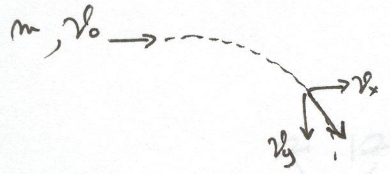
(I)

פיסיקה קלאסית 1 - תרגיל 4

(1) נסתכל על המקרה הכללי:



מינוס לכיוון ההתקדמות:

$$\vec{f} = -\beta \vec{v}$$

$$f_x = -\beta v_x$$

$$f_y = -\beta v_y$$

נרשום את שקולי הכוחות:

$$\sum F_y = mg - \beta v_y = m a_y \qquad (i)$$

(כיוון חיובי עם התנועה)

$$\sum F_x = -\beta v_x = m a_x \qquad (ii)$$

נסתכל על המשוואה (i)

$$mg - \beta v = m a$$

$$g - \frac{\beta}{m} v = a = \frac{dv}{dt}$$

הפרדת משתנים

$$\frac{1}{g - \frac{\beta}{m} v} dv = dt$$

אינטגרציה על שני האגפים

$$\int_{v_1}^{v_2} \frac{1}{g - \frac{\beta}{m} v} dv = \int_{t_1}^{t_2} dt$$

$$-\frac{m}{\beta} \ln\left(g - \frac{\beta}{m} v\right)\Big|_{v_1=0}^{v_2=v_y} = t\Big|_{t_1=0}^{t_2=t}$$

$$-\frac{m}{\beta} \ln\left(\frac{g - \frac{\beta}{m} v_y}{g - 0}\right) = t - 0$$

$$\ln\left(1 - \frac{\beta}{mg} v_y\right) = -\frac{\beta}{m} t$$

$$1 - \frac{\beta}{mg} v_y = e^{-\frac{\beta}{m} t}$$

$$\frac{mg}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{m} t}\right) = v_y = \frac{d}{dt} y$$

הפרדת משתנים:

$$\frac{mg}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{m} t}\right) dt = dy$$

אינטגרציה

$$\frac{mg}{\beta} \int_{t_1}^{t_2} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{m} t}\right) dt = \int_{y_1}^{y_2} dy$$

$$\frac{mg}{\beta}\left(t + \frac{m}{\beta} e^{-\frac{\beta}{m} t}\right)\Big|_{t_1=0}^{t_2=t} = y\Big|_{y_1=h}^{y_2=y}$$

$$\frac{mg}{\beta}\left(t + \frac{m}{\beta} e^{-\frac{\beta}{m} t} - 0 - \frac{m}{\beta}\right) = y - h$$

$$\boxed{h + \frac{mg}{\beta} t - \frac{g m^2}{\beta^2}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{m} t}\right) = y(t)}$$

בצורה דומה נסתכל על משוואה (ii)

$$-\beta v_x = m a_x = m \frac{d}{dt} v_x$$

הפרדת משתנים

$$-\frac{\beta}{m} dt = \frac{1}{v_x} dv_x$$

אינטגרציה

$$-\frac{\beta}{m} \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{v_1}^{v_2} \frac{1}{v_x} dv_x$$

$$-\frac{\beta}{m} t\Big|_{t_1=0}^{t_2=t} = \ln v\Big|_{v_1=v_0}^{v_2=v_x}$$

$$-\frac{\beta}{m}(t - 0) = \ln \frac{v_x}{v_0}$$

$$e^{-\frac{\beta}{m} t} = \frac{v_x}{v_0} \rightarrow v_0 e^{-\frac{\beta}{m} t} = v_x(t) = \frac{d}{dt} x$$

הפרדת משתנים

$$v_0 e^{-\frac{\beta}{m} t} dt = dx$$

אינטגרציה

$$v_0 \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{\beta}{m} t} dt = \int_{x_1}^{x_2} dx$$

$$-\frac{m}{\beta} v_0 e^{-\frac{\beta}{m} t}\Big|_{t_1=0}^{t_2=t} = x\Big|_{x_1=0}^{x_2=x}$$

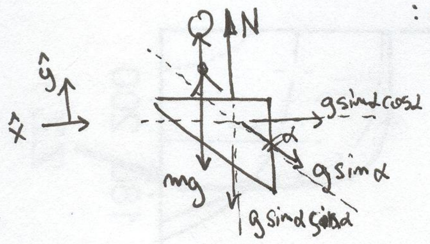
$$-\frac{m}{\beta} v_0 \left(e^{-\frac{\beta}{m} t} - 1\right) = x - 0$$

$$\boxed{\frac{m}{\beta} v_0 \left(1 - e^{-\frac{\beta}{m} t}\right) = x(t)}$$

(II)

(2) א. מאחר והתחנית מחליקה על המדרון ללא חיכוך, הרי שהתאוצה שלה במקביל למישור היא $g\sin\alpha$.

אם כך אפשר לרשום את הנורמל לתחנית מהאדם שמפעיל הוא :



ושקול הכוחות בכיוון y.

$$\Sigma F_y = N - mg = -mg\sin^2\alpha$$

$$\boxed{N = mg(1-\sin^2\alpha) = mg\cos^2\alpha}$$

ב. מקדם החיכוך קשור לכח החיכוך ע"י

$$f \leq \mu N$$

מאחר והכח שגורם לאדם להתקדם ימינה (בכיוון $\hat{x}$) הוא כוח החיכוך

$$\Sigma F_x = f = mg\sin\alpha\cos\alpha$$

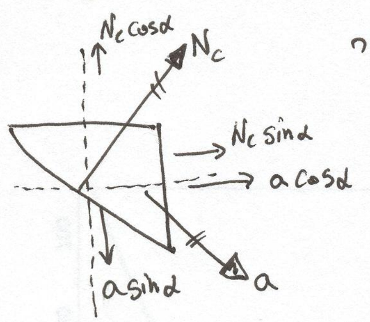
$$\rightarrow mg\sin\alpha\cos\alpha \leq \mu N$$

$$\cancel{mg}\sin\alpha\cancel{\cos\alpha} \leq \mu \cancel{mg}\cos^{\cancel{2}}\alpha \quad \text{מסעיף קודם}$$

$$\sin\alpha \leq \mu\cos\alpha \longrightarrow \mu \geq \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \longrightarrow \boxed{\underset{\text{מזערי}}{\mu} = \tan\alpha}$$

ג. אם אין חיכוך הרי שהאדם והתחנית נעים לא באותה תאוצה בציר $\hat{x}$, אך באותה תאוצה בציר $\hat{y}$.

עתה נצטרך להסתכל על התחנית ועל הנורמל שלה על המישור



מאחר ובציר y התחנית נעה כמו האדם :

$$(i)\quad \Sigma F_y = N_c\cos\alpha - (m+M)g = (m+M)(-a\sin\alpha)$$

מסת אדם $= m$

מסת תחנית $= M$

תאוצת תחנית $= a$

אך בציר $\hat{x}$ הם אינם נעים יחד ולכן

$$(ii)\quad \Sigma F_x = N_c\sin\alpha = Ma\cos\alpha \rightarrow N_c = Ma\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

נציב (ii) ב-(i) ונקבל :

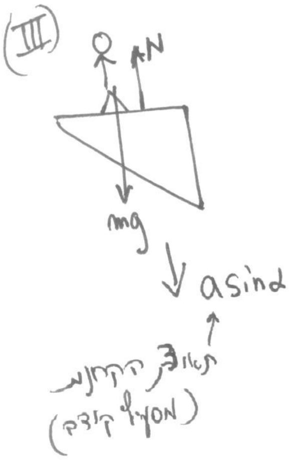
$$N_c\cos\alpha - g(m+M) = -a\sin\alpha(m+M)$$

$$Ma\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cos\alpha + a\sin\alpha(m+M) = g(m+M)$$

$$a\left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(M\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\, m + \sin^2\alpha\, M\right) = g(m+M)$$

$$a\left(M + m\sin^2\alpha\right) = g\sin\alpha(m+M)$$

$$\boxed{a = g\sin\alpha\frac{m+M}{m\sin^2\alpha + M}} \geq g\sin\alpha$$



3. עתה ננצל את העובדה שהאדם מאיץ לכיוון y כמו הקרונית ולכן:

$$\sum F_y = N - mg = -a\sin\alpha\, m$$

נציב את a מסעיף קודם

$$N = mg - m\sin\alpha\, g\sin\alpha \frac{m+M}{m\sin^2\alpha + M} = mg\left(1 - \frac{\sin^2\alpha\,(m+M)}{m\sin^2\alpha + M}\right) =$$

$$= mg\,\frac{\cancel{m\sin^2\alpha} + M - \cancel{\sin^2\alpha\, m} - \sin^2\alpha\, M}{m\sin^2\alpha + M} = \boxed{mg\left(\frac{M\cos^2\alpha}{M + m\sin^2\alpha}\right)}$$

(IV)

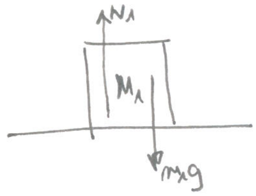
3) ראשית ניתן לצפות שלושה שלבים: שלב א' - כוח מופעל אך אין תנועה.

שלב ב' - כוח מופעל והמסות נעות יחד (תאוצה מרבית נקבעת על ידי כוח החיכוך המירבי בין הקופסא והתיבה)

שלב ג' - כוח מופעל והתיבה נע יחסית לקופסא.

נרשום את שקולי הכוחות עבור השלבים השונים

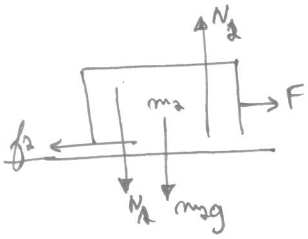
שלב א'



$$\Sigma F_y = N_1 - m_1 g = 0$$

$$N_1 = m_1 g$$

$\Sigma F_x = 0$ אין תנועה.



$$\Sigma F_y = N_2 - N_1 - m_2 g = 0$$

$$N_2 = N_1 + m_2 g = m_1 g + m_2 g = g(m_1 + m_2)$$

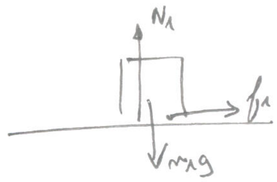
$$\Sigma F_x = F - f_2 = 0$$

$$F - \mu_s N_2 = 0$$

$$F - \mu_s g(m_1 + m_2) = 0$$

$$\text{(i)} \quad bt - \mu_s g(m_1 + m_2) = 0$$

שלב ב'



$$\Sigma F_y = N_1 - m_1 g = 0$$

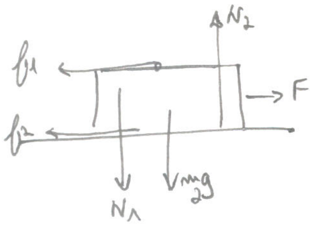
$$N_1 = m_1 g$$

$$\Sigma F_x = f_1 = m_1 a$$

המשמעות: בציר x ניתן לצפות כי קיים ערך מרבי עבור כוח החיכוך. לכן קיימת תאוצה מרבית לפני שהקופסא תנוע עם התיבה (לפני שתחליק)

$$f_{1max} = \mu_s N_1 = \mu_s g m_1 = m_1 a_{max}$$

$$\mu_s g = a_{max}.$$



$$\Sigma F_y = N_2 - N_1 - m_2 g = 0$$

$$N_2 = N_1 + m_2 g = m_1 g + m_2 g = g(m_1 + m_2)$$

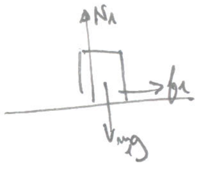
$$\Sigma F_x = F - f_1 - f_2 = m_2 a$$

$$F - m_1 a - \mu_k N_2 = m_2 a$$

$$F - m_1 a - \mu_k g(m_1 + m_2) = m_2 a$$

$$\text{(ii)} \quad bt - \mu_k g(m_1 + m_2) = a(m_1 + m_2)$$

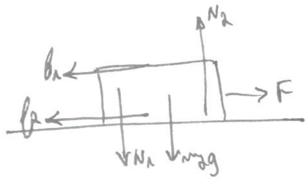
שלב ג'



$$\Sigma F_y = N_1 - m_1 g = 0$$

$$N_1 = m_1 g$$

$$\Sigma F_x = f_1 = \mu_k N_1 = \mu_k m_1 g = m_1 a$$



$$\Sigma F_y = N_2 - N_1 - m_2 g = 0$$

$$N_2 = m_2 g + N_1 = g(m_1 + m_2)$$

$$\Sigma F_x = F - f_1 - f_2 = m_2 a$$

$$F - \mu_k N_1 - \mu_k N_2 = m_2 a \rightarrow F - \mu_k g m_1 - \mu_k g(m_1 + m_2) = m_2 a$$

$$\text{(iii)} \quad bt - \mu_k g(2m_1 + m_2) = m_2 a$$

(II)

א. כדי למצוא את הזמן שבו תתחיל הקופסא להחליק אני צריך לקחת את שלב ב' ולמצוא מתי מגיע התנגדה שלו. צריך להציב במשוואה (ii) את התאוצה המירבית $a_{max}=\mu_s g$

$$bt_1-\mu_k g(m_1+m_2)=a_{max}(m_1+m_2)$$

$$bt_1=\mu_s g(m_1+m_2)+\mu_k g(m_1+m_2)=g(\mu_s+\mu_k)(m_1+m_2)$$

$$\boxed{t_1=\frac{g}{b}(\mu_s+\mu_k)(m_1+m_2)=\frac{9.8}{2}(0.3+0.2)(\overset{10}{2+8})=\frac{9.8}{2}(0.5)\cdot 10=(4.9)5=24.5\,sec}$$

ב. כאשר מציגים את התאוצות לפני כן: התאוצה לפני t_1 הינה (משוואה ii)

$$\boxed{\frac{b}{m_1+m_2}\cdot t-\mu_k g=a}$$

התאוצה אחרי t_1 הינה (משוואה iii)

$$\boxed{\frac{b}{m_2}t-\frac{\mu_k g}{m_2}(2m_1+m_2)=a}$$

ג. כדי למצוא את מהירות הגופים ב-$t=20$. יש לבדוק באיזה שלב אנו נמצאים — שלב ב', לפי סעיף א. משוואה (ii) ניתן לבחור את הזמן שבו הגופים יתחילו להחליק.

$$bt-\mu_s g(m_1+m_2)=0$$

$$\boxed{t=\frac{\mu_s g}{b}(m_1+m_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}(9.8)(\overset{10}{2+8})=\frac{3}{2}(9.8)=14.7\,sec}$$

הגופים יתחילו להחליק בשניה ה-14.7.

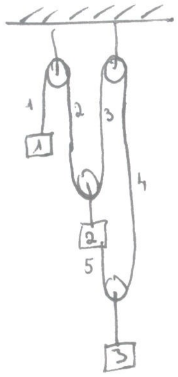
עכשיו כדי למצוא את מהירותם (מאחר והם נעים יחד) צריך לבצע אינטגרציה על התאוצה בשלב ב' מ-14.7s ל-20sec.

$$\boxed{v=\int a\,dt=\int_{14.7}^{20}\left(\frac{b}{m_1+m_2}\cdot t-\mu_k g\right)dt=\frac{b}{m_1+m_2}\cdot\frac{1}{2}t^2\Big|_{14.7}^{20}-\mu_k g\,t\Big|_{14.7}^{20}=\frac{2}{(2+8)}\cdot\frac{1}{2}(20^2-14.7^2)-\frac{2}{10}(9.8)(20-14.7)=}$$

$$=\frac{1}{10}(183.91)-\frac{1}{5}(9.8)(5.3)=18.391-10.388=8.003\,\frac{m}{s}$$

VI

(4) ג) נסתכל על המערכת ונגדיר את המקטעים השונים:



מתוך הגדרת המקטעים נוכל לרשום את החוט כאוסף של קטעים ולגזור מכך את התאוצות של חלקים השונים

$$L_1+L_2+L_3+L_4+L_5=Const$$

$a=\ddot{L}$ ↓

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$$

מתוך השרטוט ברור כי המקטעים 2 ו-3 משתנים בצורה זהה

$a_1+2a_2+a_4+a_5=0 \quad \leftarrow \quad a_2=a_3$

כמו כן ניתן לראות כי

$a_1+2a_2+a_4+(a_4-a_2)=0 \quad \leftarrow \quad a_2+a_5=a_4$

$(L_2+L_5=L_4)$

$$\boxed{a_1+a_2+2a_4=0}$$

$a_4=-\frac{1}{2}(a_1+a_2)$

נסתכל עתה על שקולי הכוחות:

m_1: $T_1-m_1g=m_1a_1 \rightarrow a_1=\frac{T_1}{m_1}-g$

m_2: $T_2+T_3-T_5-m_2g=m_2a_2$

$T_2=T_3=T_5=T_1$

$T_1+\cancel{T_1}-\cancel{T_1}-m_2g=m_2a_2 \rightarrow a_2=\frac{T_1}{m_2}-g$

m_3: $T_5+T_4-m_3g=m_3a_4$

$T_5=T_4=T_1$

$2T_1-m_3g=m_3a_4 \Longrightarrow 2T_1-m_3g=m_3\left(-\frac{1}{2}\right)(a_1+a_2)$

$2T_1-m_3g=-\frac{1}{2}m_3\left(\frac{T_1}{m_1}-g+\frac{T_1}{m_2}-g\right)$

$2T_1=m_3\left(g-\frac{1}{2}\frac{T_1}{m_1}+\frac{1}{2}g-\frac{1}{2}\frac{T_1}{m_2}+\frac{1}{2}g\right)$

$T_1\left(2+\frac{1}{2}\frac{m_3}{m_1}+\frac{1}{2}\frac{m_3}{m_2}\right)=m_3g\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=2m_3g$

$\checkmark$ $Newton=\frac{kg\,kg\,kg\cdot\frac{m}{s^2}}{kg\,kg}$ בדיקת יחידות

$$\boxed{T_1=\frac{2m_3g}{2+\frac{m_3}{2m_1}+\frac{m_3}{2m_2}}=\frac{4m_2m_1m_3g}{4m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3}}$$

(VII)

ב. אם $m_1=m_2=m$ וכל המסות נעות במהירות קבועה הרי שכל התאוצות מתאפסות ולכן:

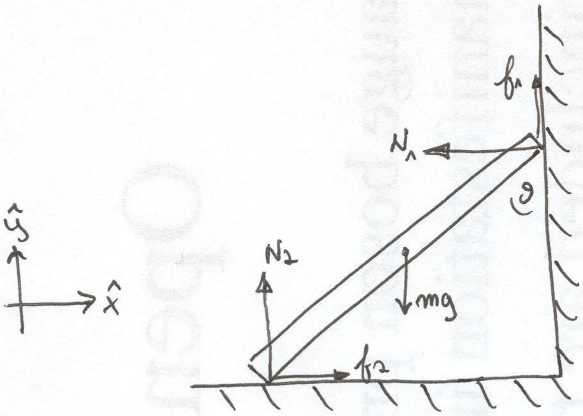
$m_1:\ T-mg=0 \longrightarrow \boxed{T_1=mg}$ (בדיקת יחידות $\checkmark\ T=kg\frac{m}{s^2}=Newton$)

$m_2:\ T-mg=0$

$m_3:\ 2T-m_3g=0 \rightarrow m_3g=2T_1=2mg$

$\boxed{m_3=2m}$ (בדיקת יחידות $\checkmark\ m=kg$)

(5) נסתכל על הכוחות בבעיה:



הערה: כוח החיכוך f_2 פונה ימינה כי עליו להתנגד לכוח N_1.

$$\sum F_y = f_1+N_2-mg=0$$

$$\rightarrow N_2=mg-f_1=mg-\mu N_1$$

$$\sum F_x = f_2-N_1=0$$

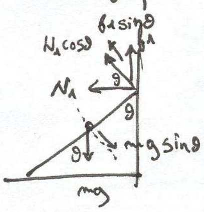
$$N_1=f_2=\mu N_2$$

$$N_1=\mu(mg-\mu N_1)$$

$$N_1(1+\mu^2)=\mu mg$$

$$\boxed{N_1=\frac{\mu}{1+\mu^2}mg}$$

עתה נסתכל על מומנט הכח ביחס לנקודת המגע של הרצפה



אם נגדיר את אורך הסולם בתור L, אז מרכז המסה יהיה במרחק $\frac{1}{2}L$

$$\sum \tau = \frac{1}{2}L(-mg\sin\theta)+L(N_1\cos\theta+f_1\sin\theta)=0$$

$$\frac{1}{2}\cancel{L}mg\sin\theta=\cancel{L}(N_1\cos\theta+\mu N_1\sin\theta)$$

$$\frac{1}{2}\cancel{mg}\sin\theta=N_1(\cos\theta+\mu\sin\theta)=\frac{\mu}{1+\mu^2}mg(\cos\theta+\mu\sin\theta)$$

$$\sin\theta=\frac{2\mu}{1+\mu^2}(\cos\theta+\mu\sin\theta)$$

$$\tan\theta=\frac{2\mu}{1+\mu^2}(1+\mu\tan\theta)$$

$$\tan\theta\left(\frac{1+\mu^2-2\mu^2}{1+\mu^2}\right)=\tan\theta\left(1-\frac{2\mu^2}{1+\mu^2}\right)=\frac{2\mu}{1+\mu^2}$$

$$\boxed{\tan\theta=\frac{2\mu}{1-\mu^2}}$$

- בדיקת יחידות: חסר יחידות ✓
- בדיקת מקרה קיצון: $\mu=0 \rightarrow \theta=0$ ✓

(6) א. נתון:

$$\vec{r}=3t^2-6t,\ -4t^3,\ 3t+2$$

$$\vec{v}=6t,\ -12t^2,\ 3$$

$$\vec{a}=6,\ -24t,\ 0$$

$$\boxed{\vec{F}=m\vec{a}=6(6,-24t,0)=(36,-144t,0)}$$

ב.

$$\tau=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ 3t^2-6t & -4t^3 & 3t+2\\ 36 & -144t & 0\end{vmatrix}=\begin{matrix}\hat{x} & \cancel{0}+144t(3t+2)\\ -\hat{y} & \cancel{0}-36(3t+2)\\ \hat{z} & -(3t^2-6t)144t+36\cdot 4t^3\end{matrix}=\begin{matrix}\hat{x} & 432t^2+288\\ \hat{y} & 108t+72\\ \hat{z} & -288t^3+864t\end{matrix}$$

ד.

$$\vec{P}=m\vec{v}$$

$$\vec{p}=6(6t,-12t^2,3)=(36t,-72t^2,18)$$

ג.

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d}{dt}(36t,-72t^2,18)=(36,-144t,0)}$$

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$$