תרגיל בית 8 בהסתברות וסטטיסטיקה מתמטית
88-373 סמסטר ב' תשפ"א

מרטינגלים

תרגיל 1. יהי $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ הילוך מקרי סימטרי על $\mathbb{Z}$ (כלומר $S_0 = 0$, $X_i = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \end{cases}$).

א. האם S_n^3 הוא מרטינגל? תת-מרטינגל? על-מרטינגל?

ב. תקנו את S_n^3 כך שיהיה מרטינגל על ידי הוספת גורמים קטנים יותר.

תרגיל 2. יהי S_n הילוך מקרי סימטרי על $\mathbb{Z}$, ותהי $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ פונקציה.

א. אילו תנאים h צריכה לקיים כך ש-$h(S_n)$ יהיה מרטינגל?

ב. הראו שהפונקציות היחידות המקיימות את התנאים שרשמתם הן הפונקציות הלינאריות $h(x) = ax + b$.
(הדרכה: אם $h(0) = b$ ו-$h(1) = a + b$, תראו שזה קובע את h)

תרגיל 3. ראינו בתרגול את הדוגמה של הכד של פוליה. הכלילו את הדוגמה למקרה שבו ההסתברויות ההתחלתיות לא זהות: נניח שבתחילה יש a כדורים כתומים ו-b ירוקים, ובכל צעד שולפים כדור אחד ומחזירים את אותו הכדור עם עוד כדור מאותו הצבע. איך ייראה המרטינגל הפעם?

תרגיל 4. יהיו $X_1, X_2, \ldots$ ממבתש"ה שהפונקציה יוצרת המומנטים שלהם $M_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right]$ סופית לאיזשהו $t \neq 0$. נגדיר

$$Z_n = Z_n(t) = \prod_{j=1}^{n} \frac{e^{tX_j}}{M_X(t)} = \frac{e^{tS_n}}{M_X(t)^n}.$$

הראו שזהו מרטינגל ביחס לפילטרציה הטבעית של $X_1, X_2, \ldots$. הוא נקרא גם **מרטינגל יחס הנראות** של $X_1, X_2, \ldots$.

תרגיל 5. הוכיחו את הטענה שהשתמשנו בה בתרגול: אם $\{X_n\}$ מרטינגל ביחס לפילטרציה $\{\mathcal{F}_n\}$, אז לכל $k \geq 0$ מתקיים $\mathbb{E}\left[X_{n+k} \mid \mathcal{F}_n\right] = X_n$. (אפשר לנסח טענות דומות עבור על-מרטינגלים ועבור תת-מרטינגלים)

תרגיל 6. יהי $\{X_n\}$ מרטינגל ביחס לפילטרציה $\{\mathcal{F}_n\}$. נניח שהפונקציות יוצרות המומנטים של כל X_n מוגדרות על כל $\mathbb{R}$. מה תוכלו להגיד על הקשר ביניהן?

בהצלחה!