} -\frac{1}{6} + \frac{2}{3}t \\ \frac{1-t}{3} \\ t \end{array} \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 + \frac{1}{4}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

כבר מהנקודה הזאת יש לנו שורת סתירה, זה אומר שאין פתרונות. קבוצת הפתרונות היא $\emptyset$.

תרגיל 2.15. מצא לאילו ערכים של הפרמטרים a יש למערכת: פתרון יחיד, אין פתרון או אינסוף פתרונות (במקרה זה מצא את הפתרון הכללי)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 & 2+a \\ a & 3a & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - aR_1, R_3 - aR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & 2 \\ 0 & 3a-a^2 & 1-a & 5-a \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 3a-a^2 & 0 & 3-a \\ 0 & 0 & 1-a & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 3a-a^2 & 0 & 3-a \\ 0 & 0 & 1-a & 2 \end{array} \right)$$

היינו רוצים $R_1 - \frac{1}{1-a}R_3$, לא בטוח חוקי (חלוקה באפס).
נסתכל מה קורה אם $a = 1$, בשורה השלישית מקבלים שורת סתירה. אז עבור $a = 1$ אין פתרון, מעתה והלאה נניח $a \neq 1$

$$R_1 - \frac{1}{1-a}R_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 - \frac{2}{1-a} \\ 0 & 3a-a^2 & 0 & 3-a \\ 0 & 0 & 1-a & 2 \end{array} \right)$$

נשים לב שבשורה השנייה אם $a = 0$ שוב יש סתירה ואין פתרון, נניח גם $a \neq 0$.
במקרה ש $a = 3$, מקבלים שורת אפסים ורק שני משתנים חופשיים, זה מוביל לאינסוף פתרונות (תרגיל - למצוא אותם).

נניח $a \neq 3$.
עכשיו, $z = \frac{2}{1-a}$ ונקבל $ay = (3-a)$, אפשר לחלק $3-a$ ולקבל $ay = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{a}$
ולבסוף, $x + ay = 1 - \frac{2}{1-a} \Rightarrow x + 1 = 1 - \frac{2}{1-a} \Rightarrow x = -\frac{2}{1-a}$
לסיכום, $a = 0, 1$ - אין פתרון, $a = 3$ - אינסוף פתרונות, אם $a \neq 0, 1, 3$ - פתרון יחיד (מצאנו אותו)

תרגיל 2.16. פתרו את המערכת הבאה מעל הממשיים

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ y - z = 2 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

תרגיל 2.17. נניח כי אחרי דירוג של מערכת נתונה הגענו ל $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$, מצאו את

קבוצת הפתרונות למערכת (מעל הממשיים) בהנחה כי
(א) המערכת הומוגנית עם 4 משתנים.
(ב) המערכת לא הומוגנית עם 3 משתנים.

תרגיל 2.18. פתור את המערכות הבאות מעל $\mathbb{C}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -2+i \\ 1 & 1-2i & 1 & 1-3i \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1-2i & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 + iR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} i & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1+i & 5+3i \end{array} \right) \\ \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} i & 0 & -1-2i & -7-6i \\ 0 & 1 & 1+i & 5+3i \end{array} \right)$$

עכשיו z חופשי, x, y תלויים. נסמן $z = t$, עכשיו

$$y + (1+i)t = 5 + 3i$$

$$y = (5-t) + i(3-t)$$

ולבסוף,

$$ix + (-1-2i)t = -7-6i$$

$$ix = (-7+t) + (-6+2t)i$$

$$x = (-6+2t) + (7-t)i$$

$$\cdot \left\{ \left(\begin{array}{c} (-6+2t) + (7-t)i \\ (5-t) + i(3-t) \\ t \end{array} \right) : t \in \mathbb{R} \right\}, \text{ סך הכל,}$$

דוגמה 2.19. נמצא את קבוצת הפתרונות של $x + y + z = 2$, x חופשי, $z = s$, $y = t$, $x = 2 - t - s$

$$\cdot \left\{ \left(\begin{array}{c} 2-t-s \\ t \\ s \end{array} \right) : t, s \in \mathbb{R} \right\} \text{ קבוצת הפתרונות תהיה}$$

תרגיל 2.20. נתונה מטריצה $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ המקיימת כי

$$A \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \xrightarrow{3R_2} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

מצאו את A .

פתרון. נפעיל את פעולות הדירוג ההופכיות בסדר הפוך

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \xleftarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xleftarrow{\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xleftarrow{R_2 + 2R_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

תרגיל 2.21. נכון או לא נכון, נמקו:

(א) למטריצה המיוצגת על ידי 4×2 אין פתרון. לא נכון, לקחת משוואה הומוגנית - תמיד יש לה לפחות פתרון אחד (הטריוויאלי)

(ב) לשתי מטריצות שונות צורה קנונית שונה. לא נכון, $\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right)$

(ג) למערכת משוואות $m \times n$ יש לכל היותר m משתנים חופשיים. לא נכון, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$.

(ד) למערכת עם אינסוף פתרונות תהיה שורת אפסים בצורה מדורגת. לא נכון, אותה דוגמה כמו בג'.

(ה) בצורה מדורגת קנונית יש איבר יחיד ששונה מאפס בכל עמודה. לא נכון, $\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$

(ו) ניתן להגיע על ידי פעולות דירוג ממטריצה אחת למטריצה אחרת אם ורק אם יש להן אותה צורה קנונית. נכון.

טענה 3.5.

א) קיבוציות כפל מטריצות $(AB)C = A(BC)$

ב) $A(B+C) = AB+BC$

ג) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

הוכחה. נדגים עבור הראשון. נסמן $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{n \times p}, C \in \mathbb{F}^{p \times l}$

עכשיו קל לראות שהגודל בשני האגפים הוא $m \times l$.

נראה שהכניסות שוות, יהיו $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq l$

$$((AB)C)_{ij} = \sum_{k=1}^p (AB)_{ik} (C)_{kj} = \sum_{k=1}^p \sum_{s=1}^n (A)_{is} (B)_{sk} (C)_{kj}$$

$$(A(BC))_{ij} = \sum_{k=1}^n (A)_{ik} (BC)_{kj} = \sum_{k=1}^n (A)_{ik} \sum_{s=1}^p (B)_{ks} (C)_{sj} = \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^p (A)_{ik} (B)_{ks} (C)_{sj}$$

נחליף סדר סכימה ונקבל הדרוש.

$$= \sum_{s=1}^p \sum_{k=1}^n (A)_{ik} (B)_{ks} (C)_{sj}$$

□

הערה 3.6. שימו לב, הכפל אינו חילופי.

3.7 הגדרה. מטריצת היחידה $I_n \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מוגדרת לפי

$$(I_n)_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

טענה 3.8. לכל $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ מתקיים

$$I_m \cdot A = A = A \cdot I_n$$

הוכחה. נוכיח כי $I_m \cdot A = A$, מבחינת גדלים זה נכון.

עכשיו יהיו $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$

$$(I_m \cdot A)_{ij} = \sum_{k=1}^m (I_m)_{ik} \cdot (A)_{kj} = \sum_{k=1}^m \delta_{ik} \cdot (A)_{kj} = A_{ij}$$

□

3.2 קשר למערכת משוואות לינאריות

$$\text{נשים לב כי אפשר לייצג את מערכת המשוואות} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{בצורה}$$

מטריציונית באופן הבא:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n \quad \text{נסמן את וקטור הנעלמים}$$

$$(A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}), b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{ומקבלים את המשוואה } Ax = b \text{ (כאשר)}$$

תרגיל 3.9. נתונה מערכת של m משוואות ב- n נעלמים $Ax = b$, נסמן

$$H = \{v \in \mathbb{F}^n : Av = 0\}$$

את קבוצת הפתרונות של המערכת ההומוגנית המתאימה וכן

$$L = \{v \in \mathbb{F}^n : Av = b\}$$

את קבוצת הפתרונות של המערכת הלא-הומוגנית.
 (א) הוכיחו את הטענה הבאה: נניח L אינה ריקה ויהא $v_1 \in L$ פתרון למערכת הלא-הומוגנית, הוכח כי $L = \{v_1 + v : v \in H\} = v_1 + H$. כלומר, כל פתרון של המערכת הלא-הומוגנית מתקבל מפתרון למערכת ההומוגנית בתוספת פתרון פרטי למערכת הלא-הומוגנית. להיפך, $H = L - v_1$, כלומר כל פתרון למערכת ההומוגנית ניתן לכתיבה כפתרון למערכת הלא-הומוגנית פחות פתרון פרטי למערכת הלא-הומוגנית.
 (ב) מצא מקרה שבו אין פתרונות למערכת הלא-הומוגנית, אך יש פתרון יחיד למערכת ההומוגנית.
 (ג) מצא מקרה שבו אין פתרונות למערכת הלא-הומוגנית אך יש אינסוף פתרונות למערכת ההומוגנית.
 (ד) (מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$ או $\mathbb{Q}$) נתון שמספר המשוואות זהה למספר הנעלמים, נתון כי אין פתרונות למערכת הלא-הומוגנית. מה ניתן לומר על מספר הפתרונות של המערכת ההומוגנית?

פתרון.

(א) $L = v_1 + H$, בהכלה דו כיוונית.
 $\supseteq$ יהי $v_1 + v \in L$ (כאשר $v \in H$) נראה כי $v_1 + v \in L$.

$$A(v_1 + v) = Av_1 + Av = Av_1 + 0 = b + 0 = b$$

$\subseteq$ יהי $w \in L$, רוצים להראות $w \in v_1 + H$, מספיק להראות כי $w - v_1 \in H$ (כי אז קיים $h \in H$ כך ש- $w - v_1 = h$ או במילים אחרות $w = v_1 + h$)

$$A(w - v_1) = Aw - Av_1 = b - b = 0$$

$$\begin{aligned} \text{(ב) ניקח } A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{(ג) ניקח } A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ד) נדרג את המטריצה A , מכיוון שאין פתרונות למערכת הלא-הומוגנית, חייב להיות בצורה המדורגת של A שורת אפסים (אחרת, יש אותו מספר של איברים מובילים ושל משתנים, לכן אין חופשיים וכל משתנה נקבע באופן יחיד על ידי וקטור הפתרונות). מכיוון שיש שורת אפסים בצורה המדורגת, יש משתנה חופשי ולכן יש אינסוף פתרונות למערכת ההומוגנית.

3.3 סוגי כפל מטריצות

טענה 3.10.

$$\begin{aligned} \text{(א) כפל לפי עמודות } C_j(AB) &= A \cdot C_j(B) \\ \text{(ב) כפל לפי שורות } R_i(AB) &= R_i(A) \cdot B \end{aligned}$$

הוכחה. נוכיח את ב',

$$(R_i(A) \cdot B)_j = \sum_{k=1}^n (R_i(A))_k \cdot B_{kj} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} = (AB)_{ij} = (R_i(AB))_j$$

□

דוגמה 3.11. כפל לפי עמודות

$$\left(\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline -1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \right) \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ \hline \end{array} \right) = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -1 & 1 \\ \hline 3 & 1 & -2 \\ \hline \end{array} \right)$$

כפל לפי שורות

$$\left(\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline -1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \right) \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ \hline \end{array} \right) = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -1 & 1 \\ \hline 3 & 1 & -2 \\ \hline \end{array} \right)$$

הגדרה 3.12. וקטורי היחידה ב $\mathbb{F}^n$ הם הוקטורים $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{F}^n$ הבאים

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

טענה 3.13. מתקיים כי $e_i^t A = R_i(A)$, $A \cdot e_j = C_j(A)$ (כאשר e_i^t הוא וקטור השורה שמוגדר בדומה ל e_i)

הוכחה. לפי כפל שורה

$$R_i(A) = R_i(I \cdot A) = R_i(I) \cdot A = e_i^t \cdot A$$

$$C_j(A) = C_j(A \cdot I) = A \cdot C_j(I) = A \cdot e_j$$

□

תרגיל 3.14. תהא מערכת $Ax = b$, יהי v פתרון למערכת הלא-הומוגנית ו w פתרון למערכת ההומוגנית. נגדיר

$$B = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline v & w & v+w & v-w & w-v \\ \hline \end{array} \right)$$

חשבו את AB

פתרון. לפי כפל עמודה

$$C_1(AB) = A \cdot C_1(B) = Av = b$$

$$C_2(AB) = A \cdot C_2(B) = Aw = 0$$

$$C_3(AB) = A \cdot C_3(B) = A(v+w) = Av + Aw = b + 0 = b$$

$$C_4(AB) = A \cdot C_4(B) = A \cdot (v-w) = Av - Aw = b - 0 = b$$

$$C_5(AB) = A \cdot C_5(B) = A(w-v) = Aw - Av = 0 - b = -b$$

$$AB = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline b & 0 & b & b & -b \\ \hline \end{array} \right)$$

3.4 השחלוף והעקבה

הערה. תהי מטריצה $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ אזי המטריצה המשוכללת של A היא $A^t \in \mathbb{F}^{n \times m}$ שמוגדרת לפי

$$(A^t)_{ij} = (A)_{ji}$$

טענה 3.15. (תכונות שחלוף)

$$\begin{aligned} & \forall A \in \mathbb{F}^{m \times n} (A^t)^t = A \quad (\text{א}) \\ & \forall A, B \in \mathbb{F}^{m \times n} (A + B)^t = A^t + B^t \quad (\text{ב}) \\ & \forall A \in \mathbb{F}^{m \times n} \forall \alpha \in \mathbb{F} (\alpha A)^t = \alpha A^t \quad (\text{ג}) \\ & \forall A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{n \times k} (AB)^t = B^t A^t \quad (\text{ד}) \end{aligned}$$

הוכחה. נוכיח את ד', קל לוודא ששני האגפים מאותו הגודל. עכשיו

$$\left((AB)^t \right)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^n (A)_{jk} (B)_{ki} = \sum_{k=1}^n (B^t)_{ik} (A^t)_{kj} = (B^t A^t)_{ij}$$

□

הגדרה 3.16. אומרים שמטריצה היא סימטרית אם $A = A^t$ ואנטי-סימטרית אם $A = -A^t$.

3.17 תרגיל

(א) תהי A מטריצה ריבועית ממשית אנטי-סימטרית, הוכיחו כי כל איברי האלכסון שלה שווים לאפס.

- (ב) הראו כי זה לא נכון ב $\mathbb{Z}_2$
 (ג) הראו כי לכל מטריצה A מתקיים כי $(A + A^t)$ היא סימטרית.
 (ד) הראו כי אם A אנטי-סימטרית, גם $-A^t$ אנטי-סימטרית.
 (ה) הראו כי לכל מטריצה A מתקיים כי AA^t סימטרית.
 (ו) מעל $\mathbb{R}$, מהן המטריצות שהן סימטריות ואנטי-סימטריות?

פתרון.

- (א) $(A)_{ii} = -(A^t)_{ii} = -(A)_{ii} \Rightarrow (A)_{ii} = 0$
 (ב) כשמסתכלים מעל שדה כללי, הטענה היא שכל איבר על האלכסון מקיים $a = -a$, במילים אחרות: $a + a = 0$ כלומר

$$(1_{\mathbb{F}} + 1_{\mathbb{F}})a = 0$$

בגלל שאין מחלקי אפס או ש $1_{\mathbb{F}} + 1_{\mathbb{F}} = 0$ או ש $a = 0$.
 $\mathbb{R}$ מתקיים כי $1 + 1 \neq 0$ ולכן זה נכון. אבל ב $\mathbb{Z}_2$ (למעשה כל שדה שהוא ממאפיין 2, כלומר סכום שתי אחדות הוא אפס) זה לא נכון. כלומר, הבאות הן מטריצות אנטי-סימטריות ב $\mathbb{Z}_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t \quad (\text{ג})$$

$$(-A^t)^t = -(A^t)^t = -(-A)^t = A^t \quad (\text{ד})$$

$$(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t \quad (\text{ה})$$

(ו) צריך להתקיים

$$-A = A^t = A$$

כלומר $A = -A$, מעל $\mathbb{R}$ זו מטריצת אפסים.
 מושאר כתרגיל למצוא את כל המטריצות הסימטריות ואנטי-סימטריות מעל $\mathbb{Z}_2$.

הגדרה 3.18. העקבה (trace) של מטריצה ריבועית הינה סכום איברי האלכסון של המטריצה

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

טענה 3.19. (תכונות העקבה) יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ויהי $\alpha \in \mathbb{F}$

$$\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) \quad (\text{א})$$

$$\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A) \quad (\text{ב})$$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \quad (\text{ג})$$

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(A^t) \quad (\text{ד})$$

הוכחה. נוכיח את ג'.

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki}$$

$$\text{tr}(BA) = \sum_{i=1}^n (BA)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{ki} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ki} b_{ik}$$

□

כאשר המעבר האחרון נובע מחילופיות כפל בשדה והחלפת סדר סכימה.

תרגיל 3.20. הוכח שלא קיימות מטריצות ריבועיות ממשיות כך שמתקיים

$$AB - BA = I$$

האם נכון לכל שדה?

פתרון. נפעיל עקבה על שני האגפים

$$\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0$$

אבל מעל $\mathbb{R}$

$$\text{tr}(I) = 1 + \dots + 1 \neq 0$$

(מעל שדות עם מאפיין סופי זה יכול להיות נכון)

למשל, מעל $\mathbb{Z}_2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

תרגיל 3.21

(א) תהא A מטריצה ממשית כך שמתקיים

$$\text{tr}(AA^t) = 0$$

הוכיחו כי A היא מטריצת האפס.

(ב) תהא A מטריצה מרוכבת כך שמתקיים

$$\text{tr}(A\overline{A}^t) = 0$$

פתרון.

(א)

$$\text{tr}(AA^t) = \sum_{i=1}^m [AA^t]_{ii} = \sum_{i=1}^m R_i(A) \cdot C_i(A^t)$$

$$= \sum_{i=1}^m R_i(A) \cdot [R_i(A)]^t$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(AA^t) &= A_{11}^2 + A_{12}^2 + \dots + A_{1n}^2 + A_{21}^2 + \dots + A_{2n}^2 + \dots + A_{m1}^2 + A_{mn}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (A)_{ij}^2 \end{aligned}$$

עכשיו, זה שווה לאפס אם ורק אם כל הריבועים הם אפס אם ורק אם המטריצה שווה לאפס.
(ב) דומה, נקבל סכום של $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ ושוב בעזרת טענה דומה מקבלים שאיברי המטריצה הינם אפס.

תרגיל 3.22. האם כל מטריצה סימטרית $B \in \mathbb{F}^{m \times m}$ ניתנת לכתיבה כמכפלה של מטריצה והשחלוף שלה AA^t (עבור $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$)?

פתרון. לא. נתבונן במטריצה $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, לא קיימת מטריצה כזו כי אז היה צריך להתקיים

$$\operatorname{tr}(AA^t) = \operatorname{tr}(B) = 0$$

ומהתרגיל הקודם זה אומר $A = 0$ בסתירה.

תרגיל 3.23. האם כל מטריצה סימטרית $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ניתנת לכתיבה כך $A + A^t$ (עבור $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$)?

פתרון. כן.

נגדיר A באופן הבא: מעל האלכסון - 0, מתחת לאלכסון - כמו B , באלכסון - חצי מ- B .
שימו לב - חצי הכוונה ההופכי של $1_{\mathbb{F}} + 1_{\mathbb{F}}$ (צריך שיהיה קיים, כלומר לא מאפיין 2).

4 תרגול 4

4.1 מטריצות ריבועיות מיוחדות

הגדרה 4.1. ראינו כבר את מטריצת היחידה I_n ומטריצת האפס 0_n ותכונות שלהן. נגדיר מספר משפחות מיוחדות של מטריצות ריבועיות.

מטריצה משולשית עליונה היא מטריצה מהצורה $A = \begin{pmatrix} * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$, כלומר $a_{ij} = 0$ לכל $j < i$.

מטריצה משולשית תחתונה היא מטריצה מהצורה $A = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ * & \dots & * \end{pmatrix}$, כלומר $a_{ij} = 0$ לכל $i < j$.

מטריצה אלכסונית היא מטריצה מהצורה $A = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$, כלומר $a_{ij} = 0$ לכל $i \neq j$.

מטריצה סקלרית היא מהצורה $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I_n$

תרגיל 4.2.

- (א) הוכיחו כי כפל של סקלריות היא סקלרית.
 (ב) הוכיחו כי כפל של אלכסוניות היא אלכסונית.
 (ג) הוכיחו כי כפל של משולשיות עליונות הוא משולשית עליונה. בדומה עבור תחתונה.

פתרון.

$$(\alpha I_n) \cdot (\beta I_n) = (\alpha\beta) I_n \quad \text{(א)}$$

(ב) יהיו A, B אלכסוניות, נראה כי AB אלכסונית. יהיו $i \neq j$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}$$

אבל A אלכסונית, לכן לכל $k \neq i$ נקבל 0. סך הכל

$$= A_{ii} B_{ij}$$

אבל $i \neq j$ לכן $A_{ii} B_{ij} = 0$.

(ג) נניח A, B משולשיות עליונות, כלומר עבור $i < j$ הן אפס. עכשיו, יהי $i < j$ ונוכיח כי $(AB)_{ij} = 0$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n (A)_{ik} (B)_{kj}$$

עכשיו לכל $i < k$ מקבלים $(A)_{ik} = 0$

$$= \sum_{k=1}^i (A)_{ik} (B)_{kj}$$

אבל לכל $k \leq i < j$ כלומר $k < j$ מקבלים $(B)_{kj} = 0$. נקבל אפס כנדרש.

4.2 מטריצות הפיכות

הגדרה 4.3. מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ נקראת הפיכה אם קיימת מטריצה B כך ש $AB = BA = I$. במקרה זה, מטריצה B נקראת ההופכית של A ומסומנת $B = A^{-1}$.

טענה 4.4. שימו לב, מטריצה הפיכה היא בהכרח ריבועית. המטריצה ההופכית A^{-1} היא יחידה.

הוכחה. נניח בשלילה יש B, C הפיכות. כלומר

$$AB = BA = I$$

$$AC = CA = I$$

עכשיו

$$C = I \cdot C = (B \cdot A) \cdot C = B \cdot (A \cdot C) = B \cdot I = B$$

□

דוגמה 4.5. ההופכית של המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ היא A עצמה. (ודאו)

משפט 4.6. אם A ריבועית וכן $AB = I$ אזי $AB = BA = I$ ו- B הינה ההופכית של A . כלומר, מטריצה שהפיכה מצד אחד הפיכה משני הצדדים.

טענה 4.7. נניח $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ הפיכות. הוכיחו כי גם AB הפיכה ומתקיים $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

הוכחה. מספיק להראות

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$$

ואכן

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

□

תרגיל 4.8. יהיו $A_1, \dots, A_k$ מטריצות אזי המכפלה $A_1 \cdot A_2 \cdots A_k$ הפיכה אם ורק אם לכל i מתקיים A_i הפיכה. במקרה זה,

$$(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}$$

בכיוון הראשון, אם כולן הפיכות קל לוודא כמו מהקודם שהמכפלה אכן I . בכיוון השני, נתון שהמכפלה הפיכה. נסמן את ההופכית של המכפלה ב- B , אז לפי ההגדרה

$$A_1 \cdot A_2 \cdots A_k \cdot B = I$$

נקבל

$$A_1^{-1} = A_2 \cdots A_k \cdot B$$

עכשיו, נכפול ב- A^{-1} משמאל וב- A_1 מימין ונקבל

$$A_2 \cdots A_k \cdot B \cdot A_1 = I$$

וכן מצאנו

$$A_2^{-1} = A_3 \cdots A_k \cdot B \cdot A_1$$

וכן הלאה...

מסקנה 4.9. אם A הפיכה אזי לכל n טבעי מתקיים

$$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$$

מסקנה 4.10. תהי A כך ש- $A + A^2$ הפיכה. אזי $A, A + I$ הפיכות (מכפלתן היא $A + A^2$).

תרגיל 4.11. תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה עם שורת אפסים, הוכח כי אינה הפיכה.

פתרון. תהא i שורת האפסים של A , אז לכל B מתקיים כי

$$R_i(AB) = R_i(A)B = \vec{0} \cdot B = \vec{0} \neq R_i(I)$$

לפי כפל שורה. כלומר, לא קיימת B כך ש- $AB = I$ ש- $\vec{0}$ כיוון ש- $R_i(I) \neq \vec{0}$.

תרגיל 4.12. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם A, B הפיכות אזי $A + B$ הפיכה.

(ב) אם $A + B$ הפיכה אזי A, B הפיכות.

פתרון.

(א) לא נכון, ניקח $A = I, B = -I$ (ההופכית שלהן זו המטריצה עצמה). אבל $A + B = 0_{n \times n}$ וקל לראות שאינה הפיכה.
(ב) גם לא נכון, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. לפי התרגיל הקודם אינן הפיכות, אבל סכומן I שהיא כמובן הפיכה.

תרגיל 4.13. הוכח שאם A הפיכה אזי גם המשוכללת שלה הפיכה ומתקיים

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

הסק שאם A הפיכה וסימטרית אזי גם ההופכית שלה סימטרית.

פתרון. נניח A הפיכה, אזי קיימת A^{-1} כך ש $AA^{-1} = I$. נשחלף

$$(A^{-1})^t A^t = (AA^{-1})^t = I^t = I$$

ואכן ההופכית של A^t היא $(A^{-1})^t$.
כאן, אם A הפיכה וסימטרית מתקיים

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = A^{-1}$$

כלומר שההופכית גם סימטרית.

4.3 מטריצות פעולות שורה אלמנטריות ומציאת מטריצה הופכית

מטריצת (שורה) אלמנטרית היא מטריצה המתקבלת מהפעלת פעולת שורה אלמנטרית על מטריצת היחידה.

למשל, ב $\mathbb{F}^{3 \times 3}$ החלפת שורות $R_2 \leftrightarrow R_3$ מתאימה למטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

משפט 4.14. לכל מטריצה A מתקיים $\rho(A) = \rho(I)$ כאשר ρ היא פעולת שורה. כלומר, הפעלת פעולת שורה אלמנטרית שקולה לכלל במטריצת השורה האלמנטרית המתאימה.

משפט 4.15. מטריצה אלמנטרית $E = \rho(I)$ היא הפיכה ופתקיים $E^{-1} = \rho^{-1}(I)$.

הערה 4.16. יש משפט והגדרה דומים עבור מטריצות עמודה אלמנטריות רק עם כפל בצד השני.

מסקנה 4.17. (אלגוריתם למציאת מטריצה הופכית) בהינתן מטריצה A הפיכה ניתן לעבור מ A ל I ע"י פעולות שורה אלמנטריות. כלומר,

$$E_k \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A = I$$

מכאן מתקבל

$$A^{-1} = (E_k \cdots E_1) = (E_k \cdots E_1) \cdot I$$

אזי ההופכית מתקבלת מהכפלת המטריצות האלמנטריות ב I . באופן שקול, ביצוע הפעולות האלמנטריות על I !

לכן, אם נסתכל על המטריצה $(A|I)$ ונדרג אותה נקבל לאחר הדירוג $(I|A^{-1})$, פעולות הדירוג מתבצעות במקביל גם על A וגם על I . ברגע שהגענו מ A ל I אז במקביל הגענו מ I להופכית של A .

נעיר כי אם אחרי הדירוג של A לא קיבלנו את I אזי A אינה הפיכה. כלומר, אחרי הדירוג או שהיא לא הפיכה או שמצאנו את ההופכית ולכן האלגוריתם מתבצע גם אם לא יודעים מראש A הפיכה.

דוגמה 4.18. נמצא את ההופכית של $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

טענה 4.19. בהינתן מטריצה ריבועית A , אזי A הפיכה אם ורק אם למערכת $Ax = b$ קיים פתרון יחיד.

הוכחה. אם A הפיכה אזי $x = A^{-1}b$.
 בכיוון השני, אם לא הפיכה אז במדורגת יש שורת אפסים, זה מוביל לאין פתרונות (שורת סתירה) או אינסוף (משתנה חופשי). $\square$

תרגיל 4.20. (תרגילים נוספים)
 (א) תהא $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ התלויה בפרמטר a . עבור אילו ערכי a המטריצה הפיכה?

(ב) תהא A מטריצה ריבועית הפיכה. תהא B מטריצה המתקבל מהחלפת שורות 1, 2 של A . כלומר, $A \xleftrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} B$. מה הקשר בין ההופכית של A להופכית של B ?
 (ג) תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $0 \neq A$. הוכיחו: לא הפיכה אם ורק אם היא מחלקת אפס.

5 תרגול 5

5.1 מרחבים וקטוריים

דוגמה 5.1. $V = \mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ עם חיבור וכפל בסקלר

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

נרצה להכליל את הדוגמה הזאת.

הגדרה 5.2. מרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$ הוא קבוצת איברים (הנקראים וקטורים) יחד עם פעולת חיבור וכפל בסקלר, כך שמתקיימות התכונות הבאות:

- (1) סגירות $\forall u, w \in V \forall \alpha \in \mathbb{F} u + w \in V \wedge \alpha u \in V$
- (2) חילופיות $\forall u, w \in V u + w = w + u$
- (3) אסוציאטיביות (קיבוץ) $\forall u, v, w \in V \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F} (u + w) + v = u + (w + v) \wedge \alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$
- (4) נייטרלי לחיבור $\exists 0_V \forall v \in V 0_V + v = v$
- (5) נגדיים $\forall v \in V \exists (-v) \in V v + (-v) = 0_V$
- (6) נייטרלי לכפל בסקלר $\forall v \in V 1_{\mathbb{F}} \cdot v = v$
- (7) דיסטריביוטיביות (פילוג) $\forall u, w \in V \forall \alpha \in \mathbb{F} (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u \wedge \alpha(u + w) = \alpha u + \alpha w$

טענה 5.3. יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו $u \in V, \alpha \in \mathbb{F}$
 (א) $\alpha u = 0_V$ אם ורק אם $\alpha = 0_{\mathbb{F}}$ או $u = 0_V$.
 (ב) $(-1)_{\mathbb{F}} u = -u$

דוגמה 5.4. (דוגמאות נוספות)

(א) מרחב המטריצות $\mathbb{F}^{m \times n}$ מעל שדה $\mathbb{F}$ עם חיבור וכפל בסקלר של מטריצות.
 (ב) מרחב הפולינומים מעל שדה מדרגה קטנה שווה ל- n

$$\mathbb{F}_n[x] = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n : \forall_i a_i \in \mathbb{F}\}$$

מעל שדה $\mathbb{F}$ עם פעולת חיבור פולינומים וכפל בסקלר.
 (ג) מרחב הפולינומים

$$\mathbb{F}[x] = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n : a_i \in \mathbb{F}, n \in \mathbb{N}\}$$

עם חיבור וכפל סקלרים מוכרים

5.2 תתי-מרחבים

הגדרה 5.5. יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. תת קבוצה $U \subseteq V$ תקרא תת-מרחב אם היא מרחב וקטורי בפני עצמה ביחס לפעולות של V , נסמן $U \leq V$.

טענה 5.6. (הקריטריון המקוצר) יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $U \subseteq V$ קבוצה של וקטורים אזי U תת-מרחב אם ורק אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

(א) $0_V \in U$

(ב) $\forall_{v_1, v_2 \in U} v_1 + v_2 \in U$

(ג) $\forall_{u \in U} \forall_{\alpha \in \mathbb{F}} \alpha u \in U$

ניתן לקצר:

(א) $0_V \in U$

(ב) $\forall_{v_1, v_2 \in U} \forall_{\alpha \in \mathbb{F}} v_1 + \alpha v_2 \in U$

דוגמה 5.7. $\{0_V\}, V \subseteq V$ תמיד תתי-מרחבים, נקראים תתי-המרחבים הטריטוריאליים.

5.8 תרגיל

1. מי מהבאים הם תתי-מרחבים וקטורים של $V = \mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$?

(א) $W = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ הוא תת-מרחב.

(ב) $W = \{(x, y) : x, y \geq 0\}$ אינו תת-מרחב.

(ג) $W = \{(x, y) : x, y \geq 0 \vee x, y \leq 0\}$ אינו תת-מרחב.

(ד) $W = \{(x, y) : y = 3x\}$ הוא תת-מרחב.

2. תהא $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ מטריצה. אוסף הפתרונות למערכת ההומוגנית $Ax = 0$, כלומר $W = \{v \in \mathbb{F}^n : Av = 0\} \leq \mathbb{F}^n$ הוא תת-מרחב וקטורי. הראו כי זה לא נכון באי-הומוגניות.

3. נתבונן במרחב המטריצות $V = \mathbb{F}^{n \times n}$ מעל $\mathbb{F}$

(א) המטריצות הסקלריות הן תת-מרחב וקטורי.

(ב) המטריצות הסימטריות $W = \{A \in V | A^t = -A\}$, $W = \{A \in V | A^t = A\}$ הן

תתי-מרחבים. כך גם משולשיות, אלכסוניות, סקלריות...

(ג) $W = \{A \in V : A^t = A \vee A^t = -A\}$ אינו תת-מרחב.

(ד) $W = \{A \in V : \text{tr}(A) = 0\}$ הוא תת-מרחב.

4. $V = \mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפולינומים מדרגה 2 מעל $\mathbb{R}$.

א. $W = \{a + bx : a, b \in \mathbb{R}\}$ הוא תת-מרחב.

ב. $W = \{a + bx : 0 \neq b \in \mathbb{R}\}$ אינו תת-מרחב.

ג. עבור $a \in \mathbb{F}$, $W = \{p(x) : p(a) = 0\}$ הוא תת-מרחב וקטורי.

5.3 חיתוך, איחוד, סכום, סכום ישר

הגדרה 5.9. יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו $U, W \subseteq V$ תתי-מרחב. נגדיר את סכום תתי-המרחבים

$$U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$$

אומרים ש $V = U \oplus W$ (סכום ישר) אם $V = U + W$ וגם $U \cap W = \{0_V\}$.

משפט 5.10. יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, יהיו $W_1, W_2 \leq V$ תתי-מרחבים אזי

(א) $W_1 \cap W_2$ הינו תת-מרחב של V .

נעיר כי $W_1 \cap W_2$ הינו תת-המרחב הגדול ביותר שמוכל ב W_1, W_2 . כלומר לכל תת-מרחב

$$T \subseteq W_1 \cap W_2 \text{ מתקיים } T \subseteq W_1, W_2$$

(ב) $W_1 + W_2$ הינו תת-מרחב של V .

נעיר כי $W_1 + W_2$ הינו תת-המרחב הקטן ביותר שמכיל את W_1, W_2 . כלומר לכל תת-מרחב

$$W_1 + W_2 \subseteq T \text{ מתקיים } W_1, W_2 \subseteq T$$

(ג) $V = U \oplus W$ אם ורק אם לכל וקטור $v \in V$ קיימת הצגה יחידה $v = u + w$ כסום

של רכיבים מ U ו W .

דוגמה 5.11. יהי $V = \mathbb{R}^4$ ונגדיר את תתי-המרחבים הבאים

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

$$W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V : x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \wedge -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

מהו $W_1 \cap W_2$?

דוגמה 5.12. יהי $V = \mathbb{R}^3$ ונגדיר את תתי-המרחבים הבאים

$$W_1 = \left\{ \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W_2 = \left\{ \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

מהו $W_1 \cap W_2$?

תרגיל 5.13. יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $W_1, W_2 \leq V$ תתי-מרחבים אזי $W_1 \cup W_2 \leq V$ אם ורק אם $W_1 \subseteq W_2$ או $W_2 \subseteq W_1$.

פתרון.

$\Rightarrow$ ברור, זה בדיוק W_i המתאים שהוא תת-מרחב.

$\Leftarrow$ נניח בשלילה שזה מ"ו ואין הכלה בשני הכיוונים, אזי קיימים $w_1 \in W_1 \setminus W_2, w_2 \in W_2 \setminus W_1$. שניהם נמצאים באיחוד, צריך להתקיים שהסכום שלהם $w_1 + w_2$ נמצא באיחוד כי זהו תת-מרחב.

אבל כדי להיות באיחוד הוא צריך להיות באחד מהם, אבל הוא לא ב W_1 כי אם היה היה ניתן להחסיר ממנו w_1 ולקבל $w_2 \in W_1$ בסתירה. כנ"ל עבור W_2 .

דוגמה 5.14. ב $V = \mathbb{R}^3$ מהו סכום תתי-המרחבים הבאים

$$W_1 = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}, W_2 = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

דוגמה 5.15. הראו שהבאים מקיימים $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{F}^n$

$$W_1 = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{F}^n : a_1 = a_2 = \dots = a_n\}$$

$$W_2 = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{F}^n : a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0\}$$

פתרון. קודם נראה שזה סכום ואחר כך ישר.
יהא $v = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{F}^n$ נגדיר $b = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}$ ממוצע הקואורדינטות. $w_1 =$
 $(b, \dots, b) \in W_1$, עכשיו $v = w_1 + (v - w_1)$.
בנוסף $(\sum a_i - b = \sum a_i - n \cdot \frac{\sum a_i}{n} = 0)$ $v - w_1 \in W_2$
עכשיו, כדי שוקטור יקיים את התנאים ל W_1, W_2 צריך שכל הקואורדינטות שלו יהיו
שוות לאפס. כנדרש.

תרגיל 5.16. במרחב $V = \mathbb{R}_2[x]$, הוכיחו כי

$$W_1 = \{p(x) : p(2) = 0\}$$

$$W_2 = \{p(x) : p(x) = x \cdot p'(x)\}$$

הם תתי-מרחבים, חשבו את החיתוך והסכום - הסיקו כי הסכום ישר.

5.4 צירופים לינאריים והמרחב הנפרש (span)

הגדרה 5.17. יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, תהי $S \subseteq V$. וקטור $v \in V$ נקרא צירוף לינארי של הקבוצה S אם $v = 0_V$ או קיימים וקטורים בקבוצה S $v_1, \dots, v_n \in S$ וסקלרים מהשדה $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ כך שמתקיים

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

אוסף כל הוקטורים במרחב שהם צירופים לינאריים של S נקרא $\text{span}(S)$.
(שימו לב - $\text{span}(\emptyset) = \{0_V\}$)

טענה 5.18. זהו תת-מרחב וקטורי, הוא נקרא המרחב הנפרש. הוא תת-המרחב הקטן ביותר של V שמכיל את S . כלומר, אם $W \leq V$ מקיים $S \subseteq W$ אזי $\text{span}(S) \subseteq W$.

הוכחה. קל לוודא שזה תת-מרחב מהקריטריון המקוצר. בנוסף אם $W \leq V$ מקיים $S \subseteq W$ אז לכל צירוף לינארי מ $\text{span}(S)$ צריך להתקיים כי הוא ב W (מסגירות). $\square$

טענה 5.19. (תכונות) יהי V מ"ו, יהיו $A, B \subseteq V$ תתי-קבוצות ו $W, U \leq V$ תתי-מרחבים אזי הוכיחו את הבאים

(א) $U + W = \text{span}\{U \cup W\}$

(ב) $A \subseteq \text{span}(A)$

(ג) $\text{span}(A) \subseteq \text{span}(B)$ אזי $A \subseteq B$

(ד) $\text{span}(A) + \text{span}(B) = (A \cup B)\text{span}$

(ה) $\text{span}(W) = W$ אם ורק אם W תמ"ו.

(ו) אם $A \subseteq \text{span}(B)$ אזי $\text{span}(A) \subseteq \text{span}(B)$

דוגמה 5.20. קבעו איזה וקטורים נמצאים ב $\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

אלגוריתם 5.21. (אלגוריתם לקביעת שיוך לספאן) נרצה לקבוע האם $v \in \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$, נשים את הוקטורים בעמודות מטריצה A ונשים את v בוקטור הקבועים. הוקטור שייך למרחב אם ורק אם למערכת הלא הומוגנית יש פתרון.

6 תרגול 6

6.1 תלות לינארית

הגדרה 6.1. יהא V מ"ז מעל $\mathbb{F}$. יהיו וקטורים $v_1, \dots, v_n \in V$ כלשהם אז אומרים שהם תלויים לינארית אם קיימים סקלרים $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ (לא כולם מתאפסים) כך שהצירוף הלינארי מתאפס $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$. אם הוקטורים אינם תלויים לינארית, אומרים שהם בלתי תלויים לינארית, כלומר הצירוף היחיד שמתאפס הוא הצירוף הטריוויאלי בלבד. אם $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ אז $\forall_i \alpha_i = 0$. קבוצה $S \subseteq V$ נקראת תלויה לינארית אם קיימים וקטורים שונים שתלויים לינארית.

אלגוריתם 6.2. (אלגוריתם לקביעת תלות לינארית) נרצה לקבוע האם הפתרון היחיד לפשוואה $x_1 v_1 + \dots + x_k v_k = 0$ הוא שכל הסלקרים הם אפסים. בעזרת חישוב כפל לפי עמודות

$$x_1 v_1 + \dots + x_k v_k = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_k \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

לכן אם נשים את הוקטורים בעמודות מטריצה A נקבל שהם בת"ל אם ורק אם למערכת המשוואות ההומוגנית יש פתרון יחיד, $N(A) = \{0_V\}$.

6.3 דוגמה

- (א) $V = \mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ בת"ל.
- (ב) מה בנוגע לקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$?
- (ג) יהי $v \in V$ אזי $\{v\}$ קבוצה בת"ל.
- (ד) תהי $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ כך ש $0_V \in S$ אזי S ת"ל.
- (ה) $V = \mathbb{R}_2[x]$, האם $S = \{2 + 6x, x^2, 1 + 2x, 2x^2\}$ בת"ל?
- (ו) $\{1, x, x^2, x^3, \dots\} \subseteq \mathbb{F}[x]$ היא בת"ל.

משפט 6.4. $v_1, \dots, v_n$ תלויים לינארית אם ורק אם אחד מהוקטורים הינו צירוף לינארי של האחרים.

הוכחה. אם הם ת"ל, קיימים סקלרים כך ש $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ ולפחות אחד מבין הסקלרים שונה מאפס. בה"כ נניח כי $a_1 \neq 0$ ונקבל $v_1 = -\frac{a_2 v_2 + \dots + a_n v_n}{a_1}$, לכן

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2 + \dots + \frac{-a_n}{a_1} v_n$$

בכיוון השני נניח כי $v_1 = \sum_{i=2}^n \alpha_i v_i$ צירוף לינארי של האחרים, אזי

$$-v_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i v_i = 0$$

וקיבלנו צירוף לינארי משתאפס שיש מקדם אחד לפחות ששונה מאפס, לכן תלויים לינארית. $\square$

מסקנה 6.5. אם v_1 הינו צירוף לינארי של האחרים ניתן להסיר אותו במובן הבא

$$\text{span}\{v_1, \dots, v_n\} = \text{span}\{v_2, \dots, v_n\}$$

תרגיל 6.6. יהא V מ"ויהיו v_1, v_2, v_3 וקטורים. הוכיחו או הפריכו: אם v_1, v_2, v_3 בת"ל בזוגות (כלומר, כל זוג וקטורים שונים הם בת"ל) אזי $\{v_1, v_2, v_3\}$ בת"ל.

פתרון. הפרכה - ניקח $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

תרגיל 6.7. יהא V מ"ויהיו $v_1, v_2, \dots, v_n$ וקטורים. אם $v_1, \dots, v_n$ בצ"ל אזי הוקטורים

$$v_1, v_2 + v_1, \dots, v_n + v_1$$

גם בת"ל.

6.2 הקשר בין צירוף לינארי לבין פתרון מערכת משוואות לינארי

תרגיל 6.8. יהיו $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{F}^m$ נגדיר $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ להיות המטריצה שעמודותיה הן $v_1, \dots, v_n$ (כלומר, $C_i(A) = v_i$). יהי $b \in \mathbb{F}^m$ וקטור (פתרון). הוכיחו:

(א) $b \in \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ אם ורק אם קיים פתרון למערכת $Ax = b$.
(ב) במקרה זה הפתרון x הינו וקטור הסקלרים של הצירוף הלינארי שנותן את b . כלומר,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ אזי } b = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n.$$

(ג) נניח שהוקטורים שייכים למרחב $\mathbb{F}^n$ ($m = n$) והמטריצה ריבועית) הוכח שקיים צירוף לינארי יחיד הנותן את b אם ורק אם המטריצה הפיכה. מה ניתן להסיק על הוקטורים במקרה הזה?

פתרון.

א-ב) מכפלת עמודה נקבל $Ax = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ ולפיכך ברור כי יש פתרון למערכת $Ax = b$ אם ורק אם קיימים סקלרים כך ש $b = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$.
ג) אם המטריצה הפיכה אזי $x = A^{-1}b$ הוא הפתרון היחיד. בכיוון השני, אם קיים צירוף לינארי יחיד הנותן את b אזי b אינו נדרג את A קנונית נגיע למטריצה היחידה וזה אומר ש A הפיכה.

במקרה זה שהמטריצה הפיכה נסיק כי גם למערכת $Ax = 0$ יש פתרון יחיד שהוא $x = 0$, כלומר צ"ל היחיד של עמודות A שמתאפס הוא הצירוף הלינארי הטריטואלי, כלומר עמודות A בת"ל.

בנוסף, אנחנו יודעים שמטריצה היא הפיכה אם ורק אם המשולפת שלה הפיכה, ניתן להסיק שמטריצה הינה הפיכה אם ורק אם שורותיה בת"ל.

תרגיל 6.9. יהא $\mathbb{F}^n$ מ"ו $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית, הוכיחו: A הפיכה אם ורק אם לכל $v_1, \dots, v_m$ בת"ל מתקיים $Av_1, \dots, Av_m$ בת"ל.

פתרון. בכיוון הראשון, אם A הפיכה ניקח צירוף מתאפס

$$\alpha_1 (Av_1) + \dots + \alpha_m (Av_m) = 0$$

$$A(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m) = 0$$

בכפל בהופכית משמאל נקבל

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$$

בכיוון השני, ניקח $v_1 = e_1, \dots, v_m = e_m$ אז צריך להתקיים כי

$$\alpha_1 A e_1 + \dots + \alpha_m A e_m = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$$

$$\alpha_1 C_1(A) + \dots + \alpha_m C_m(A) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$$

כלומר, עמודותיה בת"ל.

עמודותיה בת"ל אם ורק אם למערכת $Ax = 0$ יש פתרון יחיד, כלומר שהיא הפיכה.

6.3 בסיס ומימד, משפט השלישי חינוס

הגדרה 6.10. יהי V מ"ז מעל $\mathbb{F}$. קבוצה $B \subseteq V$ תקרא בסיס אם

(א) B בת"ל

(ב) $\text{span}(B) = V$ כלומר, B פורשת את המרחב, כלומר

המימד של V הוא $\dim V = |B|$ (מספר האיברים ב- B) כאשר B הוא בסיס, אם המימד סופי אזי V יקרא נוצר סופית.

6.11 משפט

(א) ההגדרה של מימד פוגזרת היטב ואינה תלויה בבחירת הבסיס, כלומר כל שני בסיסים B, B' בעלתי אותה עוצמה (אותו מספר איברים)
(ג) לכל מרחב וקטורי קיים בסיס

6.12 דוגמה

(א) $V = \mathbb{F}^n$ אז הבסיס הסטנדרטי הוא $B = \{e_i : 1 \leq i \leq n\}$

(ב) $V = \mathbb{F}^{m \times n}$ אז הבסיס הסטנדרטי הוא $B = \{E_{i,j} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$

(ג) $V = \mathbb{F}_n[x]$ אז הבסיס הסטנדרטי הוא $B = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

(ד) $V = \mathbb{F}[x]$ אז הבסיס הוא אינסופי $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$

טענה 6.13. יהא V מרחב וקטורי, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס אזי כל $v \in V$ ניתן להצגה כצירוף לינארי של איברי B בצורה יחידה.

הוכחה. יהא $v \in V$, כיוון ש- B פורשת את V קיים צירוף לינארי של B ששווה ל- v . נראה יחידות, נניח שני צירופים לינארי של B שווים

$$\sum_{i=1}^n \beta_i v_i = v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

בהעברת אגפים

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) v_i = 0$$

□

מאי-תלות, כולם מתאפסים כלומר שזה אותו צירוף.

משפט 6.14. (משפט השלישי חינוס) יהי V מ"ז מעימד n ותהי $S \subseteq V$ אזי אם שניים מבין התנאים הבאים מתקיימים, גם השלישי מתקיים ו- S מהווה בסיס למרחב V .

(א) S בת"ל.

(ב) $\text{span} S = V$ פורשת V .

(ג) $|S| = \dim V$.

תרגיל 6.15. (הכלה ושיוויון מימדים) יהי V מ"ז מעל $\mathbb{F}$, יהי $W \leq V$ תת-מרחב מאותו מימד סוי. נסמן $\dim V = \dim W = n$, הוכח כי $W = V$.

פתרון. נבחר בסיס ל- W , בפרט $\text{span}(B) = W$, בת"ל. לפי השלישי חנים $|B| = n = \dim V$, שוב מהשלישי חנים זה בסיס ל- V (מאותו המימד ובת"ל). מכאן ש- $\text{span}(B) = V$ ולכן $W = \text{span}(B) = V$

תרגיל 6.16. יהא $V = \mathbb{R}_2[x]$. מצא בסיס לחיתוך ולסכום

$$W_1 = \{p(x) \in V : p(1) = 0\}, W_2 = \{p(x) \in V : p(2) = 0\}$$

פתרון. נתחיל מהחיתוך, $W = \{p(x) \in V : p(1) = p(2) = 0\}$, כלומר

$$a_0 + a_1 + a_2 = 0 = a_0 + 2a_1 + 4a_2$$

מערכת משוואות עם משתנה חופשי אחד, לכן המימד של W הוא 1. מהשלישי חנים מספיק למצוא $p(x) \in W$ והוא יהווה בסיס, דוגמה $p(x) = (x-1)(x-2)$. נעבור לסכום, אפשר לכתוב $W_2 = \text{span}\{-4+x^2, 2+x\}$, $W_1 = \text{span}\{-1+x^2, -1+x\}$, לכן, $W_1 + W_2 = \text{span}\{-1+x^2, -1+x, -4+x^2, 2+x\}$, אפשר לראות שהשלושה הראשונים בלתי תלויים ולכן $\dim(W_1 + W_2) = 3$, מהכלה ושיוויון מימדים $W_1 + W_2 = \mathbb{R}_2[x]$.

תרגיל 6.17. יהא $V = \mathbb{R}^4$. מצא בסיס ל- W_1, W_2 , לסכום ולחיתוך שלהם

$$W_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} : \begin{matrix} a_1 - 3a_2 - 5a_3 = a_4 \\ 4a_2 + 8a_3 - 2a_4 = 2a_1 \end{matrix} \right\}$$

תרגיל 6.18. יהא V מ"ו ותהא B קבוצה המוכלת ב- V . הראו שהתנאים הבאים שקולים: (א) B בסיס עבור V .

(ב) וקטור האפס אינו שייך ל- B ולכל קבוצה $A \subseteq B$ מתקיים $V = \text{span} A \oplus \text{span}(B \setminus A)$

פתרון.

⏴ וקטור האפס לא שייך (אחרת לא הייתה בת"ל), בנוסף, נסמן בה"כ $B = \{v_1, \dots, v_j\}$, $A = \{v_1, \dots, v_n\}$. נותר להראות כי $\text{span}\{v_1, \dots, v_j\} \oplus \text{span}\{v_{j+1}, \dots, v_n\} = \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$. קודם כל החיתוך ריק: $\text{span}\{v_1, \dots, v_j\} \cap \text{span}\{v_{j+1}, \dots, v_n\} = \{0\}$ אם ורק אם קיימים סקלרים

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_j v_j = v = \beta_{j+1} v_{j+1} + \dots + \beta_n v_n$$

אם ורק אם $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_j v_j - \beta_{j+1} v_{j+1} - \dots - \beta_n v_n = 0$. מאי תלות, זה שקול לכך שהסקלרים הם אפס כלומר $v = 0$.

⏴ נכון לכל קבוצה A ובפרט לקבוצה הריקה, $V = \text{span} B$ ולכן פורשת. נותר להראות שהיא בת"ל. נניח בשלילה שהיא תלויה, כלומר יש וקטור שהוא צירוף לינארי של השאר u . עכשיו ניקח $A = \{u\}$ (אם $u \neq 0$) ונקבל סתירה לתכונת הסכום הישר.

7 תרגול 7

7.1 משפט המימדים

משפט 7.1. (משפט המימדים) יהי V מ"ו ויהיו $U, W \leq V$ תתי-מרחבים אזי

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

תרגיל 7.2. יהא V מ"מ מממד 5 ויהיו U מממד 3 ו- W מממד 4 תתי מרחבים של V . מהן האפשרויות עבור $\dim(U \cap W)$?

פתרון. קודם כל, $U \cap W \subseteq U$ ולכן $\dim(U \cap W) \leq \dim U = 3$,
בנוסף $U + W \subseteq V$ ולכן $\dim(U + W) \leq \dim V = 5$.
ממשפט המימדים

$$\dim U + \dim W - \dim(U \cap W) \leq 5$$

$$\dim(U \cap W) \geq 2$$

כלומר, האפשרויות הן 2, 3.
תרגיל - למצוא דוגמאות שמוכיחות שאכן אפשרויות אלה אכן מתקבלות.

תרגיל 7.3. יהא V מ"מ מממד n ויהיו U, W תתי-מרחבים כך שמתקיים $\dim U = n - 1$, W אינו מוכל ב- U . הוכח כי $W + U = V$.

פתרון. מהכלה ושיוויון מימדים מספיק להראות $\dim(W + U) = n$.
אבל

$$\dim(W + U) = \dim W + \dim U - \dim(U \cap W) = (n - 1) + \dim W - \dim(U \cap W)$$

עכשיו $\dim(U \cap W) \leq \dim W$ אבל לא שווה, כי אז היינו מקבלים מהכלה ושיוויון מימדים $U \cap W = W$ אבל W אינו מוכל ב- U . כלומר, $\dim(U \cap W) < \dim W$ ועל כן

$$\dim W - \dim(U \cap W) \geq 1$$

ונקבל

$$\dim(W + U) \geq n - 1 + 1 = n$$

כלומר, $\dim(W + U) = n$ כנדרש.

תרגיל 7.4. יהיו W_1, W_2 ת"מ של מ"מ V כך שמתקיים

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1 \cap W_2) + 1$$

$$\{W_1, W_2\} = \{W_1 + W_2, W_1 \cap W_2\}$$

פתרון. מתקיים

$$\dim(W_1 \cap W_2) \leq \dim W_1, \dim W_2 \leq \dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1 \cap W_2) + 1$$

ולכן כל אחד מבין W_1, W_2 שווה או למימד החיתוך או למימד הסכום (הכלה ושיוויון מימדים), אבל לא יתכן ששניהם שווים לאותו האחד כי אז מימד הסכום היה שווה למימד החיתוך.

7.2 מרחבי המטריצה, דרגת המטריצה, משפט הדרגה

הגדרה 7.5. תהי מטריצה $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, מגדירים את המרחבים הבאים
מרחב העמודות $C(A) = \text{span}\{C_1(A), \dots, C_n(A)\} \subseteq \mathbb{F}^m$ (מכפל עמודה אפשר לכתוב $\{Ax : x \in \mathbb{F}^n\}$)
מרחב השורות $R(A) = \text{span}\{R_1(A), \dots, R_m(A)\} \subseteq \mathbb{F}^n$ (אפשר לכתוב $\{A^t x : x \in \mathbb{F}^m\}$)
מרחב האפס $N(A) = \{x \in \mathbb{F}^n : Ax = 0\} \subseteq \mathbb{F}^n$

$$R(AB) \subseteq R(B), C(AB) \subseteq C(A) \quad 7.6$$

דוגמה 7.7. מצאו את מרחבי המטריצה של $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

תרגיל 7.8. תהא $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ותהא $E \in \mathbb{F}^{n \times m}$ מטריצה הפיכה, הוכיחו כי $R(A) = R(EA)$.

פתרון. יהא $(EA)^t x \in R(EA)$ אזי $(EA)^t x = A^t E^t x = A^t y \in R(A)$ $\supseteq$
יהי $A^t x \in R(A)$ אזי $\subseteq$

$$A^t x = (E^{-1}EA)^t x = (EA)^t (E^{-1})^t x = (EA)^t y \in R(EA)$$

מסקנה אם E מכפלה של מטריצות אלמנטריות המעבירות את A לצורה מדורגת או מדורגת קנונית, מרחב השורות של A שווה לזה של הצורה המדורגת או המדורגת הקנונית!

דוגמה 7.9. מצאו את $R \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \right)$ (על ידי דירוג)

אלגוריתם 7.10. תהא $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, ניתן למצוא בסיסים למרחבי המטריצה באופן הבא:

- (1) נדרג את המטריצה.
- (2) השורות שאינן מתאפסות בצורה המדורגת מהוות בסיס למרחב השורות - $R(A)$.
- (3) העמודות במטריצה המקורית שבצורה המדורגת יש בהן איברים מוגדלים מהוות בסיס למרחב העמודות - $C(A)$.
- (4) נדרג קנונית, נמצא פתרון כללי למערכת ההומוגנית על ידי הצבה של פרמטר בכל משתנה חופשי. לבסוף, נפריד את הפרמטרים כפול וקטורי העקדמים, קבוצת וקטורי העקדמים מהווים בסיס למרחב האפס - $N(A)$.

משפט 7.11. $\dim R(A) = \dim C(A)$

הגדרה 7.12. הדרגה של A מוגדרת להיות $\text{rank}(A) = \dim [R(A)]$.

משפט 7.13. (משפט הדרגה עבור מטריצות) עבור $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ מתקיים $\text{rank}(A) + \dim N(A) = n$.

תרגיל 7.14. יהיו $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n \times p}$, הוכח כי $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A)$, $\text{rank}(B)$.

פתרון. ראינו כבר $R(AB) \subseteq R(B)$, $C(AB) \subseteq C(A)$ ועל כן

$$\text{rank}(AB) = \dim R(AB) \leq \dim R(B) = \text{rank}(B)$$

$$\text{rank}(AB) = \dim C(AB) \leq \dim C(A) = \text{rank}(A)$$

תרגיל 7.15. תהא $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ותהא $E \in \mathbb{F}^{m \times m}$ מטריצה הפיכה. הוכיחו כי $N(A) = N(EA)$.

פתרון. בהכלה דו כיוונית:
יהא $x \in N(EA)$ אזי $EAx = 0$, בכפל בהופכית בשמאל נקבל $Ax = 0$. כלומר $x \in N(A)$ $\supseteq$
יהי $x \in N(A)$ אזי $Ax = 0$ ובפרט $EAx = 0$. לכן $x \in N(EA)$ $\subseteq$
מסקנה דירוג לא מקלקל את מרחב האפס.

תרגיל 7.16. תהא $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, הראו כי $\mathbb{R}^n = R(A) \oplus N(A)$.

פתרון. סכום המימדים הוא n , מספיק להראות שהחיתוך ביניהם אפס ואז יש הכלה ושיוויון מימדים ויוצא גם שהסכום הוא ישר.

אכן, יהי $v \in R(A) \cap N(A)$ אזי $Av = 0$ וכן $\exists w A^t w = v$ נקבל $0 = A(A^t w) = A^t w$ משמאל נקבל

$$w^t A A^t w = 0$$

$$0 = (A^t w)^t (A^t w) = v^t v$$

וראינו כי זה גורר $v = 0$. נקבל הדרוש.

8 תרגול 8

8.1 העתקות לינאריות

הגדרה 8.1. יהיו V, W שני מ"מ מעל אותו שדה $\mathbb{F}$. פונקציה $T : V \rightarrow W$ היא הע"ל אם

$$\forall v_1, v_2 \in V T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) \quad (א)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{F} \forall v \in V T(\alpha v) = \alpha T(v) \quad (ב)$$

או באופן שקול: אם לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ וגם $v_1, v_2 \in V$ מתקיים

$$T(\alpha v_1 + v_2) = \alpha T(v_1) + T(v_2)$$

טענה 8.2. (תכונות בסיסיות)

$$T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n T(\alpha_i v_i)$$

$$T(0_V) = 0_W$$

8.3 דוגמה

(א) $V = \mathbb{F}^n, W = \mathbb{F}^m$ ותהא $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ אזי העתקת המטריצה

$$L_A : V \rightarrow W$$

המוגדרת לפי $v \mapsto Av$ היא הע"ל.

(ב) $\text{tr} : \mathbb{F}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{F}$ המוגדרת לפי $A \mapsto \text{tr}(A)$ היא הע"ל.

(ג) העתקת הנגזרת $D : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_{n-1}[x]$ המוגדרת

$$p(x) \mapsto \frac{d}{dx} p(x) = p'(x)$$

(ד) העתקת הזהות $I : V \rightarrow V$ היא הע"ל.

(ה) העתקת האפס $0 : V \rightarrow W$ המוגדרת לפי $v \mapsto 0$ היא הע"ל.

(ו) הטלה.

(ז) הסבירו מדוע $T(x, y, z) = (2x + y - z, x + 3y + z)$ היא העתקה לינארית.

הבאים הם אינם העתקות לינאריות:

$$V = W = \mathbb{R}^2 \text{ מעל } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a^2 \\ b \end{pmatrix} \quad (א)$$

$$T(x, y, z) = (2x + y - z, 3x + 2) \quad (ב)$$

הערה 8.4. ראינו שכפל במטריצה הוא העתקה לינארית, האם כל העתקה לינארית היא בעצם כפל במטריצה? בגדול כן.

טענה 8.5. יהיו $T, S : V \rightarrow W$ שתי הע"ל והי בסיס $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ ל V .

נניח כי T, S מסכימים על איברי הבסיס, כלומר $\forall 1 \leq i \leq n T(v_i) = S(v_i)$.

הוכיחו: $T = S$.

8.2 משפט ההגדרה

משפט 8.6. יהיו V, W שני מ"ו מעל $\mathbb{F}$. יהי בסיס $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל- V ויהיו $w_1, \dots, w_n \in W$ וקטורים כלשהם.

אזי קיימת העתקה לינארית יחידה $T : V \rightarrow W$ כך ש- $T(v_i) = w_i$ $\forall i$.

מסקנה 8.7. ניתן להגדיר הע"ל יחידה לפי קביעת תמונות איברי הבסיס.

דוגמה 8.8. $V = \mathbb{R}_2[x]$ מצא הע"ל $T : V \rightarrow V$ המקיימת

$$T(1) = x + 2, T(x) = 1, T(x^2) = -2x + 1$$

כתוב את ההעתקה באופן מפורש.

דוגמה 8.9. יהיו $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

וכן $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

האם קיימת הע"ל $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ המקיימת $Tv_i = w_i$ $\forall i$?

נשים לב שיש תלות $v_3 = 3v_1 - 2v_2$, צריך להתקיים כשכשמופעילים את ההעתקה על שני האגפים מתקבל שוויון. זה אכן נכון ולכן הדרישה $Tv_3 = w_3$ מתקבלת "בחינם" ואפשר לוותר עליה.

אפשר להשלים v_1, v_2, v לבסיס ולהגדיר למשל $Tv_i = w_i, Tv = 0$.

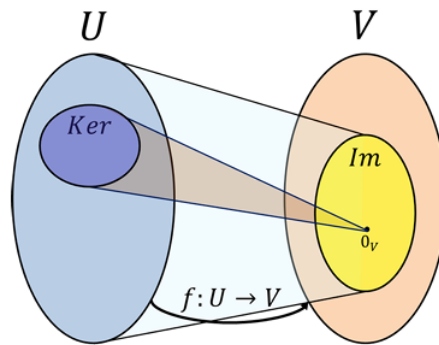
8.3 גרעין, תמונה ודרגה

הגדרה 8.10. תהא $T : V \rightarrow W$ הע"ל.

(א) הגרעין של T מוגדר לפי $\ker T = \{v \in V : Tv = 0\} \leq V$

(ב) התמונה של T מוגדרת לפי $\operatorname{im} T = \{Tv : v \in V\} \leq W$

(ג) הדרגה של T מוגדרת לפי $\operatorname{rank}(T) = \dim(\operatorname{im} T)$



דוגמה 8.11. יהיו $V = \mathbb{F}^n, W = \mathbb{F}^m$, תהא $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ונסתכל על העתקה $L_A : V \rightarrow W$ המוגדרת לפי $v \mapsto Av$ אזי

$$\ker T = N(A), \operatorname{im} T = C(A), \operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}(A)$$

תרגיל 8.12. תהי $T : V \rightarrow V$ הע"ל. הוכיחו

(א) $T \circ T$ העתקה לינארית

(א) $\ker T \subseteq \ker T^2$

(ב) $\operatorname{im} T^2 \subseteq \operatorname{im} T$

משפט 8.13. תהא $T : V \rightarrow W$ הע"ל אזי $\ker T$ חת"ע אם ורק אם $\ker T = \{0_V\}$.

תרגיל 8.14. תהא $T : V \rightarrow W$ הע"ל ויהיו $\{v_1, \dots, v_n\}$ וקטורים ב- V אזי
(א) אם $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$ בת"ל אזי $\{v_1, \dots, v_n\}$ בת"ל.
(ב) אם T חת"ע גם הכיוון השני הפוך.

מסקנה 8.15. אין העתקות לינאריות חת"ע מרחב V ממימד n למרחב W ממימד m כאשר $n > m$.

כי אז הבסיס הוא בת"ל אבל התמונה שלו לא יכולה להיות בת"ל ממשפט השלישי חינם.

תרגיל 8.16. תהא $T : V \rightarrow W$ הע"ל, תהא $A \subseteq V$ ת"ק אזי

$$T(\operatorname{span}(A)) = \operatorname{span}(T(A))$$

כמסקנה, לכל $W \leq V$ תת-מרחב מתקיים כי $T(W)$ תת-מרחב.

8.4 משפט הדרגה

משפט 8.17. תהא $T : V \rightarrow W$ הע"ל אזי $\dim \operatorname{im} T + \dim \ker T = \dim V$. שימו לב, מטריצה היא פקדה פרטי להעתקה לינארית וזו הכללה של משפט הדרגה עבור מטריצות.

$$\dim C(A) + \dim N(A) = n$$

תרגיל 8.18. הוכח שהבאים שקולים:

$$\ker T = \ker T^2 \quad (\text{א})$$

$$\operatorname{im} T^2 = \operatorname{im} T \quad (\text{ב})$$

$$V = \ker T \oplus \operatorname{im} T \quad (\text{ג})$$

9 תרגול 9

9.1 קואורדינטות

הגדרה 9.1. יהא V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל- V . יהי $v \in V$ וקטור. ראינו שהוא ניתן להצגה יחידה כצ"ל של איברי הבסיס, ההצגה שלו לפיהם היא וקטור שמורכב מהמקדמים של הצ"ל. ההצגה של v לפי בסיס B היא וקטור הקואורדינטות המסומן $[v]_B \in \mathbb{F}^n$ ומוגדרת להיות

$$[v]_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

כאשר $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$.

דוגמה 9.2. הקואורדינטות של הוקטור $1 + 2x - x^2$ לפי הבסיס הסטנדרטי S של $\mathbb{R}_3[x]$ הן

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

דוגמה 9.3. $V = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$. מצא את הקואורדינטות של הוקטור $v = (a, b)$ לפי הבסיס B .

טענה 9.4. $v = 0$ אם ורק אם $[v]_B = 0$.

תרגיל 9.5. יהא V מ"ז מעל $\mathbb{F}$ ויהי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס לו. יהיו $u_1, \dots, u_k \in V$ וקטורים כלשהם וסקלרים $\alpha_i, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ הוכח

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i [u_i]_B = \left[\sum_{i=1}^k \alpha_i u_i \right]_B$$

פתרון. מספיק להראות בשני שלבים.

הראשון הוא $[u_1]_B + [u_2]_B = [u_1 + u_2]_B$.

השני הוא $\alpha [u_1]_B = [\alpha u_1]_B$.

ואז לצירוף לינארי כללי באינדוקציה.

9.6 מסקנה

א) $u_1, \dots, u_k$ בת"ל אם ורק אם $[u_1]_B, \dots, [u_k]_B$ בת"ל.

ב) $w \in \text{span} \{u_1, \dots, u_k\}$ אם ורק אם $[w]_B \in \text{span} \{[u_1]_B, \dots, [u_k]_B\}$
 המסקנה אומרת שכל בדיקה או חישוב של תלות לינארית או פרישה בכל מרחב וקטורי יכול בעצם להיעשות במרחב הווקטורי המוכר והנוח $\mathbb{F}^n$!

9.2 מטריצה מייצגת, מעבר בין בסיסים

משפט 9.7. יהיו V, W מ"ז מעל אותו שדה $\mathbb{F}$, נניח $\dim V = n, \dim W = m$ וכי B, C הם בסיסים סדורים שלהם בהתאמה. תהי $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית אזי **קיימת מטריצה יחידה** $[T]_C^B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ כך שלכל $v \in V$ מתקיים $[T]_C^B [v]_B = [Tv]_C$.

9.8 אלגוריתם (מציאת מטריצה מייצגת)

- נפעיל את ההעתקה על איברי הבסיס של התחום.
- נמצא את הקואורדינטות של תמונות איברי בסיס התחום לפי בסיס הטווח.
- נשים את וקטורי הקואורדינטות שמצאנו בעמודות ונקבל את המטריצה המייצגת.

$$[T]_C^B = \left(\begin{array}{c|ccc} | & & & \\ [Tv_1]_C & \cdots & [Tv_k]_C & \\ | & & & \end{array} \right)$$

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ נניח. נראה את החלק של הקיום.}$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} | & & & \\ [Tv_1]_C & \cdots & [Tv_n]_C & \\ | & & & \end{array} \right) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

מכפל עמודה

$$= \alpha_1 [Tv_1]_C + \dots + \alpha_n [Tv_n]_C = [\alpha_1 Tv_1 + \dots + \alpha_n Tv_n]_C$$

בגלל שזו העתקה לינארית

$$[T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n)]_C = [Tv]_C$$

□

דוגמה 9.9. נניח $V = \mathbb{R}_3[x]$, $W = \mathbb{R}_2[x]$ יחד עם העתקת הנגזרת $T(p(x)) = p'(x)$.
נניח $C = \{1, x, x^2\}$, $B = \{1, x, x^2, x^3\}$. מצאו את $[T]_C^B$.
בשלב הראשון, נמצא תמונות איברי הבסיס.

$$T(1) = 0, T(x) = 1, T(x^2) = 2x, T(x^3) = 3x^2$$

קל להציג אותן לפי הבסיס הסטנדרטי

$$[T(1)]_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, [T(x)]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, [T(x^2)]_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, [T(x^3)]_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ונכתוב בעמודות

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

הערה 9.10. מקרה פרטי של זה היא מטריצת מעבר בין בסיסים. אפשר להתבונן בהעתקת הזהות ממרחב לעצמו, יחס עם שני בסיסים B, C ונקבל

$$\forall v [I]_C^B [v]_B = [v]_C$$

כאשר עמודות המטריצה $[I]_C^B$ הן וקטורי הבסיס B בהצגה לפי C .

דוגמה 9.11. יהא $V = \mathbb{R}^2$ ושני בסיסים $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. מצאו את מטריצת המעבר, $I : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ניקח את העתקת הזהות

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_C = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_C = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

עכשיו

$$[I]_C^B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

תרגיל 9.12. תהי $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ העתקת השיקוף ביחס לציר x , כלומר

$$T(x, y) = (x, -y)$$

מצא בסיס סדור B ל- $\mathbb{R}^2$ עבורו

$$[T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

דוגמה 9.13. $V = \mathbb{R}_2[x]$, $W = \mathbb{R}^2$ ויהיו

$$B = \{-1, 2+x, 3+x+x^2\}, C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיסים מתאימים. נגדיר $T : V \rightarrow W$ העתקה לינארית לפי

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} b+c \\ a \end{pmatrix}$$

מצאו את $[T]_C^B$.

פתרון.

(1) נמצא את תמונות איברי הבסיס

$$T(-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, T(2+x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, T(3+x+x^2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(2) נציג כל אחד מהם לפי איברי הבסיס F

$$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_C = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(3) המטריצה המייצגת היא

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

שימו לב - איך מוצאים את הייצוגים $\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_C = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$?
 אנחנו בעצם מחפשים לכל וקטור בבסיס, את הייצוג של התמונה שלו לפי C . כלומר לכל b_i מחפשים סקלרים מתאימים לו

$$\alpha_1^i c_1 + \dots + \alpha_n^i c_n = T b_i$$

בדוגמה לעיל, פתרנו 3 מערכות (אחת לכל וקטור)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

נשים לב שבכולן פעולות הדירוג הן זהות, הדבר היחיד שמשתנה הוא כיצד הן משפיעות על הוקטור מימין.
 אפשר לפתור את כל המערכות במקביל, על ידי השמה של כל הוקטורים להם אנחנו מחפשים את הייצוג מצד ימין

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

בדירוג נקבל

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

עכשיו, לכל אחד מאיברי הבסיס מצאנו את המקדמים המתאימים. כלומר מצאנו בדיוק את המטריצה המייצגת!

מסקנה 9.14. אפשר למצוא מטריצה מייצגת $[T]_C^B$ באופן הבא: נדרג

$$(C|T(B)) \rightarrow \dots \rightarrow (I|[T]_C^B)$$

בסיום הדירוג, משמאל נקבל את מטריצת היחידה ומימין את המטריצה המייצגת הרצויה.
 זה נובע משיקולים שהסברנו בדוגמה לעיל.

9.3 תכונות של מטריצות מייצגות

טענה 9.15.

(א) יהיו V_1, V_2, V_3 מ"ו עם בסיסים B_1, B_2, B_3 בהתאמה. תהייה $T : V_1 \rightarrow V_2, S : V_2 \rightarrow V_3$ שתי העתקות לינאריות אזי מתקיים

$$[S \circ T]_{B_3}^{B_1} = [S]_{B_3}^{B_2} \cdot [T]_{B_2}^{B_1}$$

(ב) לכל שני בסיסים B, C למ"ו V והעתקה לינארית $T : V \rightarrow V$ מתקיים כי ההעתקה היא הפיכה אם ורק אם $[T]_C^B$ הפיכה. במקרה שההעתקה הפיכה מתקיים

$$([T]_C^B)^{-1} = [T^{-1}]_B^C$$

(ג) $[\alpha T + \beta S]_C^B = \alpha [T]_C^B + \beta [S]_C^B$ (עבור שתי העתקות עם אותו תחום וטווח).

$$[I]_{C_2}^{C_1} [T]_{C_1}^{B_1} [I]_{B_1}^{B_2} = [T]_{C_2}^{B_2} \quad (ד)$$

$$([I]_C^B)^{-1} = [I]_B^C \quad (ה)$$

הוכחה.

(א) מספיק להראות מיחידות כי לכל $v \in V_1$ מתקיים

$$[S \circ T(v)]_{B_3} = [S]_{B_3}^{B_2} \cdot [T]_{B_2}^{B_1} [v]_{B_1}$$

וקל לראות זאת מההגדרה.

(ב) דומה.

(ג) בהרצאה.

(ד) נובע מסעיף א'.

(ה) נשים לב כי $[I]_C^B \cdot [I]_B^C = [I]_C^C = I$

□

10 תרגול 10

10.1 מציאת גרעין ותמונה בעזרת מטריצה מייצגת

הגדרה 10.1. יהי V מ"ו ויהי U תמ"ו. יהי B בסיס ל- V אזי מרחב הקואורדינטות של U לפי B הינו $[U]_B := \{[u]_B : u \in U\}$.

הערה 10.2. קל לראות שהגרעין של העתקת המטריצה $Tv = Av$ הוא $N(A)$ והתמונה היא $C(A)$ (הוא צירוף לינארי של העמודות לפי כפל עמודה).

מסקנה 10.3. תהי $T : V \rightarrow W$ העתקה לינארית עם בסיסים E, F אזי מרחבי הקואורדינטות של הגרעין והתמונה הם

$$[\ker T]_E = \{[v]_E : Tv = 0\} = \{[v]_E : [Tv]_F = 0\} = \{[v]_E : [T]_F^E [v]_E = 0\} = N([T]_F^E)$$

$$[\operatorname{im} T]_F = \{[Tv]_F : v \in V\} = \{[T]_F^E [v]_E : [v]_E \in \mathbb{F}^n\} = C([T]_F^E)$$

אלגוריתם 10.4. (מציאת גרעין ותמונה של ההעתקה לפי המטריצה המייצגת)

(1) מצא מטריצה מייצגת $A = [T]_F^E$.

(2) מצא את מרחבי הקואורדינטות של הגרעין והתמונה.

(3) העבר חזרה את מרחבי הקואורדינטות לצורה הפקורית (על ידי כפל הסקלרים מהקואורדינטות באיברי הבסיס).

תרגיל 10.5. נגדיר העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^{2 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^2$ לפי

$$T(A) = C_1(A) + C_2(A) + C_3(A)$$

נגדיר את הבסיסים הסטנדרטיים $S = \{E_{ij} : 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 3\}$ ל- $\mathbb{R}^{2 \times 3}$ ואת $B = \{e_1, e_2\}$ ל- $\mathbb{R}^2$. מצא את המטריצה המייצגת $[T]_B^S$ ומצא בסיס לגרעין ולתמונה של T .

(פתרון. א)

$$T(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T(E_{12}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(E_{13}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T(E_{21}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T(E_{23}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_B^S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(ב)

$$[\ker T]_S = N \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \mathbf{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = -x_2 - x_3, x_4 = -x_5 - x_6$$

$$\begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ -x_5 - x_6 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{זה אומר שמרחב האפס הוא כל הפתרונות מהצורה}$$

$$x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[\ker T]_S = N([T]_B^S) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נכפול באיברי הבסיס

$$\ker T = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{span}$$

$$[\text{im} T]_B = C \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \text{im} T = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

תרגיל 10.6. תהי $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ העתקה לינארית המוגדרת על ידי

$$T(x, y, z) = (x + y, y + z, 2x - 2z)$$

(א) מצאו בסיס לגרעין ולתמונה של T .

(ב) מצאו בסיס סדור E ל- $\mathbb{R}^3$ כך שמתקיים $[T]_E^E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$.

פתרון.

(א) כשעובדים עם הבסיס הסטנדרטי $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ מקבלים

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{\text{מטריצה}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

נדרג

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נתחיל ממרחב האפס: x, y הם תלויים, z חופשי. אז מקבלים

$$\ker T = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{im} T = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(ב) במקרה שלנו מתקבל $\ker T \oplus \text{im} T = \mathbb{R}^3$.

נגדיר את E להיות בסיס המורכב מאיחוד הבסיסים של הגרעין והתמונה ונביט במטריצה המייצגת את ההעתקה שלו לפי בסיס זה. מכיוון שהוקטור הראשון בסיס לגרעין, התמונה שלו אפס וכך גם הקואורדינטות.

כמו כן, נביט בקואורדינטות של כל וקטור בתמונה, מכיוון שזהו סכום ישיר, יש הצגה יחידה של וקטור בתמונה לפי הבסיס שלנו E . אבל גם יש לו הצגה יחידה לפי הבסיס לתמונה (שהוא מוכל ב- E) ולכן הקואורדינטות לפי וקטור הגרעין חייבות להיות אפס, כלומר השורה הראשונה הינה שורת אפסים.

10.2 תרגילים ממבחנים

תרגיל 10.7. נביט ב- $V_1 = \mathbb{C}^2$ כמרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{C}$,

נביט ב- $V_2 = \mathbb{C}^2$ כמ"ו מעל $\mathbb{R}$.

כמו כן, נביט בקבוצה

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(א) הוכיחו כי $A \subseteq V_1$ היא תלויה לינארית

(ב) הוכיחו כי $A \subseteq V_2$ היא בלתי-תלויה לינארית

(ג) יהיו $U_2 \leq V_2, U_1 \leq V_1$ תתי מרחבים כך ש- $U_1 = U_2$, הוכיחו כי $\dim U_2 = 2 \dim U_1$.

פתרון.

(א) אם ניקח $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -(1+i)$ נקבל צירוף לינארי לא טריוויאלי שמתאפס - לכן תלויים

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ב) נניח שיש צירוף לינארי מתאפס, ננסה להראות שאין לזה פתרון ב- $\mathbb{R}$ שהוא לא טריוויאלי.

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 + i(\alpha_2) = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + i(\alpha_1) = 0 \end{cases}$$

עכשיו, אם נניח שהמספרים ממשיים אז נקבל שחייב להתקיים $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

(ג) נסתכל על הבסיס של U_1 , נסמן $\dim U_1 = n$ יחד עם הבסיס $\{u_1, \dots, u_n\}$. נבנה בסיס ל- U_2 באופן הבא, ניקח כל וקטור u_i ונבנה שני וקטורים u_i^1, u_i^2 .

$$u_j \Rightarrow u_j^1 = u_j, u_j^2 = iu_j$$

עכשיו קיבלנו את הקבוצה $\{u_1^1, u_1^2, \dots, u_n^1, u_n^2\}$, נרצה לטעון שזה בסיס ל- U_2 . צ"ל: שהיא פורשת ובת"ל.

פורשת יהי $v \in U_2$, נרצה להראות שקיימים סקלרים כך שהוא צירוף של הוקטורים. בגלל ש- $U_1 = U_2$ אזי $v \in U_1$, ובגלל ש- $\{u_1, \dots, u_n\}$ היא בסיס ל- U_1 נקבל

$$v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$$

אזי

$$v = \operatorname{Re}(\alpha_1) \cdot u_1^1 + \operatorname{Im}(\alpha_1) \cdot u_1^2 + \dots + \operatorname{Re}(\alpha_n) \cdot u_n^1 + \operatorname{Im}(\alpha_n) \cdot u_n^2$$

וזו כבר הצגה לפי U_2 עם מקדמים ממשיים.

בת"ל נניח יש צירוף לינארי של הוקטורים שמתאפס

$$\alpha_1^1 u_1^1 + \alpha_1^2 u_1^2 + \dots + \alpha_n^1 u_n^1 + \alpha_n^2 u_n^2 = 0$$

$$(\alpha_1^1 + i\alpha_1^2) u_1 + \dots + (\alpha_n^1 + i\alpha_n^2) u_n = 0$$

עכשיו, זה צירוף לינארי של U_1 שמתאפס, לכן כל אחד מהמספרים מתאפס. אבל כל אחד מהם הוא מספר מרוכב בהצגה קרטזית

$$\alpha_j^1 + i\alpha_j^2 = 0$$

זה אומר שכל הסקלרים הם אפס. כנדרש.

לכן, מצאנו בסיס מגודל $2 \dim U_1$ ל- U_2 , לכן $\dim U_2 = 2 \dim U_1$.

תרגיל 10.8. יהי V מ"ו מממד n מעל $\mathbb{R}$ ותהי $T: V \rightarrow V$ העתקה לינארית. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם קיימים בסיסים סדורים B, C של V שעבורם $[T]_C^B = 0$ אז $T^2 = 0$

(ב) קיימים בסיסים סדורים B, C של V שעבורם $[T]_C^B$ אלכסונית.

(ג) אם לכל שני בסיסים סדורים B, C של V מתקיים $[T]_C^B = 0$ אזי $T = 0$.

פתרון.

(א) הפרכה - נגדיר את ההעתקה $T(x, y) = (x, 0)$, ננסה לבחור בסיסים B, C כך ש $[T]_C^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

עכשיו המטריצה המייצגת בריבוע אכן אפס, אבל $T^2(x, y) = (x, 0)$.
(ב) נתחיל מבסיס לגרעין $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ ואז נשלים אותו לבסיס $\{v_1, \dots, v_k, \dots, v_n\}$ ועכשיו נרצה לטעון ש $Tv_1, \dots, Tv_k$ בת"ל. נניח יש צירוף לינארי מתאפס

$$\alpha_1 Tv_1 + \dots + \alpha_k Tv_k = 0$$

$$T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) = 0$$

מה זה אומר? $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \in \ker T$, אבל $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ הם בסיס לגרעין. אז נקבל

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = \alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n$$

זה בדיוק צירוף לינארי של איברי $v_1, \dots, v_n$ שמתאפס (בהעברת אגפים), לכן כל הסקלרים אפס ונקבל אי-תלות.

עכשיו, נסתכל על $\{Tv_1, \dots, Tv_k\}$ (הראינו שהם בת"ל) ונשלים אותם לבסיס $\{Tv_1, \dots, Tv_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$. עכשיו, נסתכל על $[Tv_i]_C$, איך היא נראית? אם $1 \leq i \leq k$, אז $[Tv_i]_C = e_i$.

אחרת, אם $i > k$, אז זה אומר ש $Tv_i = 0$ (כי v_i בגרעין) וזה אומר $[Tv_i]_C = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

נקבל מטריצה אלכסונית.

(ג) מסעיף ב', יש בסיסים B, C שעבורם המטריצה אלכסונית

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_k \end{pmatrix}$$

עכשיו, הנחנו כי $0 = ([T]_C^B)^2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_k^2 \end{pmatrix}$, זה אומר שכל הסקלרים אפס.

$$[T]_C^B = 0$$

ועכשיו, אם מטריצה מייצגת היא אפס אז ההעתקה היא אפס:
יהי $v \in V$ נראה כי $Tv = 0$

$$[T]_C^B [v]_B = 0 \Rightarrow [Tv]_B = 0 \Rightarrow Tv = 0$$

כנדרש.

תרגיל 10.9. שתי העתקות לינאריות S, T יקראו מתחלפות אם $TS = ST$.

באופן דומה, שתי מטריצות A, B יקראו מתחלפות אם $AB = BA$.

יהא V מ"ז מממד $n \geq 2$ ותהיינה שתי העתקות לינאריות $S, T : V \rightarrow V$ (אופרטורים)

(א) הוכיחו או הפריכו: אם S, T מתחלפות אז לכל שני בסיסים B, C של V מתקיים שהמטריצות $[T]_B^B, [S]_C^C$ מתחלפות.
 (ב) הוכיחו או הפריכו: אם לכל שני בסיסים B, C של V מתקיים שהמטריצות המייצגות $[T]_B^B, [S]_C^C$ מתחלפות אז S, T מתחלפות.
 (ג) הוכיחו: אם S, T העתקות לא הפיכות וגם לכל 4 בסיסים B, C, D, E של V מתקיים שהמטריצות המייצגות $[T]_C^B, [S]_E^D$ מתחלפות אז $T = 0$ או $S = 0$.

פתרון.

(א) הפרכה - נסתכל על $S(x, y) = T(x, y) = (2x, 3y)$ עכשיו נבחר שני בסיסים

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, [S]_C^C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

וקל לוודא שהכפל הוא שונה... למשל,

$$([T]_B^B \cdot [S]_C^C)_{11} = R_1([T]_B^B) \cdot C_1([S]_C^C) = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 6$$

$$([S]_C^C \cdot [T]_B^B)_{11} = R_1([S]_C^C) \cdot C_1([T]_B^B) = 2 \cdot 3 - 1 \cdot -1 = 7$$

(ב) הוכחה - אם נבחר $B = C$, נקבל כי $[T]_B^B, [S]_B^B$ הן מתחלפות.

$$[T \circ S]_B^B = [T]_B^B \cdot [S]_B^B = [S]_B^B \cdot [T]_B^B = [S \circ T]_B^B$$

קיבלנו $[T \circ S]_B^B = [S \circ T]_B^B$, עכשיו נטען שזה אומר $TS = ST$, כלומר שהן מתחלפות. יהי $v \in V$ נרצה להראות $TSv = STv$, מספיק להראות $[TSv]_B = [STv]_B$ ואכן

$$[TS]_B^B[v]_B = [ST]_B^B[v]_B$$

כנדרש.

(ג) קודם כל, ההעתקה לא הפיכה ולכן לא הגרעין לא טריוויאלי.

נניח בשלילה שהגרעין טריוויאלי אזי $\dim \ker T = 0$ וממשפט הדרגה $\dim \operatorname{im} T = \dim V$, כלומר T על (מהכלה ושיוויון מימדים)

וגם היא חח"ע כי הגרעין טריוויאלי, לכן הפיכה בסתירה.

אז יש $0 \neq v_1, v_2 \in V$ כך ש $Tv_1 = 0, Sv_2 = 0$.

נניח בשלילה $T, S \neq 0$: קיימות $w_1, w_2 \in V$ כך שמתקיים $Tw_1 \neq 0, Tw_2 \neq 0$.

ניקח את הקבוצה $\{v_1, w_1\}$ ונשלים אותה לבסיס B , למה אפשר? הן בת"ל (כי אם הן היו כפל בסקלר אחת של השנייה שתיהן היו נשלחות לאפס וזו סתירה). ניקח את הקבוצה $\{Tw_1\}$ ונשלים אותה לבסיס C .

עכשיו

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

עכשיו ננסה לבנות D, E שיגרמו לכך שהכפל לא יתחלף.

ניקח את הקבוצה $\{w_2, v_2\}$ ונשלים אותה לבסיס D . ונגדיר את E להיות השלמה לבסיס של $\{Tw_2\}$ (כאשר שמים את Tw_2 להיות הוקטור השני בבסיס הסדור, אפשר לעשות את זה כי המימד הוא לפחות 2).

$$[S]_E^D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * \\ 1 & 0 & * & * \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

מכפל לפי עמודה

$$C_1 \left([T]_C^B \cdot [S]_E^D \right) = [T]_C^B \cdot C_1 \left([S]_E^D \right) = [T]_C^B \cdot e_2 = C_2 \left([T]_C^B \right) = e_1$$

$$C_1 \left([S]_E^D \cdot [T]_C^B \right) = [S]_E^D \cdot C_1 \left([T]_C^B \right) = [S]_E^D \cdot 0 = 0$$

וקיבלנו סתירה.

תרגיל 10.10. יהא V מ"ו ויהיו $v_1, \dots, v_n \in V$ בת"ל, נסמן Q את קבוצת כל הוקטורים $v \in V$ המקיימים כי $v_1 + v, \dots, v_n + v$ בת"ל.

(א) הוכיחו או הפריכו: Q הוא תת-מרחב של V .

(ב) הוכיחו או הפריכו: מתקיים כי $Q \subseteq \text{span} \{v_1, \dots, v_n\}$.

(ג) הוכיחו או הפריכו: מתקיים כי $Q = \{\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i : \sum_{i=1}^n \alpha_i = -1\}$.

פתרון.

(א) הפרכה - נשים לב ש $Q \neq 0$, כי הוספה של 0 לכל הוקטורים משאירה אותם כמו שהם בת"ל.

(ב) הוכחה - יהי $v \in Q$, מההנחה $v_1 + v, \dots, v_n + v$ הם בת"ל. מה זה אומר? קיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (שלפחות אחד שונה מאפס) כך שמתקיים

$$\alpha_1 (v_1 + v) + \dots + \alpha_n (v_n + v) = 0$$

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = -(\alpha_1 + \dots + \alpha_n) v$$

לא ייתכן $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0$, כי אז היינו מקבלים צירוף לינארי לא טריוויאלי של $v_1, \dots, v_n$ שמתאפס.

אז אפשר לחלק בסכום

$$v = -\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} v_1 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} v_n$$

וזה צירוף לינארי של הוקטורים

$$v \in \text{span} \{v_1, \dots, v_n\}$$

(ג) הוכחה - כשכתבנו את הייצוג (היחיד) של v לפי איברי $v_1, \dots, v_n$ קיבלנו שסכומם

$$-\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} = -\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} = -1$$

תרגיל 10.11. יהי V מ"ו נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T : V \rightarrow V$ העתקה לינארית כך שמתקיים $\ker T \cap \text{im} T \neq \{0\}$.

(א) הוכיחו: אם $U, W \leq V$ תתי-מרחבים כך שמתקיים $\dim U = 1$ וגם $U \cap W \neq \{0\}$ אז $U \subseteq W$.

(ב) הוכיחו או הפריכו: אם $\dim V = 3$ אזי $\ker T \subseteq \text{im} T$ או $\text{im} T \subseteq \ker T$.

(ג) הוכיחו או הפריכו: אם $\dim V = 4$ אזי $\ker T \subseteq \text{im} T$ או $\text{im} T \subseteq \ker T$.

פתרון.

(א) בגלל ש $U \cap W \neq \{0\}$, יש $v \neq 0$ שנמצא ב $U \cap W$. בפרט הוא ב U .
 עכשיו, $\{v\}$ היא בת"ל והיא מגודל המימד של U , לכן היא פורשת אותו (שלישי חינם)
 $U = \text{span}\{v\}$.
 עכשיו, נרצה לטעון ש $U \subseteq W$. נשים לב שכל $u \in U$ הוא מהצורה $u = \alpha v$, בגלל ש $v \in U \cap W$
 וראינו כבר $U \cap W$ הוא תמ",
 מסגירות לכפל בסקלר גם $u = \alpha v \in U \cap W$ בפרט ב W .
 (ב) הוכחה - ממשפט הדרגה

$$\dim \text{im} T + \dim \ker T = 3$$

מה האפשרויות למימדים של הגרעין והתמונה? $(1, 2)$, $(0, 3)$ (עד כדי החלפה).
 נשים לב שהמצב שבו אחד מהם הוא ממימד 0 לא אפשרי, כי אז הוא היה בדיוק $\{0\}$
 ואז החיתוך היה בדיוק אפס.
 מסקנה - או הגרעין או התמונה הם ממימד בדיוק 1 (והשני 2).
 עכשיו, גם הגרעין וגם התמונה תתי-מרחבים, אנחנו יודעים שהחיתוך שלהם לא אפס
 ושאוחד מהם ממימד 1,
 מסעיף קודם - זה שהוא ממימד 1 מוכל בשני, כלומר או שהגרעין בתמונה או שהתמונה
 בגרעין.

(ג) הפרכה - נסתכל על ההעתקה $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ המוגדרת לפי

$$Te_1 = 0, Te_2 = e_1, Te_3 = 0, Te_4 = e_4$$

$$\ker T = \text{span}\{e_1, e_3\}, \text{im} T = \text{span}\{e_1, e_4\}$$

ואין הכלה בשני הכיוונים...

תרגיל 10.12. יהיו V, W מ"ו נוצרים סופית מעל שדה $\mathbb{F}$, תהי $T : V \rightarrow W$ העתקה לינארית.
 (א) תהי $S : W \rightarrow V$ העתקה לינארית המקיימת $TST = T$. הוכיחו כי מתקיים $\ker S \cap \text{im} T = \{0_W\}$.
 (ב) הוכיחו כי קיימת העתקה לינארית $S : W \rightarrow V$ שעבורה $TST = T$.

פתרון.

(א) קודם כל, $\ker S, 0_W \in \text{im} T$ ולכן הוא בחיתוך. $\{0_W\} \subseteq \ker S \cap \text{im} T$.
 בכיוון השני: יהי $v \in \ker S \cap \text{im} T$, לכן

$$Sv = 0, \exists u Tu = v$$

עכשיו נציב

$$S(Tu) = 0_V$$

נפעיל T על שני האגפים

$$T(S(T(u))) = T(0_V) = 0_W$$

מהנתון

$$T(u) = TST(u) = 0_W$$

קיבלנו $Tu = 0_W$, אבל $Tu = v$ לכן $v = 0_W$, כנדרש.
 (ב) נתחיל מבסיס לגרעין של T , $\{s_1, \dots, s_k\}$.
 נשלים אותו לבסיס כללי $\{s_1, \dots, s_k, s_{k+1}, \dots, s_n\}$.
 עכשיו $Ts_{k+1}, \dots, Ts_n$ הם בת"ל (ראינו בתרגיל קודמים).
 נגדיר

$$S(Ts_{k+1}) = s_{k+1}, \dots, S(Ts_n) = s_n$$

נשלם אותם לבסיס, ונשלח את כל השאר לאפס. לפי ממשפט ההגדרה זה מגדיר העתקה.
עכשיו נקבל

$$\forall_{j \geq k+1} TST(s_j) = TS(Ts_j) = T(s_j)$$

$$\forall_{j \leq k} TST(s_j) = TS(0_W) = T(0_V) = 0_W = T(s_j)$$

הוכחנו שההעתקות מסכימות על איברי הבסיס, לכן הן שוות (מיחידות במשפט ההגדרה).

בהצלחה רבה!