

תרגיל 8

1. א. הוכיחו כי אם $R \subseteq S$ אזי גם $R \circ T \subseteq S \circ T$ עבור R, S, T יחסים כלשהם על קבוצה A .
 ב. הוכיחו כי יחס R טרנזיטיבי אם $R^2 \subseteq R$.
 ג. הוכיחו כי אם R טרנזיטיבי אזי R^n טרנזיטיבי לכל n .

2. הגדרה: תת קבוצה A של המספרים הממשיים נקראת 'מגניבה' אם לכל $x, y \in A$ כך ש- x שונה מ- y מתקיים שההפרש $x - y$ אינו רציונאלי. תהי B קבוצה מגניבה מקסימלית ביחס להכלה, הוכח שלכל מספר ממשי שאינו שייך ל- B קיים איבר ב- B כך שההפרש ביניהם הוא רציונאלי.

3. תהי A קבוצה, ו- $A_1, A_2, \dots, A_n$ אוסף של תתי קבוצות שלה (כלומר, $\forall 1 \leq i \leq n : A_i \subseteq A$). נגדיר על A יחס $R \subseteq A \times A$ ע"י:

$$R = \{(x, y) \in A \times A \mid \exists i \text{ such that } x \in A_i \wedge y \in A_i\}$$

- (הסבר במילים, הזוג הסדור (x, y) נמצא ביחס R אם ורק אם קיימת קבוצה A_i מבין הקבוצות שהגדרנו כך ש- $x \in A_i$ גם $y \in A_i$ הוכח או הפרך:
 א. $R \Leftarrow \bigcup_{i=1}^n A_i = A$ רפלקסיבי.
 ב. $R \Leftarrow \bigcup_{i=1}^n A_i = A$ רפלקסיבי.
 ג. לכל $i \neq j$ מתקיים $A_i \cap A_j = \emptyset$ $R \Leftarrow$ טרנזיטיבי.
 ד. $R \Leftarrow$ טרנזיטיבי לכל $i \neq j$ מתקיים $A_i \cap A_j = \emptyset$.

4. תהי A קבוצה, ו- R, S יחסי שקילות מעליה. הוכח או הפרך:

- א. $R \cup S$ יחס שקילות.
 ב. $(A \times A) \setminus R$ יחס שקילות.
 ג. $T = [(A \times A) \setminus S] \cup I_A$ יחס שקילות (I_A הוא יחס השיוויון).
 ד. $R \setminus S$ יחס שקילות.
 ה. $R \cap S$ יחס שקילות.
 ו. R^2 יחס שקילות.

5. נתונה הקבוצה $A = \{1, 2, 3, 4\}$. חלק א: לגבי כל אחד מיחס השקילות הבאים מעל A מצאו את החלוקה המושרית

על ידי:

א. $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

ב. $R_2 = \{(1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

ג. $R_3 = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (1, 3), (3, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

חלק ב: השלימו את היחסים הבאים ליחסי שקילות. כלומר, הוסיפו מספר מינימלי של זוגות ליחס על מנת לקבל יחס שקילות:

ד. $R = \phi$

ה. $R = \{(1, 2), (2, 4)\}$

6. נתונה הקבוצה $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. קבע שלוש חלוקות שונות על A ורשום את יחסי השקילות המתאימים.

7. נסמן $R_n = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n | (x - y)\}$. מהם R_1, R_2, R_n ? $R = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} R_n$? מהן קבוצות המנה: $\mathbb{Z}/R, \mathbb{Z}/R_1, \mathbb{Z}/R_2$?