

קומבינטוריקה להנדסה - תרגול 7 תשפ"א

3 בדצמבר 2020

תרגילים:

1. כמה מספרים בני 4 ספרות ניתן להרכיב מ- $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ שמופיעה בהם הסיפרה 3? פתרון: פתרון כמו לבחור את מיקום הסיפרה 3 ואח"כ 5^3 לא קביל, כי כאשר יש פעמיים 3 - איזו מהם היא זו שנבחרה לפי המיקום ואיזו אח"כ? פתרון נכון: נספור כמה מספרים באופן כללי יש. כלומר, נסמן את קבוצת המספרים בני 4 ספרות מ- $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ ב- A . ואח"כ נספור כמה מספרים ללא הסיפרה 3 יש. כלומר, נסמן ב- B את קבוצת המספרים בני 4 ספרות מ- $\{1, 5, 7, 9\}$. ברור ש- $B \subset A$. אנחנו מחפשים את $|A \setminus B|$, ונוכל להשתמש בתרגיל שראינו שבמצב כזה מתקיים: $|A \setminus B| = |A| - |B|$. אז נקבל: בקבוצה A יש את כל המספרים בני ארבע ספרות מ-5 ספרות. זה כמו לבחור 4 ספרות מתוך 5 עם חזרה (כי במספר מותר לחזור על ספרה פעמיים) ועם חשיבות לסדר (כי יש הבדל בין מיקום האלפים, מאות עשרות ואחדות) ולכן: $|A| = 5^4$. בקבוצה B בדומה יש בחירה של 4 ספרות מתוך 4 שוב, עם חזרה וחשיבות לסדר ולכן נקבל: $|B| = 4^4$. בסה"כ התשובה היא:

$$5^4 - 4^4 = 369$$

2.

(א) כמה סדרות עולות חלש עם שלושה איברים יש מ- $[10]$. כלומר, $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq 10$. פתרון: נבחר שלושה איברים מתוך $[10]$ עם חזרה (כי מותר לחזור על איבר פעמיים בסדרה) בלי חשיבות לסדר (כי אין הבדל בין סדרים שונים - אחרי שבחרנו את האיברים יש רק סדר אחד קביל) נקבל $\binom{12}{3} = \binom{12}{9} = \binom{3+10-1}{3}$ (אני מניח שראיתם $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$).

(ב) מה יקרה אם נדרוש הפרש של לפחות 2 בין כל שני איברים? כלומר $a_{i+1} - a_i \geq 2$.

בדרך אחרת: נסמן:

$$x_1 = a_1 - 1$$

$$x_2 = a_2 - a_1$$

$$x_3 = a_3 - a_2$$

$$x_4 = 10 - a_3$$

נקבל:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$$

ולפי הגדרות הסדרה נקבל $x_1 \geq 0, x_2 \geq 2, x_3 \geq 2, x_4 \geq 0$. (ראיתם בהרצאה) שמספר פתרונות משוואה בטבעיים $\sum_{i=1}^n x_i = k$ הוא $\binom{k+n-1}{k}$. הסבר קצר: יש לנו k אחדות לפזר בין 4 משתנים, אז זו בחירה של k משתנים (9 בסיפור שלנו) מתוך n (4 בסיפור שלנו) עם חזרה (מספר החזרות אומר בעצם לכמה שווה כל משתנה) וללא חשיבות לסדר, כי לא משנה מתי בחרתי את המשתנה, העיקר כמה פעמים בחרתי אותו. ולכן משתמשים בנוסחא של עם חזרה ללא סדר. כדי להגיע לכך שהמשתנים טבעיים נוריד מ-2 $y_2 = x_2 - 2, y_3 = x_3 - 2$ מכל אחד, וכן 4 מאגף ימין ונקבל את המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$ כאשר כולם טבעיים, ואז הפתרון הוא $\binom{8}{5} = \binom{5+4-1}{5}$.